

Norbert Duczkowski

ORCID: 0000-0003-4543-2678

nd110753@doktorant.sgh.waw.pl

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie,

Szkoła Doktorska

<https://doi.org/10.26366/PTE.ZG.2022.212>

Open Access CC BY 4.0



Cytowanie: Duczkowski, N. (2022). Wpływ wyboru rozkładu statystycznego zmian oczekiwanej długości życia na wyznaczenie parametrów swapów przenoszących ryzyko długowieczności. *Zeszyty Naukowe Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego w Zielonej Górze*, 16, s. 27-47. DOI: 10.26366/PTE.ZG.2022.212

Wpływ wyboru rozkładu statystycznego zmian oczekiwanej długości życia na wyznaczenie parametrów swapów przenoszących ryzyko długowieczności

Abstrakt: Celem niniejszej pracy jest weryfikacja wpływu wyboru rozkładu statystycznego zmian oczekiwanej długości życia na wyznaczenie parametrów swapów przenoszących ryzyko długowieczności. Weryfikacja ta zostanie przeprowadzona metodą analityczną na podstawie danych dotyczących oczekiwanej długości życia dla świata, publikowanych przez Bank Światowy. Porównaniu zostaną poddane parametry wyznaczone na podstawie rozkładów Cauchy'ego, normalnego, gamma oraz α -stabilnego. Wyniki prac potwierdzają, że wybór parametrów statystycznych oraz rozkładów do modelowania oczekiwanej długości życia jest znaczącym i kluczowym czynnikiem wpływającym na ustalenie parametrów instrumentów finansowych opartych o wskaźniki długowieczności. Wyniki prac wskazują także na ułomności metody analitycznej.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia; ryzyko długowieczności; longevity swap; rozkłady statystyczne.

The statistical distribution of changes in expected life length choice effect for the determination of parameters for longevity risk swaps.

Abstract: The aim of this study is to verify the impact of the statistical distribution of changes in life expectancy selection on the determination of longevity risk swap parameters. Verification will be carried out with an analytical method on the basis of life expectancy data published by the World Bank. The parameters determined on the basis of Cauchy, normal, gamma and α -stable distributions will be compared. The results of the work confirm that the selection of statistical parameters and distributions for modelling life expectancy is a significant and key factor influencing the determination of the parameters of financial instruments based on longevity indicators. The results of the work also indicate the shortcomings of the analytical method.

Keywords: insurance; longevity risk; longevity swap; statistical distribution

JEL: G220, G520, D120

Wprowadzenie

Systemy emerytalne w krajach rozwiniętych, w tym w Polsce, stają pod coraz większą presją ze względu na obciążenia finansowe związane ze strukturą wiekową ludności, a także z wydłużającym się trwaniem życia (Szczepański, 2014; Murkowski, 2017; Jakubowska,

2018). Prognozy demograficzne nie są w tym zakresie optymistyczne (Murkowski, 2017; Jakubowska, 2018), co budzi niepokój zarówno rządzących jak i przyszłych emerytów.

Zjawisko to skutkuje wzrostem zainteresowania rozwiązaniami finansowymi bazującymi na rentach dożywotnich (*ang. annuity*). Firmy, które dostarczają te rozwiązania (głównie zakłady ubezpieczeń, ale także fundusze hipoteczne), podobnie jak instytucje obsługujące państwowe systemy emerytalne narażone są na ryzyko długowieczności, które związane jest z dłuższą niż oczekiwana długością życia osoby ubezpieczonej, a przez to dłuższymi niż zakładano wypłatami. Taki stan rzeczy może skutkować stratami instytucji finansowych, a przez to generować ryzyko systemowe dla całego sektora, co ze względu na znaczenie zakładów ubezpieczeń dla całej gospodarki (Śliwiński, 2019; Duczkowski, 2021b) nie jest sytuacją pożądaną.

Zabezpieczenie ryzyka długowieczności możliwe jest m.in. przez zawarcie transakcji na rynku kapitałowym. Do najbardziej znanych instrumentów zalicza się tutaj obligacje albo swapy. Nie można zapominać także o bardzo popularnej umowie ograniczającej ryzyko długowieczności, czyli reasekuracji. Warto podkreślić, że zarówno papiery wartościowe powiązane z długowiecznością jak i instrumenty pochodne nie są jednak powszechne w obrocie na rynkach finansowych, ze względu na trudności w ustalaniu ich cen. Fakt ten stał bezpośrednio za motywacją niniejszego artykułu.

Celem niniejszej pracy jest weryfikacja wpływu wyboru rozkładu statystycznego zmian oczekiwanej długości życia na wyznaczenie parametrów swapów przenoszących ryzyko długowieczności. Weryfikacja ta zostanie przeprowadzona metodą analityczną na podstawie danych dotyczących oczekiwanej długości życia dla świata publikowanych przez Bank Światowy. Weryfikacji poddane zostaną rozkłady: Cauchy'ego, normalny, gamma oraz α -stabilny. Zdaniem autora (hipoteza badawcza) wybór parametrów statystycznych do modelowania oczekiwanej długości życia jest znaczącym i kluczowym czynnikiem wpływającym na ustalenie parametrów instrumentów finansowych opartych o wskaźniki długowieczności.

1. Ryzyko długowieczności

Ryzyko to pojęcie będące immanentną cechą każdej działalności człowieka, w szczególności aktywności gospodarczej (Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 13). Jest ono przedmiotem badań wielu dyscyplin naukowych od finansów, poprzez matematykę na prawie

czy ubezpieczeniach kończąc. Oczywiście każda z tych nauk trochę inaczej rozumie to pojęcie, jednak uogólniając można wskazać, że ryzyko definiowane jest jako zagrożenie nieosiągnięcia oczekiwanych rezultatów (Zawadzka, 1999, s. 307-308).

Jednym z rodzajów ryzyka jest ryzyko długowieczności (*ang. longevity risk*), które bywa określane także jako ryzyko długości życia (Hull, 2011, s. 82; Bartkowiak, 2011) i rozumiane jest jako życie dłuższe niż oczekiwane. Z pojęciem tym związane jest bezpośrednio pojęcie ryzyka śmiertelności, interpretowanego jako wzmożona śmiertelność, czyli krótsza niż oczekiwana długość życia (Hull, 2011, s. 82). Ryzyko długowieczności, podobnie jak ryzyko śmiertelności, nie pozostaje bez wpływu na branżę finansową, a w szczególności ubezpieczeniową, która w ramach swojej podstawowej działalności zajmuje się podejmowaniem ryzyka (Śliwiński, 2019). Wpływ ten jednak jest różny, w zależności od typu ubezpieczanego ryzyka, co przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wpływ ryzyka długowieczności oraz ryzyka śmiertelności na rentowność zakładu ubezpieczeń w zależności od wybranych rozwiązań ubezpieczeniowych

Rodzaj ryzyka	Odchylenie od oczekiwań	Ubezpieczenia rentowe (renta dożywotnia)	Tradycyjne ubezpieczenie na życie	
Ryzyko długowieczności	+	(życie dłuższe od oczekiwań)	Negatywny (wypłata świadczeń dłużej niż zakładano)	Pozytywny (brak wypłaty świadczeń)
	-	(życie krótsze od oczekiwań)	Pozytywny (wypłata świadczeń krócej niż zakładano)	Negatywny (wypłata większej ilości świadczeń niż zakładano)
Ryzyko śmiertelności	+	(śmiertelność większa od oczekiwań)	Pozytywny (wypłata świadczeń krócej niż zakładano)	Negatywny (wypłata większej ilości świadczeń niż zakładano)
	-	(śmiertelność mniejsza od oczekiwań)	Negatywny (wypłata świadczeń dłużej niż zakładano)	Pozytywny (brak wypłaty świadczeń)

Źródło: opracowanie własne na podstawie: (Hull, 2011; Adamska-Mieruszewska, 2019).

Widać zatem, że materializacja ryzyka długowieczności może mieć negatywny wpływ na działalność tych podmiotów, które zapewniają świadczenia dożywotnie.

W literaturze przedmiotu zwykło dzielić się ryzyko długowieczności na ryzyko w skali mikro i makro (Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 14). Ryzyko w skali mikro określane bywa także jako indywidualne ryzyko długowieczności czyli ryzyko dłuższego, w porównaniu do kohorty demograficznej, życia jednostki (Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 15; Szczepański, 2014) zaś ryzyko w skali makro, określane bywa mianem ryzyka zagregowanego i informuje, na ile jako populacja żyjemy dłużej niż zakładano. W ramach zagregowanego ryzyka

długowieczności wyróżnia się komponent losowy oraz systematyczny (Bartkowiak, 2011) a jego źródła upatruje się zarówno w błędach szacunków dalszego trwania życia w zakresie tendencji (Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 16-17; Bartkowiak, 2011) jak również w nieprzewidywalnych zdarzeniach wpływających na całą strukturę demograficzną (*ang. longevity shock*), czego przykładem może być obecnie trwająca pandemia COVID-19.

Ryzyko długowieczności w skali mikro materializuje się poprzez obserwację odchyłeń trwania życia wokół prognozowanej średniej. Ma charakter ryzyka ubezpieczalnego (Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 15-16). Z punktu widzenia zakładu ubezpieczeń lub innego podmiotu narażonego na ryzyko długowieczności, ryzyko indywidualne jest zarządzalne (Bartkowiak, 2011). Może być ono bowiem ograniczone poprzez dywersyfikację portfela (Szczepański, 2014) lub reasekurację i transfer ryzyka na inne podmioty (Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 16). Innymi słowy, z punktu widzenia instytucji narażonej na ryzyko długowieczności sytuacją pożądaną jest taka, gdy odchylenia dalszego trwania życia lub współczynników zgonów oscylują wokół wartości oczekiwanej.

Sytuacja zmienia się jednak znacząco, kiedy przyjmiemy szerszą perspektywę. W sytuacji, gdy odchylenia dalszego trwania życia lub współczynników zgonów przestają oscylować wokół wartości oczekiwanej, a kierunek zmian zaczyna być powtarzalny mamy do czynienia z ryzykiem systematycznym w skali makro. Jego istota jest zdecydowanie inna, niż w przypadku ryzyka indywidualnego (Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 16-17), co skutkuje zwiększonymi trudnościami w zarządzaniu tym ryzykiem przez instytucje finansowe. Wynika to z faktu, że ryzyko długowieczności w skali makro może być wynikiem zewnętrznych uwarunkowań, takich jak postęp nauki, medycyny czy rozwój społeczno-gospodarczy, które wpływają w sposób szybszy, niż mogłoby to wynikać z prognoz, na wydłużenie dalszego oczekiwanego trwania życia (Hul, 2019, s. 82; Adamska-Mieruszewska, 2019, s. 16). Ryzyko długowieczności w skali makro nie jest ograniczone do wybranych krajów czy regionów, a ma bardziej uniwersalny charakter. Różni się jednak jego intensyfikacja, która zależy od poziomu rozwoju danego kraju.

Do analizy zagregowanego ryzyka długowieczności stosuje się cały szereg wskaźników powszechnie wykorzystywanych w demografii. Do najpopularniejszych zaliczyć można choćby: współczynnik zgonów, prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku w określonym wieku, średnie dalsze trwanie życia jednostki w określonym wieku czy oczekiwaną długość życia w chwili urodzenia. To właśnie ten wskaźnik stanowić będzie podstawę analizy w ramach niniejszej pracy, gdyż bardzo często stanowi on podstawę do konstrukcji dostępnych na rynku finansowym rozwiązań przenoszących ryzyko długowieczności.

Wykresy oczekiwanej długości życia dla świata ogółem i śmiertelności przedstawiono w Dodatku (World Bank, 2021). Potwierdzają one istotność tematu, gdyż od 1960 r. do 2019 r. (ostatnie dane opublikowane przez Bank Światowy do dnia przygotowania niniejszego artykułu) oczekiwana długość życia w chwili urodzenia ogółem dla świata wydłużyła się o 20,16 lat (z 52,582 lat do 72,742 lat), z czego dla kobiet o 20,44 lat (z 54,61 lat do 75,05 lat) a dla mężczyzn o 19,84 lat (z 50,74 lat do 70,58 lat). Ryzyko długowieczności ze względu na jego znaczenie było szeroko analizowane przez naukowców w różnych kontekstach. Badania naukowe miały charakter zarówno regionalny, jak i globalny, a ich zakres tematyczny możemy podzielić na następujące kategorie: modelowanie umieralności, analizę struktury czasowej umieralności, metody prognozowania umieralności, międzypopulacyjne modelowanie umieralności, modelowanie śmiertelności z uwzględnieniem przyczyn śmierci, czy wreszcie zróżnicowanie długowieczności (Blake i Cairns, 2020, 2021). Wybrane badania z przywołanego powyżej zakresu tematycznego, zaczerpnięte z prac Blake i Cairns (2020, 2021), przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wybrane prace badawcze związane z ryzykiem długowieczności

Tematyka	Wybrane prace badawcze
Modelowanie umieralności, struktura czasowa umieralności, prognozowanie umieralności	Li i in., 2015a, 2015b, O'Hare i Li, 2017; Hunt i Blake, 2020a, 2020b, 2020c, 2020d; Tomas i Planchet, 2015; Leng i Peng, 2016; Schinzinger i in., 2016; Beutner i in., 2017; Deprez i in., 2017; Kleinow i Richards, 2017; Li i Lu, 2017; Li i O'Hare, 2017; Milidonis i Efthymiou, 2017; Neves i in., 2017; Shang i Hyndman, 2017; Tsai i Lin, 2017; Börger i Schupp, 2018; Debonneuil i in., 2018; Hainaut, 2018; McCarthy, 2018; Hilton i in., 2019; Guo i Bauer, 2020; McCarthy i Wang, 2020; Su i Yue, 2020; Venter i Sahl, 2018; Yue i in., 2020.
Modelowanie śmiertelności w wielu populacjach	Chen i in., 2015; Kleinow, 2015; Biffis i in., 2017; De Jong i in., 2016; Enchev i in., 2017; Zhu i in., 2017; Hunt i Blake, 2018; Pascariu i in., 2018; Wang i in., 2018; Yang i in., 2020.
Modelowanie śmiertelności z uwzględnieniem przyczyn śmierci	Arnold i Sherris, 2015; Gourieroux i Lu, 2015; Alai i in., 2018; Boumezoued i in., 2018; Yue i in., 2018; Li i in., 2019; Lyu i in., 2020.
Zróżnicowanie długowieczności	Mayhew i Smith, 2020; Debón i in., 2017; Sanzenbacher i in., 2020.

Źródło: (Blake i Cairns, 2020, 2021).

Osobną kategorię literatury przedmiotu w zakresie ryzyka długowieczności stanowić będzie ta, dotycząca bezpośrednio instrumentów bazujących na tym wskaźniku. Wybrane prace badawcze z tego zakresu przedstawiono w części 2 niniejszego artykułu.

Analizując literaturę ogólną dotyczącą ryzyka długowieczności przedstawioną w tabeli 2, wskazać należy na prace związane z prognozowaniem umieralności. Wiele z nich bazuje na weryfikacji lub modyfikacji kilku klasycznych modeli śmiertelności, przedstawionych w ostatnich trzydziestu latach. Takim modelem jest ten, opublikowany przez Lee i Carter

(1992). Jest to stosunkowo proste równanie liniowe, zależne od trzech parametrów, gdzie logarytm współczynnika zgonów jest równy sumie dwóch składników (Ojrzyńska, 2013; Lee i Carter, 1992). Pierwszy składnik nie zależy od czasu, a drugi jest iloczynem parametru pokazującego ogólny poziom umieralności oraz parametru wskazującego na tempo zmian umieralności w danym wieku w zależności od zmian ogólnej umieralności w czasie (Ojrzyńska, 2013; Lee i Carter, 1992).

To właśnie m.in. jego prostota stała u podstaw innych jego rozszerzeń lub modyfikacji, które pośrednio lub bezpośrednio nawiązują do założeń przedstawionych w pracy Lee i Carter (1992). Przykładem może być tu model zaproponowany przez Renshaw i Haberman (2003, 2006), który wprowadził parametr efektu kohorty do scharakteryzowania obserwowanych zmian śmiertelności wśród osób z różnych kohort.

Jednak z analizowanych badań wyłania się także inny trend. Wielu autorów wprowadzało modele stochastyczne do uchwycenia efektu kohorty (Cairns i in., 2006) albo tzw. modele resamplingowe (Atance i in., 2020). Należy zwrócić także uwagę na modele typu łączonego (*ang. p-spline models*), które także są często stosowane do modelowania wskaźników śmiertelności (Barrieu i in., 2012). Bazują one na łączeniu różnych parametrów różnych kohort i wygładzaniu wskaźników śmiertelności. Pozwalają także na wyodrębnienie nieprzewidzianych zjawisk dla danej kohorty zwiększających śmiertelność (*ang. longevity shock*). Duży wpływ na niniejszą pracę miał także artykuł opublikowany przez Brouhns i in. (2005). W badaniach tych zaproponowano rozszerzenie ogólnych ram modeli stochastycznych poprzez założenie, że liczba zgonów może być opisana rozkładem statystycznym Poissona. W innych pracach badawczych autorzy stosowali także inne rozkłady statystyczne. Jednak sam wpływ wyboru rozkładu przy zastosowaniu metody analitycznej nie podlegał bezpośrednio analizie, zwłaszcza w kontekście wyceny swapów przenoszących ryzyko długowieczności, co potwierdza lukę badawczą.

2. Rynek instrumentów stosowanych do transferu ryzyka długowieczności

Instrumenty stosowane do transferu ryzyka długowieczności były także przedmiotem wielu prac badawczych, co przedstawiono w tabeli 3 (na podstawie pracy Blake i Cairns, 2020, 2021). Badania te dotyczyły zarówno badań nad rozwiązaniami finansowymi w sposób jednostkowy jak i budowy całego portfela. Wiele z przywołanych prac badawczych stanowiło wręcz podstawę do praktycznej implementacji instrumentów na rynku.

Tabela 3. Zestawienie wybranych badań związanych instrumentami stosowanymi do transferu ryzyka długowieczności

Tematyka	Wybrane prace badawcze
Instrumenty podstawowe	Blake i in., 2014; Bauer, 2006; Antolin i Bloomestein, 2007; Bauer i Kramer, 2007; Denuit i in., 2007; Barbarin, 2008; Chen i Cummins, 2010; Kogure i Kurachi, 2010; Bravo, 2011; Mayhew i Smith, 2011; Zhou i in., 2011, 2013; Chen i in., 2013; Shen i Siu, 2013; Denuit i in., 2015; Hunt i Blake, 2015; Milevsky i Salisbury, 2015; Yang i in., 2015; Wang i Li, 2016; Chen i in., 2017; Leung i in., 2018; Mayhew i in., 2020.
Instrumenty pochodne	Shang i in., 2011; Lin i in., 2013; Wang i Yang, 2013; Chuang i Brockett, 2014, Dowd i in., 2006; Wang i in., 2013, 2015; Dawson i in., 2010; Barrieu i Veraart, 2016; Milevsky i Promislow, 2001; Zhou i Li, 2020; Gao i in., 2015.
Reasekuracja („życiowa sekurytyzacja”)	Dahl, 2004; Chen i Cox, 2009; Cowley i Cummins, 2005; Lin i Cox, 2005; Cox i Lin, 2007; Biffis i Blake, 2010; 2013, 2014; Wills i Sherris, 2010; Lane, 2011; Mazonas i in., 2011; Blake i in., 2013; Yang i Huang, 2013; Bugler i in., 2020.
Zarządzanie ryzykiem długowieczności (portfel inwestycyjny, plany emerytalne)	Milevsky i Young, 2007; Menoncin, 2008; Horneff i in., 2008, 2009, 2010, 2015; Huang i in., 2012; Maurer i in., 2013; Rogalla, 2020; Aro, 2014; Bisetti i Favero, 2014; Donnelly, 2014; Ai i in., 2015; Wan i Bertsch, 2015; Ai i in., 2017; Bruszas i in., 2018; Cox i in., 2018; Hsieh i in., 2018; Kurtbegu, 2018; Dowd i in., 2020

Źródło: (Blake i Cairns, 2020, 2021).

Na podstawie przedstawionej powyżej analizy literatury stwierdzić można, że na rynku występują cztery główne instrumenty (typy transakcji), które pozwalają na transfer ryzyka długowieczności, a ich zastosowanie zależy w dużej mierze od form prawnych podmiotów uczestniczących w transakcji (Blake i Cairns, 2020, 2021; Basel Committee on Banking Supervision, 2013).

Do jednych z pierwszych transakcji, które przenosiły między stronami ryzyko związane z długością życia należała tradycyjna sprzedaż aktywów obciążonych ryzykiem (*ang. buy-in, buy-out*). W ramach tego typu transakcji wszystkie aktywa i pasywa pomiotu narażonego na ryzyko przekazywane są ubezpieczycielowi w zamian za premię płaconą z góry (Blake i Cairns, 2020; Basel Committee on Banking Supervision, 2013; Bartkowiak, 2011). To właśnie strona nabywająca, czyli ubezpieczyciel przejmuje całość zobowiązań wobec wypłat dla jednostek (Basel Committee on Banking Supervision, 2013). Co do zasady transakcje buy-in oraz buy-out charakteryzują się wysokimi kosztami (składka płaconą z góry do podmiotu sprzedającego oraz rezerwy zawiązywane przez podmiot kupujący) oraz ograniczonym kręgiem podmiotów rynku finansowego, które mogą w nich uczestniczyć. Jednak jak się powszechnie wskazuje (Blake i Cairns, 2021) wykupy mogą być atrakcyjne w określonych warunkach (np. małe, lokalne programy emerytalne z dużą luką cenową). Nie należy jednak zaniedbywać całego szeregu czynników specyficznych dla lokalnego rynku (np. skutki prawne dla osób ubezpieczonych).

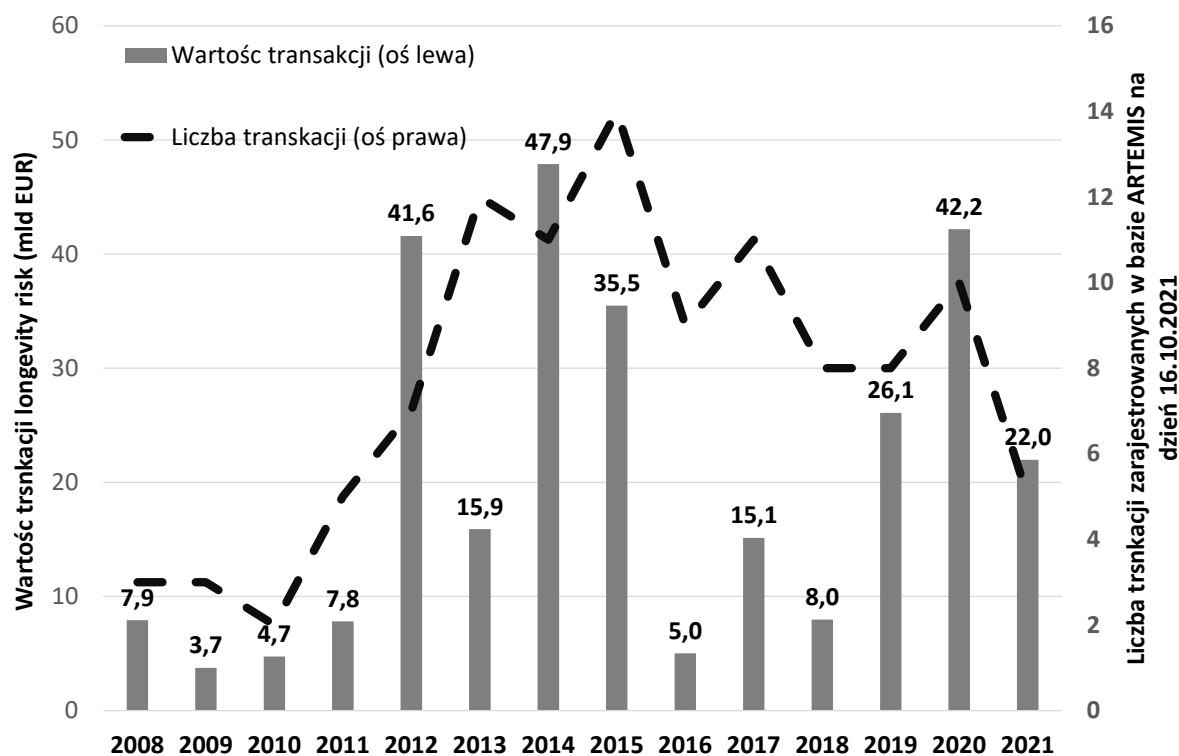
Transakcje typu *buy-in* oraz *buy-out* są bardzo podobne do najpopularniejszego obecnie rozwiązania transferującego *longevity risk*, czyli tradycyjnej reasekuracji, zwanej też w literaturze życiową sekurytyzacją (Biffis i Blake, 2010, 2013). Główną różnicę w stosunku do wykupów stanowią cykliczne rozliczenia (Basel Committee on Banking Supervision, 2013). Widać zatem, że angażowany do transakcji kapitał w dużej mierze decyduje o jej rynkowej popularności.

Nic więc dziwnego zatem, że trzeci typ instrumentu bazujący na ryzyku długowieczności, czyli obligacje długowieczności (*ang. longevity bonds*) nie jest w ogóle w praktyce stosowany. Według powszechnie dostępnych źródeł do tej pory nie doszło do udanej emisji obligacji długowieczności (Bartkowiak, 2011; Blake i Cairns, 2020; Basel Committee on Banking Supervision, 2013). Taki stan stoi nieco w opozycji do dużej aktywności innego segmentu rynku, gdzie dokonywane są emisje obligacji średnioterminowych (do pięciu lat) powiązanych ze zdarzeniami katastrofalnymi takimi, jak np. pandemia (Wang i Li, 2016; Basel Committee on Banking Supervision, 2013). Wypłata kuponów z *longevity bonds* oraz ich wielkość zależy od ustalonych wskaźników długowieczności dla danej populacji. Co do zasady, wraz ze wzrostem wskaźnika (np. średnia dalsza długość życia) następuje wypłata większego kuponu (Basel Committee on Banking Supervision, 2013). Innymi słowy *longevity bonds* to nic innego, jak obligacja zmiennokuponowa, gdzie płatności zależą od wskaźników demograficznych. Do jej głównych wad zalicza się właśnie dużą płatności z góry na rzecz emitenta (Blake i Cairns, 2020; Bartkowiak, 2011).

Wskazanych wyżej wad pozbawiony jest kluczowy z punktu widzenia niniejszej pracy i drugi najbardziej popularny typ transakcji przenoszący ryzyko długowieczności czyli *longevity swap*. W ramach tej umowy, jedna ze stron transakcji dokonuje okresowych stałych płatności na rzecz kontrahenta, który z kolei dokonuje okresowych płatności opartych na zmiennym wskaźniku demograficznym, najczęściej zmianie oczekiwanej długości życia lub śmiertelności (Basel Committee on Banking Supervision, 2013). W praktyce rozliczenie tych instrumentów opiera się o kwotę netto wynikającą z różnicy między płatnościami, co także wpływa na ich popularność.

Oczywiście przedstawione powyżej instrumenty nie wyczerpują wszystkich dostępnych na rynku, czy w literaturze przedmiotu (np. *q-forwards*), a także nie poruszają wszystkich zagadnień z nimi związanych (np. analizy wrażliwości instrumentów pochodnych, szeroko opisana w: Zhou i Li, 2021, czy kosztu kapitału: Zeddouk i Devolder, 2019). Wskazują one jednak na znaczenie i popularność *longevity swaps*, czyli instrumentu kluczowego z punktu widzenia niniejszej pracy.

Bez wątplenia rynek instrumentów stosowanych do transferu ryzyka długowieczności nie jest rynkiem rozwiniętym. Zarówno papiery wartościowe powiązane z długowiecznością, jak i instrumenty pochodne nie są powszechne w obrocie, ze względu na trudności w ustalaniu ich cen. W strukturze transakcji dotyczących instrumentów związanych z długowiecznością niemal 100% transakcji odbywa się na rynku poza giełdowym (*ang. OTC*) i dotyczy głównie rynków USA i Wielkiej Brytanii (Pension Research Council, 2021). Wynika to m.in. z faktu, że brak jest rynkowych wskaźników (indeksów), które mogłyby stanowić bazę dla tych instrumentów, a które byłyby publikowane częściej niż raz na rok. Z tego też względu podjęto kilka prób stworzenia takich miar (Bartkowiak, 2011), do których zaliczyć można m.in. takie indeksy jak: JP Morgan LifeMetrics, Credit Suisse Longevity Index, Deutsche Borse Xpect, Goldman Sachs QxX. Jednak ze względu na swoje ograniczenia, związane z rynkiem czy częstotliwość aktualizacji (miesięczna lub roczna) nie zyskały one dużej popularności i nie wpłynęły na pogłębienie tego rynku (Bartkowiak, 2011).



Rysunek 1. Kluczowe parametry rynku w zakresie ryzyka długowieczności

Źródło: opracowanie własne na podstawie: (Artemis, 2021).

Pierwszą próbę emisji obligacji długowieczności podjęto już w 2004 roku, kiedy to bank BNP Paribas wraz z Europejskim Bankiem Inwestycyjnym (EBI) ogłosiły emisję 25 letniej obligacji o wartości nominalnej 540 mln GBP i kuponach uzależnionych od współczynnika śmiertelności mężczyzn pochodzących z Anglii i Walii (Bartkowiak, 2011). Jednak emisja ta nie została zakończona sukcesem (Bartkowiak, 2011). Transakcje na kolejnych instrumentach

były wprost związane z rozwojem teoretycznych aspektów tych instrumentów, wynikających z prac przywołanych w tabeli 3. Nic więc dziwnego, że historycznie rozwój rynku możemy podzielić na cztery etapy. Pierwszy etap (2004-2011) to faza pre-inkubacji, która charakteryzuje się małą ilością transakcji i małym wolumenem. Drugi etap (2012-2015) to efekt rozwoju teoretycznych aspektów transakcji i lepszego zrozumienia tego rynku przez uczestników. W etapie tym rosła zarówno wolumeny jak i ilość transakcji. Trzeci etap (2016-2018) to etap wczesnego wzrostu, gdzie rośnie średnia wartość transakcji. Etap ostatni (2019- do dziś) to okres ponownego wzrostu wolumenów transakcyjnych. Fazy te można zaobserwować analizując rysunek 1. Warto jednak zaznaczyć, że choć przedstawione tam dane bazują na danych Artemis (2021), to jednak transakcje związane z długowiecznością dokonywane są na rynku pozagiełdowym (Pension Research Council, 2021). Artemis jest obecnie najdłuższym działającym serwisem informacyjnym, analitycznym i medialnym poświęconym alternatywnym transferom ryzyka w tym ryzyka długowieczności, niemniej jednak baza transakcji nie musi być pełna.

Do najbardziej aktywnych graczy na tym rynku należą nie tylko znane banki inwestycyjne takie jak (Artemis, 2021): Deutsche Bank, Credit Suisse, Goldman Sachs, JP Morgan, Société Générale, ale głównie zakłady ubezpieczeń i reasekuracji. Wśród podmiotów z branży ubezpieczeniowej stronami transakcji przenoszących ryzyko długowieczności były m.in. (Artemis, 2021): Abbey Life, Canada Life Assurance, Prudential, Munich Re, Swiss Re, Hannover Re, MetLife, Pacific Life Re, Phoenix Life, Reinsurance Group of America, Sun Life Assurance Company of Canada, Zurich Re. Warto także zaznaczyć, że w praktyce, choć na rynku dostępnych jest, tak jak wskazano wcześniej kilka grup instrumentów przenoszących ryzyko długowieczności, to transakcje zawierane są tylko przy użyciu dwóch głównych czyli reasekuracji oraz swapów. Zestawienie liczby transakcji przenoszących ryzyko długowieczności, zawartych w okresie 2008-2021, przedstawiono w tabeli 4. Poniższe dane wskazują rolę i znaczenie swapów (*longevity swaps*) jako instrumentów przenoszących ryzyko długowieczności, co stało bezpośrednio za motywacją niniejszej pracy.

Tabela 4. Zestawienie liczby transakcji przenoszących ryzyko długowieczności zawartych w okresie 2008-2021

Typ transakcji	Liczba transakcji
Buy-in	3
Buy-in i reasekuracja	3
Buy-out	3
Buy-out i reasekuracja	1
Zabezpieczanie ryzyka na bazie stworzonych indeksów długowieczności (bez znanej formy transakcji)	5
Reasekuracja	39
Swap	28
Swap i reasekuracja	26
Łączna liczba transakcji	108

Źródło: opracowanie własne na podstawie: (Artemis, 2021).

3. Metodyka badania

Do badania wykorzystano dane roczne za okres od 1960-2019, oczekiwanej długości życia dla świata w momencie urodzenia, publikowane przez Bank Światowy (World Bank, 2021). Analizie statystycznej poddano szereg czasowy zmian oczekiwanej długości życia pomiędzy kolejnymi latami (zmienna $z(i)$), co można wyrazić za pomocą formuły:

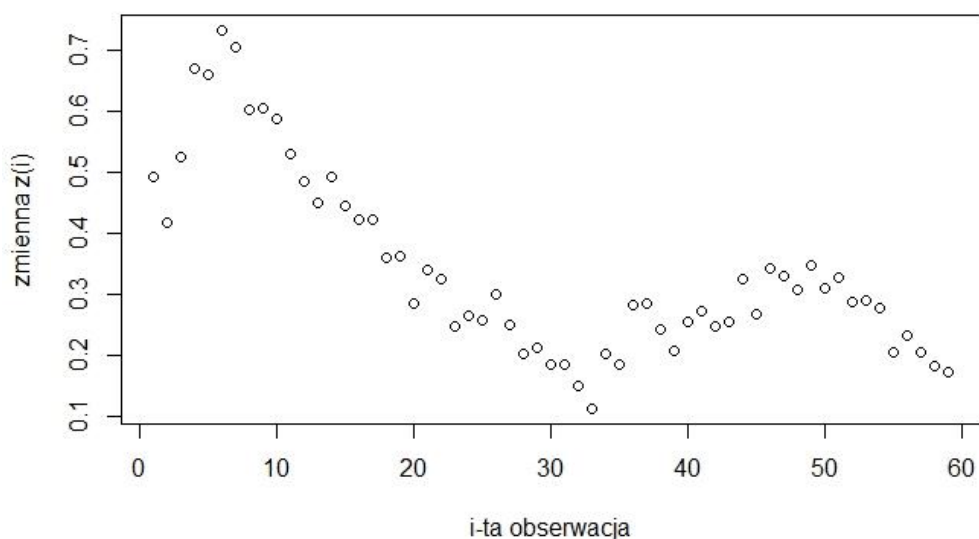
$$z(i) = A_i - A_{i-1} \quad (1)$$

gdzie: $z(i)$ - analizowana zmienna, zmiana oczekiwanej długości życia, A_i - oczekiwana długość życia w momencie urodzenia dla świata w roku i , A_{i-1} -oczekiwana długości życia dla świata w momencie urodzenia w roku $i-1$. Graficzną prezentację zmiennej $z(i)$ przedstawia rysunek 2.

Analizując przebieg szeregu czasowego zmiennej $z(i)$, stwierdzić można, że w okresie powojennym, do roku 1970 następowały znaczące, pozytywne zmiany oczekiwanej długości życia. Zmiany te traciły na sile od lat 70 do lat 90 by następnie trend się odwrócił aż do roku 2010. Obecnie obserwujemy spadek dynamiki dodatnich zmian oczekiwanej długości życia. Obserwacje te pozwalają domniemywać, że rozkład zmiennej $z(i)$, czyli zmiany oczekiwanej długości życia jest rozkładem lewostronnie niesymetrycznym (większa reprezentacja małych zmian). Będzie to jednak także rozkład, w którym występują tzw. rzadkie zdarzenia.

W ramach prac badawczych, przy pomocy pakietu R-Studio dokonano wyznaczenia statystyk opisowych rozkładu zmiennej $z(i)$ (funkcje: *summary()*, *mean()*, *sd()*, *kurtosis()*, *skewness()*) takich, jak: minimum, I kwartył, mediana, średnia, III kwartył, maksimum, odchylenie standardowe, skośność i kurtoza.

Następnie w ramach prac badawczych dokonano dopasowania rozkładów teoretycznych do danych empirycznych (funkcja *fitdistr()* oraz *stableFit()*). Analizie poddano rozkłady: Cauchy'ego, normalny, gamma i α -stabilny, wyznaczając jednocześnie ich parametry. Po wyznaczeniu parametrów rozkładów, dokonano weryfikacji hipotezy w zakresie dopasowania rozkładu o określonych parametrach do danych empirycznych. Weryfikacja wykonywana była przy użyciu testu statystycznego Anderson'a- Darling'a, także dostępnego w R-Studio (funkcja *ad.test()*). Wyniki obliczeń i dopasowania rozkładów teoretycznych do danych empirycznych przedstawiano w kolejnej części artykułu.



Rysunek 2. Analizowana zmienna $z(i)$ - zmiana oczekiwanej długości życia pomiędzy kolejnymi latami

Źródło: opracowanie własne na podstawie: (World Bank, 2021).

W badaniu, dla wyceny *longevity swap*, zastosowano metodę analityczną, czyli wyznaczenie parametru stałej płatności jako zmiennej zależnej od wartości oczekiwanej długości życia. Znając parametry dopasowanych rozkładów statystycznych analizie poddano hipotetycznego swapa przenoszącego ryzyko długowieczności (*longevity swap*), którego czas życia wynosi 10 lat, a płatności dokonywane są rocznie w PLN w oparciu o oczekiwaną długość życia dla świata w momencie urodzenia. Tak jak wskazano wcześniej, *longevity swap* jest umową pomiędzy dwiema stronami, które zobowiązują się do wymiany serii płatności odsetkowych w tej samej walucie, naliczanych od uzgodnionej kwoty nominalnej i dla ustalonego okresu, przy czym jedna ze stron płaci odsetki oparte na stałym oprocentowaniu, zaś druga na oprocentowaniu zależnym od oczekiwanej długości życia (zmiennym). Konstrukcja *longevity swap* tak, by był on zero kosztowy dla każdej ze stron zawierających transakcje, wymusza aby wartość bieżąca płatności każdej ze stron była taka sama, co można zapisać za pomocą wzoru:

$$PV(\text{fix leg}) = PV(\text{floating leg}) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{C}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^N \frac{E\langle A_i \rangle}{(1+r)^i} \quad (3)$$

gdzie: $PV(\text{fix leg})$ - wartość bieżąca zdyskontowanych przepływów pieniężnych, zależnych od ustalonej stałej stopy procentowej, $PV(\text{floating leg})$ - wartość bieżąca zdyskontowanych przepływów pieniężnych, zależnych od zmiennej stopy procentowej, wyznaczonych na podstawie określonego wskaźnika długowieczności, i - kolejne lata, $i=1,2,3,\dots,10$, C - stała płatność, $E\langle A_i \rangle$ - zmienna płatność zależna od wartości oczekiwanej długości życia, A_1 - teoretyczna oczekiwana długość życia dla danego rozkładu.

Korzystając z założenia niezależności rocznych zmian oczekiwanej długości życia ($E\langle A_i \rangle = \sum_{i=1}^N A_i$, $E\langle A_1 \rangle = A_1$, $E\langle A_2 \rangle = A_2 = A_1 + A_1$, ...) możemy rozwinąć lewą (L) oraz prawą (P) stronę równania (2) i (3) do postaci:

$$L = C \sum_{i=1}^N \frac{1}{(1+r)^i} = C \left(\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{10}} \right) \quad (4)$$

$$P = A_1 \sum_{i=1}^N \frac{i}{(1+r)^i} = A_1 \left(\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{2}{(1+r)^2} + \frac{3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{10}{(1+r)^{10}} \right) \quad (5)$$

Następnie korzystając ze wzorów na sumę szeregów geometrycznych oraz rachunku zaburzeń, używając do dyskontowania stopę równą stopie 10Y IRS dla PLN (przyjęto założenie, że transakcja dokonywana jest w PLN) z serwisu CBonds (2021), co pozwala przyjąć, że stopa dyskontowa jest niezmienna w okresie życia swapa, możemy równanie (3) sprowadzić do postaci:

$$L = C \frac{(1+r)^N - 1}{r(1+r)^N} = A_1 \left(\frac{(1+r)^N - 1 - (N+1)r + r(1+r)^N}{r^2(1+r)^N} \right) = P \quad (6)$$

Po prostych przekształceniach, na podstawie równania (6) można wyznaczyć stałą płatności analizowanego 10Y *longevity swapa* w zależności od wyznaczonej z dopasowanych rozkładów wartości oczekiwanej zmiany długości życia:

$$C = A_1 \frac{(1+r)^{N+1} - [(N+1)r + 1]}{r[(1+r)^N - 1]} \quad (7)$$

Wyniki obliczeń przedstawiano w kolejnej części artykułu. W ramach badania wyznaczono także błąd oszacowania stałego współczynnika C na podstawie błędu wyznaczenia wartości oczekiwanej długości życia oraz różnicę ($Ptcum - Pecum$) między skumulowanymi rozkładami teoretycznymi ($Ptcum$) i empirycznymi ($Pecum$) do III kwartyła.

4. Wyniki

Na podstawie procedury opisanej w Rozdziale 3. Metodyka Badania w pierwszym kroku wyznaczono statystyki opisowe rozkładu zmiennej $z(i)$. Wyniki obliczeń zawiera tabela 5.

Tabela 5. Podstawowe statystyki opisowe rozkładu empirycznego zmiany oczekiwanej długości życia dla świata (zmienna $z(i)$)

Parametry	Wartość wyznaczonych parametrów
Minimum	0,1144
I kwartył	0,2457
Mediana	0,2911
Średnia	0,3417
III kwartył	0,4236
Maksimum	0,7315
Odchylenie standardowe	0,1499
Skośność	0,9567
Kurtoza	0,0154

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych: (World Bank, 2021).

Wyniki zawarte w tabeli 5 potwierdzają obserwacje w zakresie rozkładu empirycznego zmiennej $z(i)$ dokonane na podstawie rysunku 2.

W kolejnym kroku, zgodnie z procedurą opisaną w Rozdziale 3. dopasowano rozkłady teoretyczne (Cauchy'ego, normalny, gamma i α -stabilny) do danych empirycznych, wyznaczono ich parametry oraz dokonano weryfikacji hipotezy w zakresie dopasowania rozkładu o określonych parametrach do danych empirycznych. Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunku 3 i 4 oraz w tabeli 6.

Tabela 6. Oszacowane parametry rozkładów zmiany oczekiwanej długości życia dla świata ($z(i)$) wraz z wynikami testu Anderson'a- Darling'a

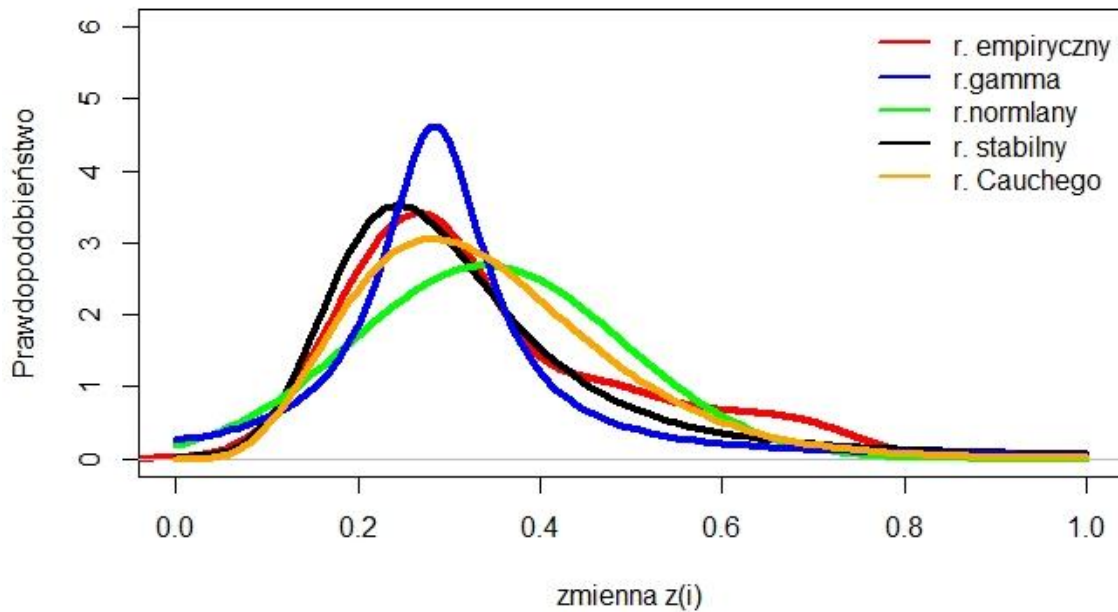
Parametry	Rozkład			
	Cauchy'ego	normalny	gamma	stabilny
Dopasowane parametry rozkładów statystycznych				
Pozycja	0,2842 (0,0134)			
Skala	0,0686 (0,0124)			
Średnia		0,3417 (0,0194)		
Odchylenie standardowe		0,1486 (0,0137)		
Kształt			5,8887 (1,0549)	
Wskaźnik (skala)			17,2338 (3,2228)	
α				1,3250
β				0,9500
c				0,0794
μ				0,2631

Wyniki testu Anderson'a-Darling'a				
AD	2,3854	2,1096	0,88386	0,84304
p-value	0,0571	0,0802	0,4238	0,4505
Komentarz	Brak podstaw do odrzucenia H_0 mówiącej, iż rozkład zmiennej $z(i)$ jest rozkładem Cauchy'ego, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tymi z tabeli	Brak podstaw do odrzucenia H_0 mówiącej, iż rozkład zmiennej $z(i)$ jest rozkładem normalnym, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tymi z tabeli	Brak podstaw do odrzucenia H_0 mówiącej, iż rozkład zmiennej $z(i)$ jest rozkładem gamma, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tymi z tabeli	Brak podstaw do odrzucenia H_0 mówiącej, iż rozkład zmiennej $z(i)$ jest rozkładem stabilnym, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tymi z tabeli

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych: (World Bank, 2021). Parametry rozkładu stabilnego: parametr stabilności α , $\alpha \in (0,2]$, parametr skośności β , $\beta \in [-1,1]$, parametr skali c , $c \in (0,\infty)$, parametr lokalizacji μ , $\mu \in (-\infty, \infty)$, Parametry AD oraz p-value oznaczają odpowiednio wartość statystyki testującej i prawdopodobieństwa w ramach stosowanego testu statystycznego.

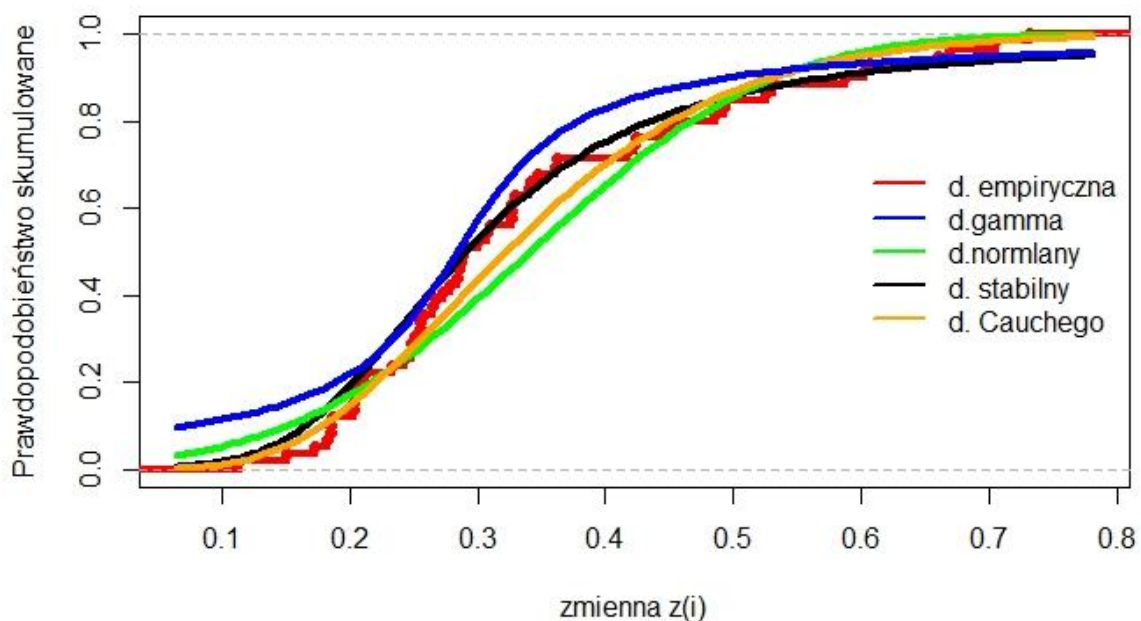
Na podstawie wyników prezentowanych w tabeli 6 oraz rysunku 3 i 4 można zaobserwować m.in, że:

- żaden z zastosowanych rozkładów statystycznych nie może zostać odrzucony, jako nieistotny do opisu rozkładu zmiennej $z(i)$ na podstawie zastosowanego testu Anderson'a-Darling'a (p-value w każdym z przypadków $> 0,05$),
- wartość statystyki testującej Anderson'a-Darling'a (AD) a co za tym idzie *p-value*, wykazuje duże zróżnicowanie (od 0,05714 dla rozkładu Cauchy'ego do 0,84304 dla rozkładu stabilnego), co może świadczyć o zróżnicowaniu jakości dopasowania rozkładów teoretycznych do danych empirycznych,
- rozkład z najniższą wartością statystyki testującej Anderson'a-Darling'a (AD), a co za tym idzie najwyższym p-value, czyli rozkład stabilny wydaje się najlepiej opisywać zmianę oczekiwanej długości życia, czyli zmienną $z(i)$. Nie może być on jednak zastosowany do metody analitycznej przyjętej w ramach niniejszego badania (wyznaczenie współczynnika stałej śmiertelności i jego błędu na podstawie wartości oczekiwanej), gdyż co do zasady (poza trzema przypadkami: rozkładu Cauchy'ego, Lévy'ego oraz Gauss'a) nie posiada ściśle określonej postaci funkcji definiującej rozkład, a tym samym ściśle określonej wartości oczekiwanej (Duczkowski, 2021a).
- rozkład stabilny będzie miał jednak zastosowanie do wyznaczenia różnic (*Ptcum - Pecum*) między skumulowanymi rozkładami teoretycznymi (*Ptcum*) i empirycznymi (*Pecum*) do III kwartyła, co pozwoli na kwantyfikację (wycenę) ryzyka rzadkich zdarzeń.
- zastosowanie rozkładu gamma w ramach metody analitycznej powinno dać najbardziej optymalne wyniki (druga najwyższa wartość statystyki *p-value*, potwierdzająca jakość dopasowania).



Rysunek 3. Empiryczna i teoretyczna (dopasowana) funkcja rozkładu zmiany oczekiwanej długości życia dla świata ($z(i)$)

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych: (World Bank, 2021).



Rysunek 4. Empiryczna i teoretyczna (dopasowana) dystrybuanta rozkładu zmiany oczekiwanej długości życia dla świata ($z(i)$)

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych: (World Bank, 2021).

W kolejnym kroku, wyznaczono dla analizowanego swapa współczynnik stałej płatności C (wzór 7) oraz jego błąd jak również różnicę ($Ptcum - Pecum$) między skumulowanymi rozkładami teoretycznymi ($Ptcum$) i empirycznymi ($Pecum$) do III kwartyła. Wyniki zawiera tabela 7.

Tabela 7. Oszacowane parametry analizowanego 10Y swapa

Parametry	Rozkład			
	Cauchy'ego	normalny	gamma	stabilny
Wyznaczone parametry 10Y SWAP'a				
A_1	0,2842	0,3417	0,3417	<i>nd</i>
$A_1/100$ [%]	0,2842%	0,3417%	0,3417%	<i>nd</i>
Błąd A_1	0,0134	0,0194	0,0113	<i>nd</i>
r	2,775%	2,775%	2,775%	2,775%
N	10	10	10	10
C (wyznaczone z równania (7))	1,4989	1,8022	1,8022	<i>nd</i>
Błąd C (wyznaczone na podstawie równania (7))	0,0705	0,1020	0,0598	<i>nd</i>
$C/100$ [%]	1,4989%	1,8022%	1,8022%	<i>nd</i>
Błąd $C/100$ [%]	0,0705%	0,1020%	0,0598%	<i>nd</i>
$Pe_{cum} <0;III \text{ kwartył}>$	75,0000%	75,0000%	75,0000%	75,0000%
$Pt_{cum} <0;III \text{ kwartył}>$	0,6498	0,6757	0,6627	0,8946
$Pt_{cum} - Pe_{cum}$	10,0167%	7,4265%	8,7216%	-14,4634%

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych: (World Bank, 2021).

Na podstawie wyników prezentowanych w tabeli 7 można stwierdzić duże zróżnicowanie otrzymanych wyników, co nie pozostaje bez wpływu na ryzyko stron transakcji. Każdy z rozkładów posiadających określoną wartość oczekiwaną (Cauchy'ego, normalny oraz gamma) co do zasady niedoszacowuje ilości małych zmian oczekiwanej długości życia, podczas gdy rozkład stabilny znacząco je przeszacowuje (różnica w wartościach skumulowanych rozkładów do wartości trzeciego kwartyła). Wynika to z faktu, że maksimum rozkładu stabilnego występuje dla mniejszej wartości zmiennej $z(i)$ niż maksimum rozkładu empirycznego. Duże różnice otrzymanych parametrów stałej płatności (C) między rozkładem Cauchy'ego, a normalnym oraz gamma wskazują także trudności w ustaleniu podstawowych parametrów transakcji. Nie można jednak jednoznacznie stwierdzić, zastosowanie którego z rozkładów do opisu zmiennej $z(i)$ da w długim terminie bardziej optymalne wyniki.

Wnioski

W ramach niniejszego badania dokonano weryfikacji wpływu wyboru rozkładu statystycznego zmian oczekiwanej długości życia na wyznaczenie parametrów swapów (*longevity swap*) przenoszących ryzyko długowieczności. Weryfikacja ta została przeprowadzona metodą analityczną na podstawie danych dotyczących oczekiwanej długości życia dla świata publikowanych przez Bank Światowy (World Bank, 2021). Porównaniu zostały poddane parametry wyznaczone na podstawie rozkładów Cauchy'ego, normalnego,

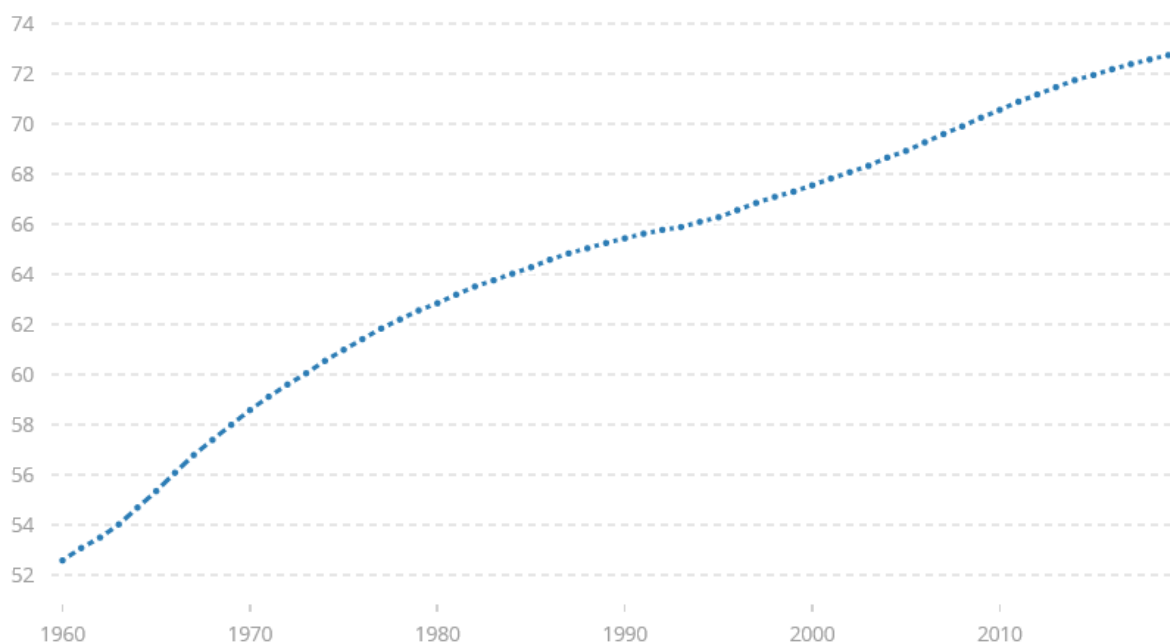
gamma oraz α -stabilnego. Co bardzo istotne, żaden z zastosowanych rozkładów statystycznych nie może zostać odrzucony jako nieistotny do opisu rozkładu zmiennej $z(i)$ na podstawie zastosowanego testu Anderson'a- Darling'a.

Wyniki prac potwierdzają, że wybór parametrów statystycznych oraz rozkładów do modelowania oczekiwanej długości życia jest znaczącym i kluczowym czynnikiem wpływającym na ustalenie parametrów instrumentów finansowych opartych o wskaźniki długowieczności. Wyniki prac wskazują także na ułomności metody analitycznej i nie pozwalają jednoznacznie stwierdzić, zastosowanie którego z badanych rozkładów do opisu zmiennej $z(i)$ da w długim terminie bardziej optymalne wyniki.

Dalsze prace badawcze w tym zakresie powinny dotyczyć weryfikacji zastosowania złożonych modeli stochastycznych do uchwycenia efektu kohorty czy siły zmian oczekiwanej długości życia (Cairns i in., 2006) oraz zastosowania modelu typu łączonego (*ang. p-spline models*), tak jak ma to miejsce m.in. w badaniach Cairns i in. (2006) oraz Barrieu i in. (2012).

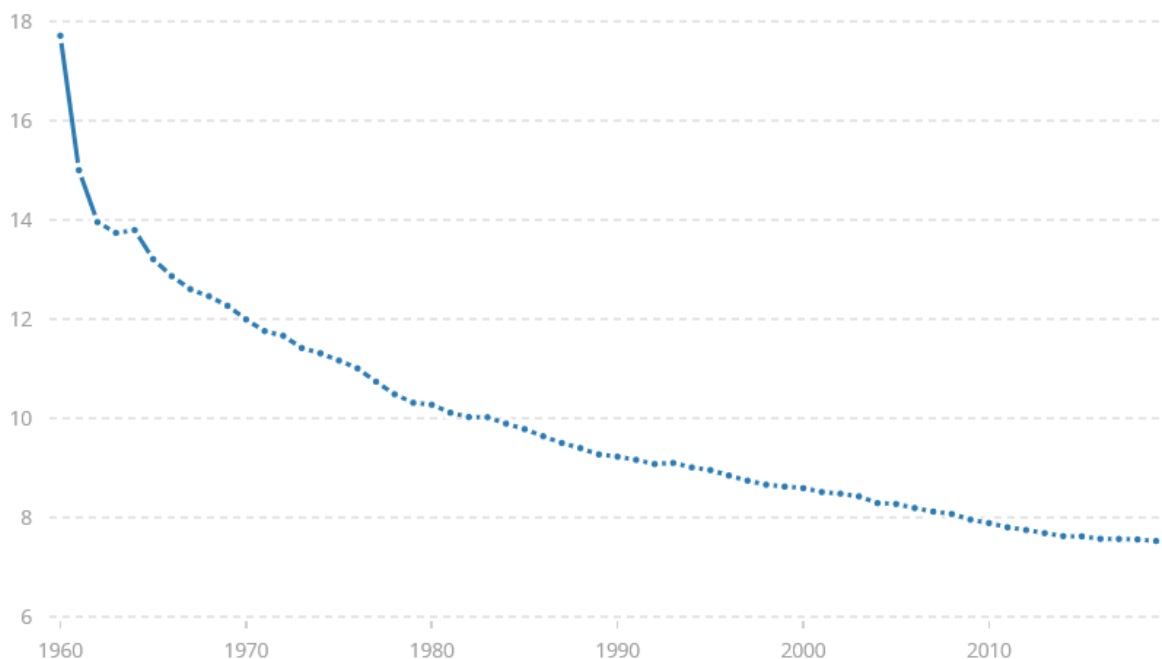
Otrzymane wyniki mogą wskazywać także na przyczyny związane ze stosunkowo niskim rozwojem rynku instrumentów finansowych przenoszących ryzyko długowieczności, jakim niewątpliwie są trudności związane z modelowaniem parametrów transakcji przenoszących to ryzyko.

Załącznik



Rysunek 5. Oczekiwana długość życia w chwili urodzenia, ogółem (lata)

Źródło: (World Bank, 2021).



Rysunek 6. Śmiertelność ogółem na 1000 mieszkańców

Źródło: (World Bank, 2021).

Bibliografia

Adamska-Mieruszewska, J. (2019). *Ryzyko długowieczności. Znaczenie dla stabilności systemów emerytalnych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.

Artemis. (2021). Pobrano z: <https://www.artemis.bm/deal-directory/>, dostępne na dzień 24.10.2021.

Atance, D., Debón, A., Navarro, E.A. (2020). Comparison of Forecasting Mortality Models Using Resampling Methods. *Mathematics*, 8, 1550. DOI: <https://doi.org/10.3390/math8091550>

Bartkowiak, M. (2011). *Transfer ryzyka długowieczności*. *Polityka Społeczna*, 3, Problemy zabezpieczenia emerytalnego w Polsce i na świecie. 2, 22-34.

Basel Committee on Banking Supervision, (2013), *Longevity risk transfer markets: market structure, growth drivers and impediments, and potential risks*. Basel Committee on Banking Supervision Joint Forum, Pobrano z: <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwim2-6K1fLzAhW3AxAIHaBTDUkQFnoECAMQAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.bis.org%2Fpubl%2Fjoint31.pdf&usg=AOvVaw3Q4q0ZreF8St9I9to-QbB8>, dostępne na dzień 24.10.2021

Barrieu, P., Bensusan, H., El Karoui, N., Hillairet, C., Loisel, S., Ravanelli, C., Salhi, Y. (2012), Understanding, modelling and managing longevity risk: key issues and main challenges. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012:3, 203-231, <https://doi.org/10.1080/03461238.2010.511034>

Biffis, E., Blake, D. (2010). Securitizing and tranching longevity exposures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46, 186-197, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.06.007>

Biffis, E., Blake, D. (2013). Informed intermediation of longevity exposures. *Journal of Risk and Insurance*, 80, 559–584. LINK: <http://www.jstor.org/stable/24548066>

Blake, D., Cairns, A.J.G. (2021). Longevity risk and capital markets: The 2019-20 update. *Insurance: Mathematics and Economics*, 99, 395-439, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2021.04.001>.

Blake, D., Cairns, A.J.G. (2020). Longevity risk and capital markets: The 2018-19 update. *Annals of Actuarial Science*, 14, pp. 219-261, <https://doi.org/10.1017/S1748499520000202>

Brouhns, N., Denuit, M., van Keilegom, I. (2005). Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 3: 212-224, <https://doi.org/10.1080/03461230510009754>

Cairns, A.J.G., Blake, D., Dowd, K. (2006). A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: theory and calibration. *Journal of Risk & Insurance*, 73(4): 687-718, <https://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x>

CBonds. (2021). Pobrano z: <https://cbonds.pl/indexes/8017/>, dostępne na dzień 24.10.2021

Duczkowski, N. (2021a). Zastosowanie rozkładu α -stabilnego do modelowania zmian cen ubezpieczeń. *Wiadomości Ubezpieczeniowe*, (2), 109–128. <https://doi.org/10.33995/wu2021.2.7>.

Duczkowski, N. (2021b). Wykorzystanie finansów behawioralnych do opisu wybranych zjawisk na polskim rynku ubezpieczeniowym. *Zeszyty Naukowe Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego w Zielonej Górze*, 15, s. 84-102. <https://doi.org/10.26366/PTE.ZG.2021.205>

Hull, J.C. (2011). *Zarządzanie ryzykiem instytucji finansowych*, tłum. B. Sałbut, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011.

Jakubowska, A. (2018). Starzenie się zasobów pracy w Polsce- analiza konsekwencji. *Zeszyty Naukowe Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego w Zielonej Górze*, 5(8), 68-82. Pobrano z: <https://journal.ptezg.pl/pl/zeszyty-naukowe/zeszyt-8/arttykul-5.html>, dostępne na dzień 24.10.2021.

Lee, R. D., Carter, L. (1992). Modelling and forecasting the time series of us mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419): 659–671. <https://doi.org/10.1080/01621459.1992.10475265>

Murkowski, R. (2017). Wyzwania i perspektywy demograficzne państw europejskich. *Zeszyty Naukowe Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego w Zielonej Górze*, 4(6), 112-123. Pobrano z: <https://journal.ptezg.pl/pl/zeszyty-naukowe/zeszyt-6/arttykul-11.html>, dostępne na dzień 24.10.2021.

Ojrzyńska, A. (2013). Rodzina modeli Lee-Cartera, *Studia Ekonomiczne (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach)*, 162, 99-106, Pobrano z: <http://bazekon.icm.edu.pl/bazekon/element/bwmeta1.element.ekon-element-000171271457>, dostępne na dzień 24.10.2021.

Pension Research Council. (2021). Pobrano z: <https://pensionresearchcouncil.wharton.upenn.edu/blog/new-financial-instruments-for-managing-longevity-risk/>, dostępne na dzień 24.10.2021.

Renshaw, A. E., Haberman, S. (2003), On the forecasting of mortality reduction factors. *Insurance, Mathematics and Economics*, 32(3): 379-401, [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(03\)00118-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(03)00118-5)

Renshaw, A.E., Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance. Mathematics and Economics*, 38(3): 556-570, <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.12.001>

Szczepański, M. (2014). Zarządzanie ryzykiem długowieczności w polskim systemie emerytalnym. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego*, 802, Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia, 65, 731-744, Pobrano z: <http://bazekon.icm.edu.pl/bazekon/element/bwmeta1.element.ekon-element-000171359751>, dostępne na dzień 24.10.2021.

Śliwiński, A. (2019). *Rola ubezpieczeń w gospodarce*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza SGH.

World Bank. (2021). Pobrano z: <https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.IN?end=2019&start=1960&view=chart>, dostępne na dzień 24.10.2021.

Wang, Z., Li, J.S.H. (2016). A DCC-GARCH multi-population mortality model and its applications to pricing catastrophic mortality bonds. *Finance Research Letters*, 16(C), 103-111, <https://doi.org/10.1016/j.frl.2015.10.004>

Zhou, K.Q., Li, J.S.H. (2021). Longevity Greeks: what do insurers and capital market investors need to know? *North American Actuarial Journal*, 25:1, 66-96, <https://doi.org/10.1080/10920277.2019.1650283>

Zawadzka, Z. (1999). *Ryzyko bankowe- uwagi ogólne*, w: Jaworski, L., *Współczesny bank*, Poltext, Warszawa

Zeddouk, F., Devolder, P. (2019), *Pricing of Longevity Derivatives and Cost of Capital*, *Risks*, 7, 41, <https://doi.org/10.3390/risks7020041>