

*Alina Kalinowska*

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie  
alina.kalinowska@uwm.edu.pl

*Adam Stański*

Intel Technology Poland, Gdańsk

## Po co matematykom Jan Jakub Rousseau?

### Summary

#### Why do mathematicians need Jean-Jacques Rousseau?

One day, Jean-Jacques Rousseau, who was known mainly as a philosopher and a pedagogue, told a deer hunting story. In doing so, he managed to play a small role in the development of the branch of maths called 'game theory'. Later his story was converted into a game. Initially game theory was used to explain exchange in the field of economics. Over time, the mathematical modeling was found to be useful in the social sciences. A game theory describes diverse and cognizant participants forced to make decisions. In regards to the game based on cooperation, a choice is at the same time a dilemma. It can be viewed as a moral or philosophical predicament and in addition it gives an inside into the human psyche and behaviour. Game theory has the potential to offer an attractive mathematical model, useful in analyzing social interactions. Though currently unappreciated by pedagogy, it has the potential to be successfully used in pedagogical studies analyzing conflict of interest of all participants in an educational process.

**Słowa kluczowe:** teoria gier, gry rywalizacyjne, gry kooperacyjne, równowaga Nasha, optimum Pareto

**Keywords:** Game Theory, Competitive game, Cooperative games, Nash equilibrium, Pareto efficiency

Teoria gier jest dość intensywnie rozwijającym się działem matematyki. Związana jest z badaniem relacji między inteligentnymi, racjonalnymi bytami, opisuje sytuacje, w jakich biorą udział podmioty podejmujące decyzje w sposób świadomy. Gry mogą dotyczyć ludzi w kontekście strategii tworzonych przez każdego z nich, ale również nietypowych graczy, którymi mogą być automat czy gra komputerowa. Wiele dyscyplin naukowych opisuje sytuacje, w których trzeba podejmować decyzje. Można je opisać jako gry, które skupiają się na aspekcie zysku i strat. Teoria gier może służyć pomocą w badaniu koncepcji rodem z takich dziedzin, jak moralność, filozofia czy badanie ludzkich zachowań (Deulofeu 2012: 39), ponieważ zajmując się samymi grami, również je analizuje i korzysta z wniosków do rozwiązywania problemów związanych z konkurencją i współpracą

w warunkach konfliktu (Deulofeu 2012: 91). Jest to dział matematyki, zajmujący się optymalizacją zachowań w sytuacjach konfliktu interesów.

„Narodziny” teorii gier łączy się z ukazaniem w połowie XX wieku monografii dwóch autorów Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna pod tytułem *Teoria gier i postępowanie ekonomiczne*. Z czasem jednak wielu innych autorów dostrzegło elementy tej teorii w dziełach niektórych, nawet starożytnych filozofów (Małowski i in. 2004: 12). Swój wkład miał również Jan Jakub Rousseau, który był autorem pewnej historii nazwanej *Polowanie na jelenia*, która stała się później grą. Jest ona prototypem umowy społecznej. W 1762 roku Rousseau opowiedział następującą historię: „Polujący na jelenia myśliwi są w pełni świadomi, że aby go upolować, muszą być lojalni wobec siebie i pozostać na swoich posterunkach. Jeżeli jednak zając przebiegnie w pobliżu jednego z nich, nie ma wątpliwości, że myśliwy ten ruszy za pewną zdobyczą, doprowadzając do fiaska polowanie na jelenia” (Skyrms 2004:1). Historia stworzona przez Rousseau pozostawiła wiele otwartych pytań, na przykład o wartości za zająca i indywidualne udziały za jelenia, aby polowanie było określone jako sukces. Równie interesujące jest pytanie o prawdopodobieństwo sukcesu polowania, gdy wszyscy myśliwi będą wierni zasadzie łapania jelenia (Skyrms 2004:1).

Rozwój teorii gier przebiegał od formalnej analizy gier hazardowych do narzędzia analizy w wielu innych dziedzinach nauki. Wynikająca z teorii gier analiza transakcyjna jest stosowana do opisu konfliktów politycznych i społecznych obok procesów ekonomicznych czy teorii ewolucji. W ostatnich latach obserwuje się istotny wzrost powiązań między teorią gier, a takimi dziedzinami jak, psychologia, socjologia, antropologia, nauki polityczne czy informatyczne.

Gry czysto konkurencyjne (strategiczne) charakteryzują się tym, że przegrana jednego gracza oznacza zawsze wygraną drugiego. Są to gry o sumie zerowej, a ich przykładem są szachy lub każda rywalizacja o jakieś unikatowe dobra. Są sytuacjami, w których zawsze, gdy jeden gracz zyskuje, to drugi traci. Cele graczy są tu całkowicie sprzeczne. Każdy próbuje zwiększyć swoje zyski, zmniejszając korzyści drugiego. Większe zastosowanie w rzeczywistości społecznej mogą mieć gry, w których „będzie występować napięcie między rywalizacją a współpracą” (Deulofeu 2012: 113). Gry kooperacyjne (nie są grami o sumie zerowej) opisują na przykład wymiany ekonomiczne, w których zyskać mogą wszyscy gracze. Są to sytuacje, gdy wygrane jednego i przegrane drugiego nie są sprzężone bezpośrednio i możliwe jest, że obaj gracze mają korzyści. Podjęcie decyzji staje się dylematem (Deulofeu 2012: 113). W rzeczywistym świecie znacznie częściej zdarzają się gry naznaczone właśnie *dylematem* wyboru strategii. Pojawia się on wówczas, gdy jeden z graczy podejmuje decyzję o konfrontacji, a drugi chce współpracować. Ten pierwszy wybór powoduje większy wzrost korzyści niż w przypadku współpracy, ale tylko dla tego gracza, który chce konfrontacji. Tu w sposób oczywisty pojawia się dylemat (Deulofeu 2012: 114).

Znanym przykładem takiej gry jest *dylemat więźnia*, której autorem jest A.W. Tucker. Jest to sytuacja, w której dwaj mężczyźni A i B zostają złapani jako podejrzani o dokonana-

nie napadu. Nie mogą się kontaktować, ponieważ przebywają w osobnych celach i żaden nie wie, jakie decyzje podejmuje drugi. Tabela wypłat przedstawia okres czasu, który może być wyrokiem więzienia dla każdego z nich. W początkowej wersji *dylemat więźnia* miał następującą postać: „Jeśli A się przyzna, a B nie, to A dostanie wyrok jednego roku więzienia (Crilly 2009: 245), za to B dostanie 10 lat. Jeśli A się nie przyzna, a B tak, poprzednia sytuacja zostanie odwrócona. Jeśli obaj się nie przyznają, dostaną solidarnie po cztery lata, ale jeśli żaden się nie przyzna i obaj zechcą powoływać się na swoją niewinność, zostaną wypuszczeni na wolność” (Crilly 2009: 245). W późniejszym czasie dylemat został doprecyzowany, żeby lepiej pokazać problem, który przymusza ludzi do zachowania optymalnego. Obecnie założenie brzmi nieco inaczej: „Jeśli A się przyzna, a B nie, to A dostanie wyrok jednego roku więzienia, za to B dostanie 5 lat. Jeśli A się nie przyzna, a B tak, poprzednia sytuacja zostanie odwrócona. Jeśli obaj się nie przyznają, dostaną solidarnie po jednym roku, ale jeśli żaden się nie przyzna i obaj zechcą powoływać się na swoją niewinność, zostaną wypuszczeni na wolność”.

Tabela wypłat byłaby wówczas następująca:

Tabela 1. Wypłaty w grze *dylemat więźnia*

A \ B	Kooperuje	Odmawia zeznań
Kooperuje	A – 1, B – 1	A – 0, B – 5
Odmawia zeznań	A – 5, B – 0	A – 2, B – 2

Źródło: opracowanie własne.

*Dylemat więźnia* przedstawiany jako jedna z najważniejszych gier niekooperacyjnych. Obaj mężczyźni są osadzeni w osobnych celach i nie mogą się porozumieć. Poza tym dla każdego z nich najlepszą strategią jest zdradzić drugiego.

Równowaga Nasha to jedno z najważniejszych pojęć w teorii gier. Ma ona miejsce wówczas, gdy strategia każdego gracza jest najlepszą odpowiedzią na strategię pozostałych graczy (Malawski i in. 2004: 30). Jest to sytuacja, w której zmiana strategii dowolnego pojedynczego gracza prowadzi do pogorszenia jego wyniku. W ten sposób bez kooperacji wielu graczy nie jest możliwa zmiana strategii. Pojęcie równowagi Nasha zachodzi między graczami wówczas, gdy „każdy z nich podejmuje decyzje, które są najlepsze dla siebie przy uwzględnieniu decyzji pozostałych graczy” (Stewart 2014: 308). Równowaga Nasha związana jest z optymalną strategią, w której każdy z graczy wybiera najlepszą dla niego strategię ale rozwiązanie jest wspólne dla obu graczy. W *Dylemacie więźnia* mamy do czynienia z klasycznym przykładem takiej sytuacji. Największy zysk ma ten gracz, który zdradzi, choć kooperując mogliby również osiągnąć nagrodę (niestety mniejszą, ale obaj). Złożoność takich sytuacji łączy matematykę z psychologią, a wybory każdego z graczy mogą odwoływać się do zasad moralnych. *Dylemat więźnia* ma punkt równowagi Nasha w sytuacji, gdy obaj więźniowie się zdradzą.

Optymalność w sensie Pareto, to taki stan, dla którego nie istnieje żaden inny wybór korzystniejszy dla wszystkich graczy (Malawski i in. 2004: 59). Optimum Pareto ma miejsce wówczas, gdy nie jest możliwa taka relokacja zasobów, która zwiększy dobrobyt ekonomiczny pewnej jednostki bez jednoczesnego zmniejszenia dobrobytu innej jednostki. Mówi o kooperacji, ponieważ dojście do stanu równowagi w sensie optimum Pareto nie jest możliwe bez współpracy i pewnej dozy zaufania. Wypracowanie takiego stanu równowagi czytelnie opisuje przykład dwóch mężczyzn Kowalskiego i Malinowskiego. Pierwszy ma tylko pewien zasób chleba a drugi wody. Najlepszym rozwiązaniem dla obu będzie wzajemna wymiana dóbr według jakichś określonych zasad. Jednak musi nastąpić taki moment, w którym żaden nie będzie już chciał uszczuplać własnych zasobów, ponieważ ma własne potrzeby. Jeśli wówczas doszłoby do takiej wymiany, każdy z nich zażąda większej zapłaty za bochenek chleba lub kubek wody niż dotychczas. „W ten sposób osiągnięty został punkt optimum w sensie Pareto. Jeżeli bowiem chcielibyśmy Kowalskiemu dać kolejny kubek wody, to musielibyśmy zmusić Malinowskiego do wymiany, pogarszając tym samym jego sytuację (albowiem, gdyby jego sytuacja miała się poprawić, to do wymiany doszłoby dobrowolnie)”<sup>1</sup>.

*Dylemat więźnia* ma punkt równowagi Nasha w sytuacji, gdy obaj więźniowie się zdradzają. Trudno jest osiągnąć optymalny punkt zysków. Nawet gdy sobie ufają to i tak większe korzyści są wówczas, gdy zdradzają. Optimum Pareto *dylematu więźnia* odnosi się do strategii kooperacji, do której jednak nie dochodzi, gdyż każdemu z więźniów opłaca się zdradzić współwięźnia.

*Polowanie na jelenia* należy natomiast do gier kooperacyjnych, w których istotne jest zaufanie graczy do siebie. Tego typu gry związane są często z umowami społecznymi, w których wybór strategiiznaczony jest raczej wyborem najlepszym dla wszystkich graczy, choć nie zawsze indywidualnie najlepiej *opłaconym*. W grze *Polowanie na jelenia* istotne dla graczy jest wzajemne zaufanie. Dwóch myśliwych, którzy wybrali się na polowanie, może polować albo na jelenia, albo na zająca. Podejmują oni jednakże swój wybór niezależnie. Co więcej, jelenia można upolować jedynie współpracując, natomiast zająca można upolować samodzielnie, ale dwa zające są mniej wartościowe od jelenia.

Tabela 2. Wyplaty w grze *polowanie na jelenia*

A \ B	Jeleń	Zając
Jeleń	A – 2, B – 2	A – 0, B – 1
Zając	A – 1, B – 0	A – 1, B – 1

Źródło: opracowanie własne.

Analizując przykładowe *wyplaty* z powyższej tabeli, można zauważyć, że są tu dwa punkty równowagi Nasha (kooperacja oraz samodzielne działanie), z których jeden jest również optymalny w sensie Pareto. Tu już nie ma przeciwwskazań dla strategii koopera-

<sup>1</sup> [https://pl.wikipedia.org/wiki/Optimum\\_Pareto](https://pl.wikipedia.org/wiki/Optimum_Pareto), 6.12.2015.

cyjnej. Jeśli kooperują ze sobą, to obaj otrzymają większą nagrodę (*wypłatę*). B. Skyrms zauważa, że w przypadku wielu graczy równowaga jest trudniejsza do zachowania, ponieważ kwestia zaufania się mnoży (Skyrms 2004: 9).

Analogia gier jako problemów społecznych jest niedoceniana. W literaturze można znaleźć przykłady zastosowania teorii gier do analizy rzeczywistości społecznej. B. Skyrms zwraca uwagę, że w teorii umów społecznych warunki wyjściowe muszą być oparte na równowadze. W innym przypadku nie miałyby sensu współpraca. Idea wspólnego polowania jest prastarą społeczną umową (Skyrms 2004: 9). Z perspektywy teorii gier politolog Steve Brams analizował Biblię, a rolę gracza pełnił w kilku przypadkach Pan Bóg (Brams, za: M. Maławski i In. 2004: 13). Innym przykładem istnienia związku teorii gier z naukami społecznymi może być badanie relacji społecznych przez E. Berne'a. Opisuje on podejmowane w kontaktach społecznych gry i określa je teorią stosunków społecznych. Choć odcina się od korzystania z modeli matematycznych teorii gier, wyraźnie wskazuje na to źródło inspiracji, odwołując się do wspólnych obu koncepcjom terminów (Berne 2004: 6).

Obecnie zakłada się, że najbliższe lata zbliżą teorię gier do rzeczywistości przez tworzenie bardziej dokładnych modeli do opisywania i tłumaczenia zasad i motywów postępowania ludzkiego (Maławski i in. 2004: 196). W tym kontekście użycie i analiza gier w edukacji może mieć duże znaczenie w rozwijaniu umiejętności radzenia sobie z konfliktami dążeń i interesów poszczególnych podmiotów procesu edukacyjnego.

## Literatura

- Berne E. (2004), *W co grają ludzie. Psychologia stosunków międzyludzkich*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Crilly T. (2009), *50 teorii matematyki, które powinieneś znać*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN SA.
- Deulofeu J. (2012), *Dylematy więźniów i zwycięskie strategie. Teoria gier*. Toruń, BUA Books.
- Maławski M. (2004), Wieczorek A., Sosnowska H., *Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych*. Wyd. II, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN SA.
- Skyrms B. (2004), *The Stag Hunt and the Evolution of Social structure*. University of Cambridge.
- Stewart I. (2014), *Matematyka życia. Jak równania pomagają odkrywać tajemnice natury*. Warszawa, Prószyński Media Sp. z o.o.