

PAWEŁ DYKAS¹, TOMASZ MISIAK²NEOKLASYCZNY MODEL WZROSTU GOSPODARCZEGO
Z SINUSOIDALNYMI INWESTYCJAMI³

1. WPROWADZENIE

Celem prezentowanego artykułu jest próba rozszerzenia neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa poprzez uwzględnienie fluktuacji inwestycji. Autorzy uchylając założenie o stałości stóp inwestycji wprowadzają funkcję inwestycji zależną sinusoidalnie od czasu. Przyjęcie sinusoidalnej funkcji inwestycji tłumaczyć można tym, iż inwestycje (podobnie jak produkcja) w dużej mierze zależne są od koniunktury gospodarczej, która podlega okresowym fluktuacjom. W rozważaniach teoretycznych autorzy wprowadzają ponadto pojęcia cyklicznej oraz gładkiej ścieżki czasowej kapitału oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy oraz wyznaczają ich względne odchylenia. Za pomocą tych narzędzi identyfikują wpływ inwestycji zależnych sinusoidalnie od czasu na ścieżki wzrostu kapitału oraz produktu w analizowanym modelu.

W części empirycznej dokonano kalibracji parametrów otrzymanego modelu oraz symulacji numerycznej. Bazując na danych panelowych dla krajów grupy UE15 w latach 2000–2013 w pierwszej kolejności oszacowano parametr α (elastyczność produkcji względem kapitału) na poziomie 0,349, którego wartość przyjęto do dalszych analiz numerycznych. W drugim etapie dokonano symulacji numerycznych skalibrowanych odchyleń cyklicznych od gładkich ścieżek czasowych kapitału oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy. W analizach numerycznych rozważano wpływ różnych stóp inwestycji (15%, 20%, 25%) oraz okresów wahań cyklicznych (4 lub 10 lat) na kształtowanie się owych odchyleń. Analiz numerycznych dla gospodarek grupy UE15 dokonano w 100 letnim horyzoncie czasowym.

Struktura artykułu przedstawia się następująco. W części drugiej zawarto przegląd literatury dotyczący inwestycji oraz różnych rozwinięć neoklasycznego modelu wzrostu Solowa. W części trzeciej przedstawiono główne założenia oraz wyznaczono

¹ Uniwersytetu Jagielloński, Wydział Zarządzania i Komunikacji Społecznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, ul. Prof. Stanisława Łojasiewicza 4, 30-348 Kraków, Polska.

² Politechnika Rzeszowska, Wydział Zarządzania, Katedra Ekonomii, Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: tmisiak@prz.edu.pl.

³ Autorzy pragną podziękować anonimowym Recenzentom za cenne merytoryczne uwagi zgłoszone do pierwotnej wersji niniejszego artykułu. Oczywiście, cała odpowiedzialność za ewentualne mankamenty spada wyłącznie na autorów.

ścieżki wzrostu zarówno kapitału jak i produktu na jednostkę efektywnej pracy a także wyznaczono względne odchylenia cyklicznych od gładkich ścieżek wzrostu w analizowanym modelu z sinusoidalnymi inwestycjami. W czwartej części artykułu zawarto kalibrację parametrów otrzymanego modelu oraz przeprowadzono symulacje numeryczne w zaproponowanych wariantach. W ostatniej części artykułu znajduje się podsumowanie prowadzonych rozważań oraz ważniejsze wnioski.

2. PRZEGLĄD LITERATURY

Wzrost gospodarczy jest procesem długookresowym, prowadzącym do powiększenia potencjału produkcyjnego a szeroko rozumiane inwestycje stanowią jeden z kluczowych czynników tego procesu. Przyczynia się on również do zaspokojenia potrzeb społeczeństwa. W literaturze przedmiotu rozróżnia się podział modeli wzrostu gospodarczego między innymi na modele keynesowskie, neoklasyczne, modele wzrostu endogenicznego oraz modele realnego cyklu koniunkturalnego (por. Tokarski, 2005). Można również, ze względu na sposób ustalania długookresowej stopy wzrostu, wyróżnić modele wzrostu: egzogenicznego, endogenicznego oraz heterodoksyjne (Malaga, 2015). Jednak zdaniem Malagi współczesna teoria wzrostu gospodarczego w niewielkim stopniu korzysta z dorobku keynesowskiej teorii wzrostu a u jej podstaw nadal pozostają modele neoklasyczne (Malaga, 2009). Koncepcja zaproponowana przez Solowa (1956) dała niejako przyczynek do rozwoju neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego. Solow zakładał m.in. stałe przychody ze skali produkcji oraz malejącą krańcową produktywność kapitału (Solow, 1956). Model Solowa nazywany również modelem Solowa-Swana posiada wiele zalet jak i wad. Do podstawowych zalet najczęściej zalicza się: łatwość wykorzystania matematycznych funkcji produkcji, możliwość badania udziału czynników produkcji we wzroście – zwłaszcza postępu technicznego oraz produktywności pracy, a także jego użyteczność do analiz procesów konwergencji realnej. Główne słabości modelu to przede wszystkim egzogeniczne traktowanie całości postępu technicznego, pominięcie takich czynników jak kapitał ludzki oraz kwestii rosnących korzyści skali co może powodować, że w przypadku niektórych inwestycji bodźce do inwestowania nie wygasają (szerzej na temat wad oraz krytyki modelu Solowa patrz np. Milo i inni, 2006 lub McCombie, 2000, 2001).

Mimo wielu słów krytyki w literaturze można znaleźć wiele opracowań dotyczących samego modelu Solowa (1956) jak i jego uogólnień. Mankiw i inni (1992) uogólnili model Solowa. Zasadnicza różnica między oryginalnym modelem Solowa, a jego rozszerzeniem zaproponowanym przez Mankiwa, Romera, Weila polega na tym, iż autorzy uwzględniają dodatkowy zasób kapitału, a mianowicie kapitał ludzki (Mankiw i inni, 1992; Romer, 2000). W roku 1996 Nonneman oraz Vanhoudt dokonali kolejnego uogólnienia modelu Solowa. W swojej pracy autorzy rozważają dowolną, skończoną liczbę dóbr kapitałowych, będących czynnikami produkcji (Nonneman, Vanhoudt, 1996). Kolejne rozszerzenia znaleźć można w artykule Dykasa, Sulimy i Tokarskiego, autorzy dowodzą istnienie stabilnego punktu stacjonarnego, w którym

model ten znajduje się w stanie długookresowej równowagi (Dykas i inni, 2008). Ponadto w opracowaniu Dykasa, Edigariana oraz Tokarskiego szczególny przypadek funkcji produkcji, jaką jest funkcja produkcji Cobba-Douglasa, zastąpiony został uogólnioną, neoklasyczną funkcją produkcji (Dykas i inni, 2011).

Inne rozszerzenie modelu Solowa można znaleźć w pracy Mroczek i inni (2014). Autorzy rozpatrują model wzrostu gospodarczego uwzględniając efekt grawitacyjny, będący nawiązaniem do prawa grawitacji Newtona. Zakładają, że regiony wzajemnie oddziałują na siebie gospodarczo oraz, iż ten efekt jest proporcjonalny do potencjału (np. PKB *per capita*, kapitału rzeczowego *per capita* itp.) danego regionu i odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości między nimi (rozumianej jako fizyczna odległość między stolicami regionów). W opracowaniu wykazano również, że model ten ma stabilny (w sensie Lapunowa) punkt stacjonarny jest on zatem punktem długookresowej równowagi modelu (Mroczek i inni, 2014).

Większość dotychczasowych uogólnień modelu Solowa skoncentrowanych było na wprowadzeniu różnych rodzajów kapitału bądź analizie istnienia i jednoznaczności stanów stacjonarnych. W niniejszym artykule zaproponowano inny kierunek uogólnienia modelu Solowa, będący próbą uwzględnienia fluktuacji inwestycji. W teorii ekonomii zauważyć można bowiem utrzymujący się stan dychotomii między teorią wzrostu gospodarczego oraz teorią fluktuacji gospodarczych, co stanowi jeden z kluczowych dylematów wzrostu i rozwoju (Malaga, 2015). Z analizy danych takich wielkości agregatowych jak PKB, konsumpcji, zatrudniania oraz inwestycji wynika, iż ich trajektorie wzrostu nie są obrazem równomiernych ścieżek wzrostu lecz charakteryzują się okresowymi wahaniami. Przy czym okazuje się, iż to właśnie inwestycje są bardzo wrażliwe na zmiany sytuacji koniunkturalnej. Rzecz jasna: przyczyny owych wahań, amplitudy wahań, przebieg cykli, sprzężenia zwrotne, efekty mnożnikowe oraz akceleracji są przedmiotem badań szeroko rozumianej teorii wahań koniunkturalnych, której pogłębiona analiza jest zdecydowanie bogatsza niż przyjęte w niniejszym artykule założenie o cyklicznych waniach stóp inwestycji. (por. np. Maussner, 1994; Romer, 2000). Jednak kwestie te, ze względu na zakres ww. zagadnień oraz przyjęty cel artykułu nie będą szerzej analizowane.

3. MODEL

W rozważanym modelu przyjmuje się następujące założenia:

- 1) Proces produkcyjny opisuje funkcja produkcji Cobba-Douglasa (1928)⁴ dana wzorem (por. też Żółtowska, 1997 lub Tokarski, 2009; 2011)⁵:

⁴ Warto wspomnieć, iż analizowana funkcja produkcji została sformułowana przez Knuta Wicksella (Wicksell, 1893), a empirycznie przetestowana przez Paula H. Douglasa oraz Charlesa W. Cobba (Cobb, Douglas, 1928).

⁵ O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych zakłada się, iż są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ oznaczał będzie dalej wartość zmiennej x w momencie t ,

$$Y(t) = (K(t))^\alpha (E(t))^{1-\alpha}, \quad (1)$$

gdzie $\alpha \in (0;1)$. Y oznacza strumień produktu, K , E – nakłady kapitału i tzw. jednostki efektywnej pracy, zaś α – elastyczność wytworzonego w gospodarce produktu względem nakładów kapitału⁶.

- 2) Przyrost zasobu kapitału, podobnie jak w modelu Solowa-Swana (1956), opisuje równanie różniczkowe postaci:

$$\dot{K}(t) = s(t)Y(t) - \delta K(t), \quad (2)$$

gdzie $\delta \in (0;1)$. $s(t) \in (0;1)$ oznacza stopę inwestycji w momencie t , δ zaś – stopę deprecjacji kapitału. O ile jednak w modelu Solowa zakłada się, że s i δ są stałe w czasie, o tyle w prezentowanym modelu wzrostu gospodarczego przyjmuje się, iż stopa inwestycji podlega cyklicznym, sinusoidalnym fluktuacjom opisanym przez równanie (3).

- 3) Stopę inwestycji w każdym momencie t określa sinusoida o stałej amplitudzie i okresie wahań dana wzorem:

$$s(t) = \bar{s} + \theta \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right), \quad (3)$$

gdzie \bar{s} , $(\bar{s} \pm \theta) \in (0;1)$ oraz θ , $\omega > 0$. \bar{s} w równaniu (3) oznacza przeciętną stopę inwestycji w cyklu inwestycyjnym, θ – amplitudę wahań cyklicznych stopy inwestycji, natomiast ω – okres owych wahań.

- 4) Jednostki efektywnej pracy E rosną według stopy wzrostu $g + n$, gdzie $g > 0$ jest stopą egzogenicznego postępu technicznego w sensie Harroda, zaś $n > 0$ stopą wzrostu liczby pracujących. Dlatego też⁷:

$$E(t) = E_0 e^{(g+n)t} \Rightarrow \dot{E}(t)/E(t) = g + n, \quad (4)$$

gdzie $E_0 > 0$ oznacza liczbę jednostek efektywnej pracy (rozumianej jako zasób wiedzy naukowo-technicznej ważony liczbą pracujących) w momencie $t = 0$.

Niech $y_E = Y/E$ oraz $k_E = K/E$ oznaczają (odpowiednio) strumień produktu i zasób kapitału na jednostkę efektywnej pracy, zaś $y = Y/L$ oraz $k = K/L$ – wydajność pracy i techniczne uzbrojenie pracy. Wówczas:

$$y(t) = A_0 e^{gt} y_E(t), \quad (5)$$

zaś $\dot{x}(t) = dx/dt$ – pochodną zmiennej x po czasie t , czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie t .

⁶ A zatem $1 - \alpha$ jest wówczas udziałem nakładów efektywnej pracy E w produkcji Y .

⁷ Ponieważ jednostki efektywnej pracy E w modelu Solowa są iloczynem egzogenicznej technologii A i liczby pracujących L , zatem zależność (4) można zapisać również następująco: $E(t) = A_0 e^{gt} L_0 e^{nt}$, gdzie $A_0 > 0$ i $L_0 > 0$ oznacza (odpowiednio) zasób technologii i liczbę pracujących w momencie $t = 0$.

$$k(t) = A_0 e^{gt} k_E(t), \quad (6)$$

$$Y(t) = L_0 e^{nt} y(t) \quad (7)$$

i:

$$K(t) = L_0 e^{nt} k(t). \quad (8)$$

Dzieląc funkcję produkcji (1) przez jednostki efektywnej pracy $E > 0$ dochodzi się do funkcji produkcji w postaci intensywnej określonej przez równanie:

$$y_E(t) = (K(t)/E(t))^\alpha = (k_E(t))^\alpha. \quad (9)$$

Funkcja (9) opisuje relacje pomiędzy nakładami kapitału na jednostkę efektywnej pracy k_E a wielkością produkcji na jednostkę owej pracy, czyli y_E .

Ponieważ kapitał na jednostkę efektywnej pracy można zapisać następująco: $k_E = K/E$, zatem (po zróżniczkowaniu powyższej zależności względem czasu t) mamy:

$$\dot{k}_E(t) = \frac{\dot{K}(t)E(t) - K(t)\dot{E}(t)}{(E(t))^2} = \frac{\dot{K}(t)}{E(t)} - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} k_E(t),$$

co wraz ze związkami (2–4) daje:

$$\dot{k}_E(t) = \left(\bar{s} + \theta \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right) \right) y_E(t) - \mu k_E(t), \quad (10)$$

przy czym $\mu = \delta + g + n > 0$ oznacza stopę ubytku kapitału na jednostkę efektywnej pracy. Równanie różniczkowe (10) jest odpowiednikiem równania Solowa w rozważanym w pracy modelu wzrostu gospodarczego.

Po wstawieniu funkcji produkcji w postaci intensywnej (9) do zależności (10) dochodzi się do następującego równania różniczkowego Bernoulliego:

$$\dot{k}_E(t) = \left(\bar{s} + \theta \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right) \right) (k_E(t))^\alpha - \mu k_E(t). \quad (11)$$

Równanie różniczkowe (11) posiada całą trywialną $k_E(t) = 0$ dla każdego $t \geq 0$ oraz pewną rodzinę całek nietrywialnych, którą niebawem znajdziemy⁸.

Z równania (11) wynika, że dla $k_E > 0$ zachodzi związek:

$$(k_E(t))^{-\alpha} \dot{k}_E(t) = \bar{s} + \theta \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right) - \mu (k_E(t))^{1-\alpha}. \quad (12)$$

⁸ Całka trywialna (jako nieciekawa zarówno z matematycznego, jak i ekonomicznego punktu widzenia) będzie dalej pomijana. Nietrywialna zaś całka owego równania wyznaczała będzie ścieżkę czasową (lub ścieżkę wzrostu) kapitału na jednostkę efektywnej pracy.

Niech dane będzie podstawienie Bernoulliego postaci:

$$q(t) = (k_E(t))^{1-\alpha}, \quad (13)$$

co powoduje, że:

$$\frac{\dot{q}(t)}{1-\alpha} = (k_E(t))^{-\alpha} \dot{k}_E(t). \quad (14)$$

Wstawiając związki (13)–(14) do równania różniczkowego (12) sprowadza się je do równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (względem q) danego wzorem:

$$\frac{\dot{q}(t)}{1-\alpha} = \bar{s} + \theta \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right) - \mu q(t),$$

które można przekształcić do zależności:

$$\dot{q}(t) = (1-\alpha)\bar{s} + (1-\alpha)\theta \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right) - (1-\alpha)\mu q(t). \quad (15)$$

Zapiszmy równanie jednorodne powstałe z równania (15) jako:

$$\dot{q}(t) = -(1-\alpha)\mu q(t), \quad (16)$$

Rozdzielając zmienne otrzymujemy

$$\ln(q(t)) = (1-\alpha)\mu t + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

co daje:

$$q(t) = C \cdot e^{-(1-\alpha)\mu t}, \quad (17)$$

a stąd po uzmiennieniu stałej oraz zróżniczkowaniu względem czasu t mamy:

$$\dot{q}(t) = \dot{C}(t)e^{-(1-\alpha)\mu t} - C(t)(1-\alpha)\mu e^{-(1-\alpha)\mu t}. \quad (18)$$

Wstawiając zależności (17) oraz (18) do związku (15) otrzymuje się:

$$C(t) = \int e^{(1-\alpha)\mu t} (1-\alpha)\bar{s} dt + \int e^{(1-\alpha)\mu t} (1-\alpha)\theta \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right) dt. \quad (19)$$

Stąd oraz z równania (17) otrzymujemy

$$q(t) = \frac{\bar{s}}{\mu} + (1-\alpha)\theta \frac{(1-\alpha)\mu \sin\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right) - \frac{2\pi}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega} t\right)}{(1-\alpha)^2 \mu^2 + \frac{4\pi^2}{\omega^2}} + F e^{-(1-\alpha)\mu t}. \quad (20)$$

Natomiast z równań (13) i (20) płynie wniosek, iż całkę równania różniczkowego (11) określa związek:

$$k_E(t) = \left(\frac{\bar{s}}{\mu} + (1-\alpha)\theta \frac{(1-\alpha)\mu \sin\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right) - \frac{2\pi}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right)}{(1-\alpha)^2 \mu^2 + \frac{4\pi^2}{\omega^2}} + F e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (21)$$

Stała całkowania F w równaniu (21) należy dobrać tak, by spełniony był warunek $k_E(0) = k_{E0} > 0$, gdzie k_{E0} jest zasobem kapitału na jednostkę efektywnej pracy w momencie $t = 0$. Dlatego też:

$$F = k_{E0}^{1-\alpha} + \frac{2\pi(1-\alpha)\theta}{(1-\alpha)^2 \mu^2 \omega + \frac{4\pi^2}{\omega}} - \frac{\bar{s}}{\mu}. \quad (22)$$

Równania (21)–(22) wyznaczają ścieżkę wzrostu kapitału na jednostkę efektywnej pracy w modelu Solowa z sinusoidalnymi stopami inwestycji.

Wstawiając ścieżkę czasową technicznego uzbrojenia pracy z równania (21) do funkcji produkcji w postaci intensywnej (9) mamy:

$$y_E(t) = \left(\frac{\bar{s}}{\mu} + (1-\alpha)\theta \frac{(1-\alpha)\mu \sin\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right) - \frac{2\pi}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right)}{(1-\alpha)^2 \mu^2 + \frac{4\pi^2}{\omega^2}} + F e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (23)$$

Równanie (23) określa zaś ścieżkę czasową produktu na jednostkę efektywnej pracy w rozważanym tu modelu wzrostu gospodarczego.

Wprowadźmy teraz dwa następujące pojęcia. Przez cykliczną ścieżkę czasową (lub ścieżkę wzrostu) pewnej zmiennej makroekonomicznej rozumiana będzie taka ścieżka wzrostu zmiennej x , która kształtuje się przy amplitudzie θ i okresie ω wahań stóp inwestycji większych od zera. Cykliczna ścieżka czasowa zmiennej x oznaczana będzie dalej przez $x(t)$. Natomiast przez gładką (acykliczną) ścieżkę wzrostu rozumiana będzie ścieżka wzrostu przy amplitudzie $\theta = 0$. Gładką ścieżkę wzrostu zmiennej x oznaczali będziemy dalej przez $\bar{x}(t)$.

Gładką ścieżkę wzrostu kapitału na jednostkę efektywnej pracy – zgodnie z zależnościami (21)–(22) – opisuje równanie:

$$\bar{k}_E(t) = \left(\frac{\bar{s}}{\mu} + \bar{F} e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (24)$$

gdzie stałą całkowania \bar{F} opisuje:

$$\bar{F} = k_{E0}^{1-\alpha} - \frac{\bar{s}}{\mu}. \quad (25)$$

Natomiast z równań (22) i (23) płynie wniosek, że gładka ścieżka wzrostu produktu na jednostkę efektywnej pracy dana jest wzorem:

$$\bar{y}_E(t) = \left(\frac{\bar{s}}{\mu} + \bar{F}e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (26)$$

przy czym stałą \bar{F} określa zależność (25).

Oznaczmy też przez $\kappa(t) = \frac{k_E(t) - \bar{k}_E(t)}{\bar{k}_E(t)}$ względne odchylenie cyklicznej ścieżki czasowej kapitału na jednostkę efektywnej pracy k_E od jej gładkiej ścieżki wzrostu \bar{k}_E , zaś przez $\gamma(t) = \frac{y_E(t) - \bar{y}_E(t)}{\bar{y}_E(t)}$ – względne odchylenie y_E od \bar{y}_E . Wówczas, po uwzględnieniu zależności (5–8), mamy:

$$\kappa(t) = \frac{k_E(t)}{\bar{k}_E(t)} - 1 = \frac{k(t)}{\bar{k}(t)} - 1 = \frac{K(t)}{\bar{K}(t)} - 1 \quad (27)$$

oraz:

$$\gamma(t) = \frac{y_E(t)}{\bar{y}_E(t)} - 1 = \frac{y(t)}{\bar{y}(t)} - 1 = \frac{Y(t)}{\bar{Y}(t)} - 1. \quad (28)$$

Z równań (27) i (28) płynie wniosek, że ścieżki κ i γ można nazywać względnymi odchyleniami (odpowiednio) kapitałowych i produkcyjnych cyklicznych ścieżek wzrostu od ich gładkich ścieżek wzrostu. Wstawiając zaś równania (21) i (24) do związku (27) oraz (23) i (26) do (28) mamy:

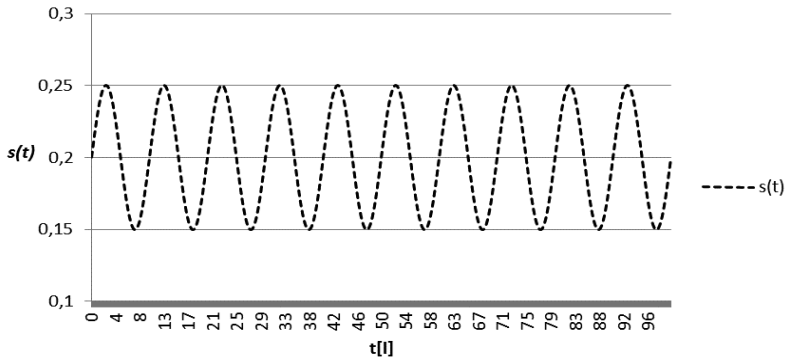
$$\kappa(t) = \left(\frac{\frac{\bar{s}}{\mu} + (1-\alpha)\theta \frac{(1-\alpha)\mu \sin\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right) - \frac{2\pi}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right)}{(1-\alpha)^2 \mu^2 + \frac{4\pi^2}{\omega^2}} + F e^{-(1-\alpha)\mu t}}{\frac{\bar{s}}{\mu} + \bar{F} e^{-(1-\alpha)\mu t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \quad (29)$$

i:

$$\gamma(t) = \left(\frac{\frac{\bar{s}}{\mu} + (1-\alpha)\theta \frac{(1-\alpha)\mu \sin\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right) - \frac{2\pi}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right) + Fe^{-(1-\alpha)\mu t}}{(1-\alpha)^2 \mu^2 + \frac{4\pi^2}{\omega^2}}}{\frac{\bar{s}}{\mu} + \bar{F}e^{-(1-\alpha)\mu t}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1. \quad (30)$$

4. KALIBRACJA PARAMETRÓW MODELU I SYMULACJE NUMERYCZNE

Uchylając założenie o stałości stóp inwestycji w czasie dopuszcza się po pierwsze, odchylenie od średniego poziomu stopy inwestycji (zarówno in plus jak i in minus w zależności od koniunktury gospodarczej). Po drugie zakłada się, zgodnie z teorią cykli koniunkturalnych, że owe odchylenia mają charakter cykliczny. Zatem uwzględniając powyższe założenia oraz przyjmując, że średnia stopa inwestycji wynosi np. 20% ($\bar{s} = 0,2$), odchylenia stopy inwestycji od jej średniego poziomu wynoszą ± 5 pkt. procentowych ($\theta = 0,05$) i okres wahań stóp inwestycji na poziomie 10 lat ($\omega = 10$) trajektoria stopy inwestycji będzie kształtowała się jak na rysunku 1.



Rysunek 1. Sinusoidalna funkcja inwestycji

Źródło: opracowanie własne.

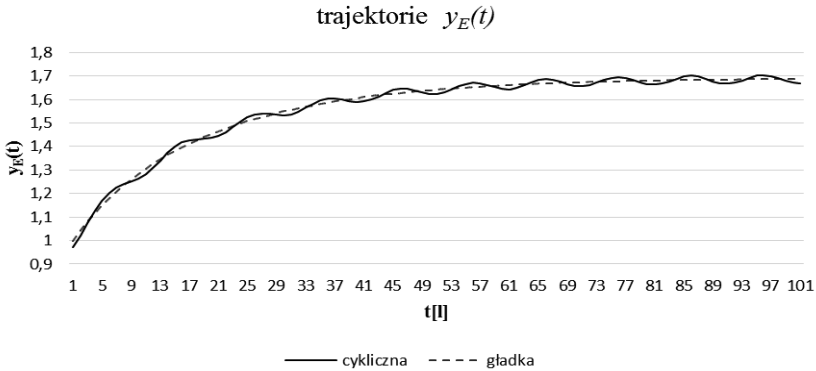
Przyjęcie powyższych założeń pozwoliło na przeprowadzenie symulacji numerycznych modelu teoretycznego (z punktu trzeciego), które prowadzone były w dwóch etapach. W pierwszym etapie dokonano kalibracji wartości parametrów otrzymanego modelu wzrostu gospodarczego, którą rozpoczęto od wyznaczenia wartości elastycz-

ności produkcji względem kapitału α , gdzie $\alpha \in (0;1)$. Bazując na danych panelowych dla krajów grupy UE15 w latach 2000–2013 oszacowano parametr α na poziomie 0,349. Wybór grupy krajów UE15 wynikał z faktu posiadania kompletnych danych statystycznych oraz z przeświadczenia, iż wśród krajów Unii Europejskiej są to gospodarki o ugruntowanych systemach rynkowych⁹. Zaś parametr α oszacowano z wykorzystanie dwóch metod: modelu SUR (ang. *seemingly unrelated regression*) oraz GLS (ang. *generalised least squares*). Przy czym w estymacjach SUR z grupy krajów UE15 wyeliminowano Luksemburg, co wynikało z ograniczeń metodologicznych modelu SUR (por. np. Madalla, 2006, s. 650). Uzyskane wartości parametrów α były na zbliżonym poziomie zatem do dalszych analiz numerycznych przyjęto $\alpha = 0,349$. Ponadto oszacowana wartość α jest zbliżona do szacunków wynikających z dekompozycji modelu Solowa $\alpha \approx 1/3$ (Solow, 1957). W drugim etapie dokonano symulacji numerycznych otrzymanego modelu. Do analiz numerycznych przyjęto trzy warianty średnich stóp inwestycji 15%, 20% oraz 25% ze stałymi odchyleniami na poziomie ± 5 pkt. procentowych ($\theta = 0,05$), parametr $\mu = 0,075$ oraz $k_{E0} = 1$ ¹⁰. Przyjęcie ww. poziomów parametrów modelu wynikało z analizy danych empirycznych w krajach UE 15 za lata 2000–2013 oraz wiedzy o długookresowych charakterystykach gospodarek. Ponadto założono dwa okresy cykli stóp inwestycji 4 oraz 10 lat. Przyjęte okresy cyklicznych zmian stóp inwestycji wynikają bezpośrednio z teorii wahań koniunkturalnych i dotyczą cykli krótkich Kitchina oraz cykli średnich Juglara. Analiz dokonano w 100 letnim horyzoncie czasowym, a ich wyniki zestawiono w tabeli 1 oraz zobrazowano na rysunkach 2–7. Ze względu na trudność uchwycenia 100 letniej perspektywy czasowej w tabeli przedstawiono jedynie wartości minimalne, maksymalne oraz średnie odchylenia cyklicznych ścieżek wzrostu kapitału kappa ($\kappa(t)$) oraz produktu gamma ($\gamma(t)$) od ich gładkich odpowiedników.

Analizując trajektorie $k_E(t)$ oraz $y_E(t)$, przedstawione na rysunkach 2–3, można zaobserwować, iż cykliczne ścieżki wynikające z prezentowanego modelu istotnie odchylają się zarówno in plus jak i in minus od gładkich trajektorii. Przy czym, odchylenia kapitału na jednostkę efektywnej pracy były wyższe niż odchylenia produktu na jednostkę efektywnej pracy. Wynika to zarówno z porównania rysunków 2 i 3 oraz analizy danych zestawionych w tabeli 1.

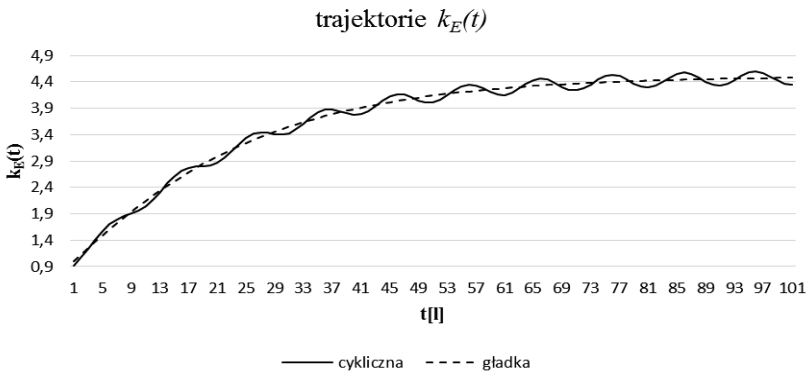
⁹ Rzecz jasna, tego typu symulacje można prowadzić zarówno dla poszczególnych gospodarek lub innych grup krajów (wykorzystując dane panelowe) np. dla gospodarek OECD.

¹⁰ k_{E0} znormalizowano dla $t = 0$ do jedności, aby łatwo wyznaczyć relacje $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k_E(t)}{k_E(0)}$.



Rysunek 2. Symulacje ścieżek wzrostu produktu $y_E(t)$ przy $\omega = 10$ i $\bar{S} = 0,20$

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych na stronie
<http://w3.unece.org/pxweb/database/STAT/20-ME/3-MELF/?lang=1>.



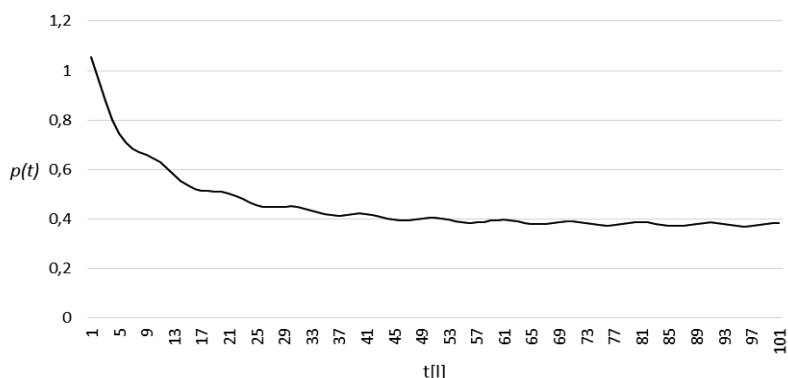
Rysunek 3. Symulacje ścieżek wzrostu kapitału $k_E(t)$ przy $\omega = 10$ i $\bar{S} = 0,20$

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych na stronie
<http://w3.unece.org/pxweb/database/STAT/20-ME/3-MELF/?lang=1>.

Z przeprowadzonych symulacji wynika, iż przyrosty kapitału na jednostkę efektywnej pracy są wyższe niż przyrosty produktu na jednostkę efektywnej pracy to produktywność kapitału na jednostkę efektywnej pracy maleje w czasie. Ponieważ produktywność kapitału oznacza stosunek produktu do kapitału dany wzorem:

$$p(t) = \frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{y_E(t)}{k_E(t)},$$

to można wyznaczyć wartość produktywności kapitału w czasie, której trajektorię przedstawiono na rysunku 4.



Rysunek 4. Czasowa ścieżka produktywności kapitału $p(t)$ przy $\omega = 10$ i $\bar{S} = 0,20$

Źródło: opracowanie własne.

W modelu Solowa z sinusoidalnymi inwestycjami produktywność kapitału na jednostkę efektywnej pracy jest funkcją malejącą z widocznymi cyklicznymi odchyleniami zarówno in plus jak i in minus. Wyznaczona ścieżka produktywności kapitału jest zgodna z założeniem modelu Solowa o malejącej produktywności krańcowej kapitału.

Kolejnym etapem symulacji było wyznaczenie względnych odchyłeń kapitału $\kappa(t)$ oraz produktu $\gamma(t)$ na jednostkę efektywnej pracy, których wyniki zestawiono w tabeli 1 oraz przedstawiono na rysunkach 5–7.

Tabela 1.

Wyniki symulacji numerycznych względnych odchyłeń $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ dla grupy krajów UE 15

ω	\bar{S}	$\kappa(t)$			$\gamma(t)$		
		min	max	średnie	min	max	średnie
4	0,15	-0,0316	0,0292	-0,0002	-0,0112	0,0101	-0,0001
	0,20	-0,0316	0,0276	-0,0002	-0,0112	0,0096	-0,0001
	0,25	-0,0316	0,0262	-0,0002	-0,0112	0,0091	-0,0001
10	0,15	-0,0780	0,0657	-0,0004	-0,0279	0,0225	-0,0003
	0,20	-0,0780	0,0587	-0,0005	-0,0279	0,0201	-0,0003
	0,25	-0,0780	0,0530	-0,0006	-0,0279	0,0182	-0,0003

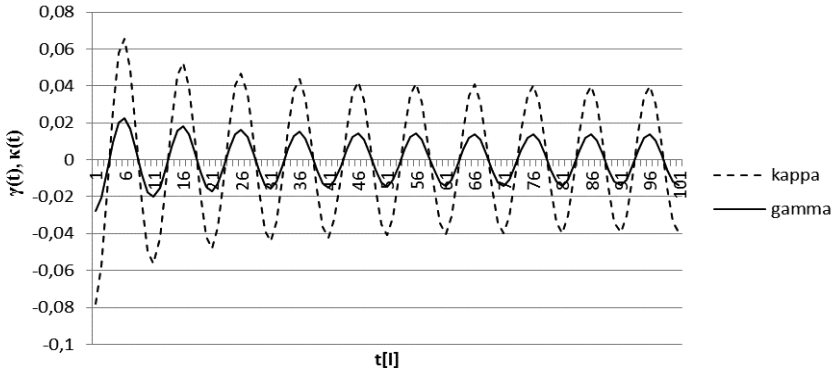
Źródło: obliczenia własne na podstawie danych na stronie <http://w3.unece.org/pxweb/database/STAT/20-ME/3-MELF/?lang=1>.

Z danych zawartych w tabeli 1 oraz z rysunków 5 i 7 wyciągnąć można następujące wnioski:

- Zakładając 4 letnie okresy cykliczności inwestycji zauważono, że zarówno dla kapitału jak i produktu najwyższe (najniższe) wartości odchyłeń cyklicznych ścieżek od

ich gładkich odpowiedników uzyskano dla najniższej (najwyższej) średniej stopy inwestycji. Przy czym maksymalne wartości odchylenia kapitału były kilkukrotnie wyższe niż odchylenia produktu. Maksymalna wartość odchylenia przy średniej stopie inwestycji na poziomie 15% wyniosła 0,03 w przypadku kapitału oraz 0,01 w przypadku produktu. Przyjmując średnią wartość stóp inwestycji na poziomie 25% okazuje się, że maksymalne odchylenia kapitału wyniosły 0,026 zaś produktu 0,009.

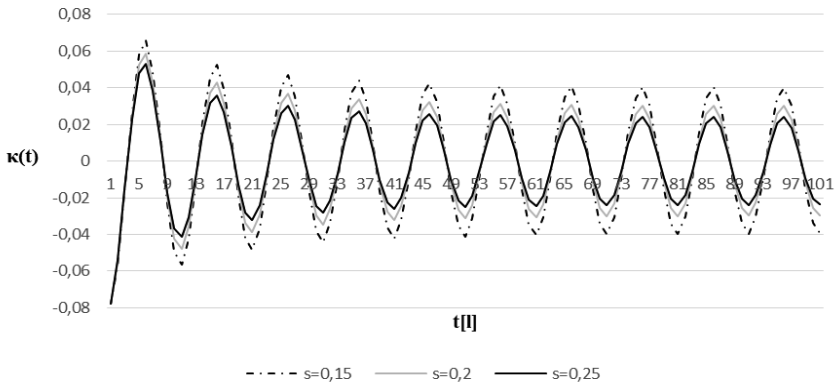
- W wariancie, w którym okres wahań inwestycji wynosi 10 lat okazuje się, że analogicznie jak w przypadku gdy $\omega = 4$, maksymalne wartości odchylenia zarówno kapitału jak i produktu były najwyższe (najniższe) przy najniższych (najwyższych) średnich stopach inwestycji. Z tą różnicą, że w okresach 10 letnich cykli inwestycji otrzymane odchylenia były na ponad dwukrotnie wyższym poziomie niż w symulacjach 4 letnich cykli inwestycji (por. tab. 1).



Rysunek 5. Trajektorie $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ przy $\omega = 10$ i $S = 0,15$

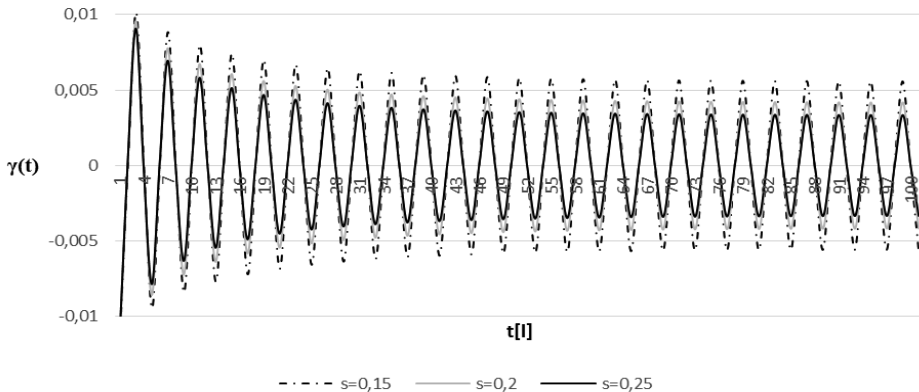
Źródło: opracowanie własne.

- Trajektorie $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ przebiegają wyraźnie cyklicznie z naprzemiennymi odchyleniami in plus oraz in minus zgodnie z założonymi okresami wahań 4 i 10 lat. Zaś średnie wartości tych odchylenia zbliżone są do zera (tab. 1).
- Z symulacji numerycznych wynika ogólny wniosek, że niskie stopy inwestycji generują najwyższe odchylenia cyklicznych ścieżek od ich gładkich odpowiedników. Im wyższe średnie stopy inwestycji tym odchylenia $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ są niższe (patrz rys. 6–7).
- Najniższe odchylenia cyklicznych ścieżek kapitału $\kappa(t)$, biorąc pod uwagę analizowane w pracy warianty, zaobserwowano przy średnich stopach inwestycji na poziomie 25% oraz 4 letnich cyklach inwestycji. Najwyższe odchylenia kappo uzyskano przy 15% średnich stopach inwestycji oraz 10 letnich cyklach inwestycji.



Rysunek 6. Odchylenia cyklicznych ścieżek kapitału (κ) a stopa inwestycji przy $\omega = 10$

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 7. Odchylenia cyklicznych ścieżek produktu (γ) a stopa inwestycji przy $\omega = 4$

Źródło: opracowanie własne.

- Najniższe odchylenia cyklicznych ścieżek produktu $\gamma(t)$ od ich gładkich odpowiedników, w rozważanych wariantach, odnotowano przy 25% średnich stopach inwestycji oraz 4 letnich cyklach inwestycji. Najwyższe odchylenia $\gamma(t)$ cechowały gospodarki w scenariuszu, w których założono średnią stopę inwestycji na poziomie 15% oraz 10 letnie cykle inwestycji.
- Ponadto można zauważyć, iż amplitudy wahań $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ są najwyższe w początkowym okresie symulacji i cechują się tendencją malejącą do połowy okresu symulacji a następnie stabilizują się. Takie tendencje odchylen $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ mogą wynikać z trajektorii kapitału oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy (rys. 2 i 3) które podlegają prawu malejącej produktywności krańcowej.

5. PODSUMOWANIE

Prowadzone w artykule rozważania można podsumować następująco:

1. Zaprezentowana w pracy modyfikacja modelu z sinusoidalnymi inwestycjami bazuje na neoklasycznym modelu Solowa-Swana (1956). Modyfikacja ta uchyla (zdaniem autorów) dość restrykcyjne założenie o stałości stóp inwestycji w czasie. Autorzy przyjmują założenie, że inwestycje odchylają się od swojego średniego poziomu, czyli podlegają cyklicznym wahaniom. Dlatego do opisu inwestycji wprowadzają funkcję zależną sinusoidalnie od czasu.
2. Bazując na wprowadzonych modyfikacjach wyprowadzono równania wyznaczające ścieżkę wzrostu kapitału oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy w modelu Solowa z sinusoidalnymi stopami inwestycji. Pewnym ograniczeniem prezentowanej modyfikacji modelu wzrostu jest przyjęcie stałej amplitudy oraz okresu wahań cyklicznych. Przyjęcie stałych parametrów sinusoidy pozwoliło na domknięcie prezentowanego modelu.
3. Wyprowadzono ponadto równania na względne odchylenia cyklicznych ścieżek wzrostu kapitału oraz produktu od ich gładkich ścieżek wzrostu. Pozwoliło to na weryfikację oraz ocenę wpływu otrzymanych ścieżek wzrostu kapitału i produktu w modelu Solowa-Swana z sinusoidalnymi inwestycjami w stosunku do tych ścieżek w modelu Solowa ze stałymi w czasie stopami inwestycji.
4. Bazując na danych empirycznych dla grupy krajów UE15, dokonano kalibracji wartości parametrów modelu oraz analiz numerycznych. Wynika z nich, że wprowadzenie stóp inwestycji zależnych sinusoidalnie od czasu istotnie wpływa na cykliczność odchyleń kapitału oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy.
5. Dla ustalonych wartości parametrów modelu przyjęcie sinusoidalnej funkcji stóp inwestycji silniej wpływa na ścieżkę wzrostu kapitału niż produktu na jednostkę efektywnej pracy, co wynika z kilkukrotnie wyższych wartości względnych odchyleń $\kappa(t)$ niż $\gamma(t)$.
6. Najniższe wartości odchyleń kappa oraz gamma zaobserwowano, gdy założono wysokie (w analizowanych wariantach) stopy inwestycji oraz 4 letnie okresy cykli inwestycji. Najwyższe odchylenia $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ charakterystyczne były przy niskich stopach inwestycji oraz 10-letnim okresie wahań inwestycji.
7. Z przeprowadzonych symulacji numerycznych wynika, iż na wielkość odchyleń $\kappa(t)$ oraz $\gamma(t)$ istotny wpływ ma zarówno średni poziom stóp inwestycji jak i okres wahań inwestycji.

LITERATURA

- Cobb C. W., Douglas P. H., (1928), A Theory of Production, *American Economic Review*, 18 (1), 139–165.
Dykas P., Sulima A., Tokarski T. (2008), Złote reguły akumulacji kapitału a N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego, *Gospodarka Narodowa*, nr 11-12/2008, 47–75.

- Dykas P., Edigarian A., Tokarski T., (2011), Uogólnienie N-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta, w: Panek E., (red.), *Wzrost Gospodarczy Teoria. Rzeczywistość*, Zeszyty Naukowe nr 176, Poznań, 161–177.
- Madalla G. S., (2006), *Ekonometria*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Malaga K., (2015), Jednolita teoria wzrostu gospodarczego – stan obecny a wyzwania współczesności, w: Fiedor B., (red.), *Ekonomia dla przyszłości. Stylizowane fakty a wyzwania współczesności*, PTE, Warszawa, 150–169.
- Malaga K., (2009), *O niektórych dylematach teorii wzrostu gospodarczego i ekonomii*, ZKP TE, Warszawa.
- Mankiw N. G., Romer D., Weil N. D., (1992), A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 107 (2), 407–437.
- Maussner A., (1994), *Koniunkturtheorie*, Springer, Berlin.
- McCombie J. S. L., (2000), The Solow Residual, Technical Change and Aggregate Production Functions, *Journal of Post Keynesian Economics*, 23 (2), 267–297.
- McCombie J. S. L., (2001), What Does the Aggregate Production Function Tell Us? Second Thoughts on Solow's, Second Thoughts on Growth Theory, *Journal of Post Keynesian Economics*, 23 (4), 589–615.
- Mroczek K., Tokarski T., Trojak M., (2014), Grawitacyjny model zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw, *Gospodarka Narodowa*, nr 3, 5–34.
- Nonneman W., Vanhoudt P., (1996), A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economics Growth for the OECD Countries, *Quarterly Journal of Economics*, 111 (3), 943–953.
- Solow R. M., (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 70 (1), 65–94.
- Romer D., (2000), *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Tokarski T., (2005), *Statystyczna analiza regionalnego zróżnicowania wydajności pracy, zatrudnienia i bezrobocia w Polsce*, Wydawnictwo PTE, Warszawa.
- Tokarski T., (2009), *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Tokarski T., (2011), *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Wicksell K., (1893), *Über Wert, Kapital und Rente nach den Neueren Nationalökonomischen Theorien*, Jena.
- Żółtowska E., (1997), *Funkcja produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

NEOKLASYCZNY MODEL WZROSTU GOSPODARCZEGO Z SINUSOIDALNYMI INWESTYCJAMI

Streszczenie

Celem prezentowanego opracowania jest próba rozszerzenia neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa przez uwzględnienie fluktuacji inwestycji. Autorzy uchylając założenie o stałości stóp inwestycji wprowadzają funkcję inwestycji zależną sinusoidalnie od czasu. Przyjęcie sinusoidalnej funkcji inwestycji tłumaczyć można tym, iż inwestycje (podobnie jak produkcja) w dużej mierze zależne są od koniunktury gospodarczej, która podlega okresowym fluktuacjom. W rozważaniach teoretycznych autorzy wprowadzają ponadto pojęcia cyklicznej oraz gładkiej ścieżki czasowej technicznego uzbrojenia pracy oraz wydajności pracy i za pomocą tych narzędzi identyfikują, poprzez obliczenie względnych odchyłeń tych ścieżek, wpływ inwestycji zależnych sinusoidalnie od czasu.

W analizie empirycznej autorzy dokonali kalibracji parametrów otrzymanego modelu. Bazując na danych panelowych dla krajów grupy UE15 w latach 2000–2013 najpierw oszacowano parametr (elastyczność produkcji względem kapitału) na poziomie 0,349, którego wartość przyjęto do dalszych

analiz numerycznych. W drugim etapie dokonano symulacji numerycznych skalibrowanych odchy-
leń cyklicznej ścieżki czasowej technicznego uzbrojenia pracy (wydajności pracy) od gładkiej ścieżki
wzrostu technicznego uzbrojenia pracy (wydajności pracy). Przy analizach numerycznych rozważano
wpływ różnych stóp inwestycji (15%, 20%, 25%) oraz okresów wahań cyklicznych (4 lub 10 lat)
na kształtowanie się owych odchyleń. Analiz numerycznych dla gospodarek grupy UE15 dokonano
w 100 letnim horyzoncie czasowym.

Słowa kluczowe: cykliczne inwestycje, model wzrostu Solowa, ścieżka wzrostu produktu oraz
kapitału na pracującego

THE NEOCLASSICAL GROWTH MODEL WITH SINUSOIDAL INVESTMENTS

Abstract

The aim of the present study is an attempt to extend the neoclassical model of economic growth of Solow by repealing the assumption of fixed investment and introducing an investment function dependent sinusoidally on the time. The adoption of the sinusoidal function of investment is substantiated by the fact that investments (like manufacturing) are largely depended on the economic situation, which is subject to periodic fluctuations. The authors introduce the theoretical considerations on the notion of cyclical and smooth path of temporal capital-labour ratio and labour productivity. When using these tools the authors identified, by calculating the relative deviations of the mentioned path, the impact of investment function dependent sinusoidally on the time.

In the empirical analysis the authors conducted the calibration of parameters used by the research model. Based on panel data for the EU15 between the years 2000–2013 the α parameter (production flexibility in relation to capital) was estimated first at 0,349. That value was adopted to further numerical analysis. In the second stage the simulations of numerical, calibrated deviations of temporal cyclical path of capital-labour ratio (labor productivity) from the smooth path of capital-labour ratio (labor productivity) was performed. When conducting numerical analysis the impact of different investment rates (15%, 20%, 25%) and periods of cyclical fluctuations (4 or 10 years) have been considered in relation to the formation of these deviations. Numerical analysis for the economies of the EU15 group was made for one hundred time series.

Keywords: cyclical investments, Solow growth model, the path of product growth and the capital-labour ratio

