DOI: 10.5604/01.3001.0014.1213

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXIII – ZESZYT 4 – 2016

EMIL PANEK[1]

GOSPODARKA GALE'A Z WIELOMA MAGISTRALAMI. „SŁABY" EFEKT MAGISTRALI

1. WSTĘP

W teorii magistral dowodzi się, że bez względu na stan wyjściowy gospodarki optymalne procesy wzrostu są w długich okresach czasu zawsze zbieżne do pewnej wzorcowej ścieżki zwanej magistralą (produkcyjną, kapitałową, konsumpcyjną), na której gospodarka osiąga najwyższe tempo równomiernego wzrostu[2]. W stacjonarnych modelach dynamiki ekonomicznej typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa magistrala jest zazwyczaj określona jednoznacznie, a jej obrazem geometrycznym w przestrzeni stanów gospodarki jest półprosta zwana promieniem von Neumanna. Pisaliśmy o tym m.in. w artykułach Panek (2015a, 2016) sugerując, że założenie jednoznaczności magistrali można osłabić, ale niestety kosztem wzrostu złożoności modelu. Przykład takiego uogólnienia prezentujemy poniżej. Co ciekawe, złożoność modelu szczególnie przy tym nie rośnie.

Zajmiemy się n – produktową gospodarką typu Gale'a, w której pojedynczą magistralę zastąpimy wiązką magistral, nazywaną dalej umownie magistralą wielopasmową. Ustalimy warunki istnienia magistrali wielopasmowej w gospodarce Gale'a oraz jej niektóre własności, ale przede wszystkim pokażemy, że podobnie jak w klasycznych modelach z pojedynczą magistralą, w gospodarce Gale'a z magistralą wielopasmową obserwujemy specyficzną stabilność optymalnych procesów wzrostu, nazywaną w literaturze „słabym" efektem magistrali.

Prezentowany model nawiązuje do wersji przedstawionej w książce Panek (2003, rozdz. 5, punkt 5.1).

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, Polska, e-mail: emil.panek@ue.poznan.pl.

[2] Zob. np. McKenzie (1976; 1998; 2005, rozdz. 26), Nikaido (1968, rozdz. IV), Panek (2003, rozdz. 5, 6), Takayama (1985, rodz. 7).

2. PRZESTRZEŃ PRODKCYJNA GALE'A. DEFINICJA, WYBRANE WŁASNOŚCI

Standardowa n – produktowa przestrzeń produkcyjna Gale'a Z (inaczej: zbiór technologiczny) jest stożkiem wypukłym zawartym w R_+^{2n}, z wierzchołkiem w 0. Jego elementami są $2n$-wymiarowe wektory $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \geqq 0$[3], o których mówimy, że opisują dopuszczalne procesy produkcji w gospodarce Gale'a; x – nazywamy wektorem zużycia (nakładów), y – wektorem produkcji (wyników). Zapis $(x, y) \in Z$ oznacza, że w gospodarce, której technologię opisuje przestrzeń produkcyjna Z, z wektora nakładów x możliwe jest wytworzenie wektora produkcji y.

Procesy produkcji podporządkowane są następującym regułom:

(G1) $\forall (x, y) \in Z \; \forall \lambda \geq 0 \; (\lambda(x, y) \in Z)$

(warunek proporcjonalności nakładów i wyników),

(G2) $\forall (x^i, y^i) \in Z, i = 1,2 \; \left((x^1 + x^2, y^1 + y^2) \in Z\right)$

(warunek addytywności procesów produkcyjnych),

(G3) $\forall (x, y) \in Z \; (x = 0 \Rightarrow y = 0)$

(warunek „braku rogu obfitości"),

(G4) $\forall (x, y) \in Z \; (x' \geqq x \Rightarrow (x', y) \in Z)$

(możliwość marnotrawstwa nakładów),

(G5) $\forall (x, y) \in Z \; (y' \leqq y \Rightarrow (x, y') \in Z)$

(możliwość marnotrawstwa mocy produkcyjnych),

(G6) $\forall (x^i, y^i) \in Z, i = 1,2, \ldots \left((x^i, y^i) \underset{i}{\rightarrow} (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in Z\right)$

(domkniętość przestrzeni produkcyjnych).

Zauważmy, że jeżeli $(x, y) \in Z$ oraz $(x, y) \neq 0$, to $x \neq 0$. Dalej interesują nas nietrywialne (niezerowe) procesy $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$.

Liczbę

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha | \alpha x \leqq y\}$$

---

[3] Jeżeli $a, b \in R^n$, to zapis $a \geqq b$ oznacza, że dla każdego i zachodzi: $a_i \geq b_i$. Pisząc $a \geq b$ rozumiemy, że $a \geqq b$ oraz $a \neq b$.

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$. Funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z \setminus \{0\}$. Stąd i z twierdzenia Weierstrassa o istnieniu maksimum funkcji ciągłej na zbiorze zwartym otrzymujemy wniosek, że istnieje rozwiązanie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\}$ zadania

$$\max_{(x,y)\in Z\setminus\{0\}} \alpha(x,y) = \max_{(x,y)\in\Omega(1)} \alpha(x,y) = \alpha(\bar{x},\bar{y}) = \alpha_M, \tag{1}$$

gdzie $\Omega(1) = \{(x, y) \in Z |\ \|(x, y)\| = 1\}$ (tutaj i dalej $\|a\| = \sum_i |a_i|$).[4] Wobec dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji α rozwiązanie to jest określone z dokładnością do mnożenia przez dowolną stałą dodatnią (z dokładnością do struktury):

jeżeli

$$\alpha(\bar{x}.\bar{y}) = \max_{(x,y)\in Z\setminus\{0\}} \alpha(x,y) = \alpha_M,$$

to także $\forall\lambda > 0$

$$\alpha(\lambda\bar{x}.\lambda\bar{y}) = \max_{(x,y)\in Z\setminus\{0\}} \alpha(x,y) = \alpha_M. \tag{2}$$

Proces $(\bar{x}, \bar{y})$ będący rozwiązaniem zadania (1) nazywamy optymalnym procesem produkcji w gospodarce Gale'a. Liczbę α_M nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji.

Oznaczmy przez $Z_{opt} \subset Z \setminus \{0\}$ zbiór wszystkich optymalnych procesów produkcji:

$$Z_{opt} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\}|\ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M\}.$$

O jego kształcie mówi poniższe twierdzenie.

□ **Twierdzenie 1.** Przy założeniach **(G1)−(G6)** zbiór Z_{opt} jest stożkiem wypukłym nie zawierającym 0.

Dowód. Weźmy dowolną parę optymalnych procesów $(\bar{x}^i, \bar{y}^i) \in Z_{opt}$, $i = 1,2$, oraz takie liczby $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, że $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Niech $(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1(\bar{x}^1, \bar{y}^1) + \lambda_2(\bar{x}^2, \bar{y}^2)$. Wówczas $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\}$, czyli

$$\alpha(\bar{x}.\bar{y}) \leq \alpha_M. \tag{3}$$

[4] Zob. np. Panek (2003, tw. 5.2). Zbiór $\Omega(1)$ jest zwarty. W twierdzeniu 5.2 zamiast niego mamy (też zwarty) zbiór $Q = \{(x, y) \in Z|\ \|(x, y)\| = 1\}$).

Z założenia $\alpha(\bar{x}^1, \bar{y}^1) = \alpha(\bar{x}^2, \bar{y}^2) = \alpha_M$, więc

$$\alpha_M \bar{x}^1 \leqq \bar{y}^1 \text{ oraz } \alpha_M \bar{x}^2 \leqq \bar{y}^2$$

i wobec tego

$$\alpha_M \bar{x} = \alpha_M(\lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2) \leqq \lambda_1 \bar{y}^1 + \lambda_2 \bar{y}^2 = \bar{y},$$

skąd wnioskujemy, że:

$$\alpha(\bar{x}.\bar{y}) \geq \alpha_M. \tag{4}$$

Z (3), (4) otrzymujemy $\alpha(\bar{x}.\bar{y}) = \alpha_M$, zatem $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$. ■

Jeżeli $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$, to wobec **(G4)**, **(G5)** również $(\bar{x}, \alpha_M \bar{x}) \in Z_{opt}$ oraz $(\bar{y}, \alpha_M \bar{y}) \in Z_{opt}$. Jednakowoż, bez dodatkowych warunków, o optymalnym wskaźniku technologicznej efektywności α_M możemy jedynie powiedzieć, że jest nieujemny. Aby wykluczyć ten nierealistyczny przypadek zakładamy, że spełniony jest następujący postulat, który nazywamy warunkiem silnej regularności[5]:

(G7) $\forall(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}\ (\bar{y} > 0)$

głoszący, że w optymalnych procesach produkcji wytwarzane są wszystkie towary. Oczywiście, wówczas $\alpha_M > 0$. Ponadto, z **(G7)**, **(G4)** wynika, że istnieją takie procesy $(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, w których produkcja $\bar{y}$ jest (po wszystkich współrzędnych) α_M – wielokrotnością nakładów $\bar{x}$:

$$\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}(\bar{y} = \alpha_M\, \bar{x} > 0). \tag{5}$$

Weźmy dowolny proces produkcji $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ z wektorem $y \neq 0$. O wektorze

$$s = \frac{y}{\|y\|} = \left(\frac{y_1}{\|y\|}, \frac{y_2}{\|y\|}, \ldots, \frac{y_n}{\|y\|}\right)$$

mówimy, że charakteryzuje strukturę produkcji w procesie (x,y).

Oznaczamy przez S następujący zbiór wektorów struktury produkcji we wszystkich optymalnych procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$:

$$S = \left\{s \mid \exists(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}\left(s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}\right)\right\}. \tag{6}$$

W standardowym modelu Gale'a zbiór ten redukuje się do punktu. O jego (niektórych) własnościach mówi kolejne twierdzenie.

[5] Słabszą wersję tego warunku sformułujemy w punkcie 6.

□ **Twierdzenie 2.** Przy przyjętych założeniach zbiór S:
(i) jest niepusty, zwarty i wypukły,
(ii) zawiera wyłącznie wektory dodatnie.

Dowód. (i) Zbiór S jest niepusty, gdyż istnieje rozwiązanie zadania (1).

(Zwartość) Weźmy dowolny ciąg wektorów $s^i \in S$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$. Ponieważ $S \subset S_+^n(1) = \{s \in R_+^n | \|s\| = 1\}$ i simpleks $S_+^n(1)$ jest zbiorem zwartym, więc

$$\exists \{s^{i_j}\}_{j=1}^{\infty} \left(s^{i_j} \underset{j}{\to} \bar{s} \in S_+^n(1) \right).$$

Niech $\eta^{i_j} = \alpha_M s^{i_j}$. Wówczas

$$\left(s^{i_j}, \eta^{i_j}\right) = \left(s^{i_j}, \alpha_M s^{i_j}\right) \in Z \setminus \{0\}, j = 1,2, \ldots, \infty,$$

$$\left(s^{i_j}, \eta^{i_j}\right) \underset{j}{\to} (\bar{s}, \bar{\eta}) = (\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in Z \setminus \{0\}.$$

Jednocześnie $\alpha(\bar{s}, \bar{\eta}) = \alpha_M$ oraz $\frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} = \bar{s} \in S_+^n(1)$, więc $\bar{s} \in S$.

(Wypukłość) Weźmy dowolne wektory $s^1, s^2 \in S$ oraz liczby $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Pokażemy, że $s = \alpha s^1 + \beta s^2 \in S$. Ponieważ $s^1, s^2 \in S$, więc

$$\exists (\bar{x}^i, \bar{y}^i) \in Z_{opt} \left(s^i = \frac{\bar{y}^i}{\|\bar{y}^i\|} \right), \ i = 1, 2.$$

Oczywiście, $\alpha(\bar{x}^1, \bar{y}^1) = \alpha(\bar{x}^2, \bar{y}^2) = \alpha_M$. Z **(G1)** oraz dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji α wynika, że $\left(\tilde{x}^i, s^i\right) \in Z_{opt}$, gdzie $\tilde{x}^i = \lambda_i \bar{x}^i$, $\lambda_i = \frac{1}{\|\bar{y}^i\|} > 0$, $i = 1, 2$. Stożek Z_{opt} jest zbiorem wypukłym, więc $(x', y') = \alpha(\tilde{x}^1, s^1) + \beta(\tilde{x}^2, s^2) \in Z_{opt}$ oraz

$$s = \alpha s^1 + \beta s^2 = \frac{\alpha s^1 + \beta s^2}{\|\alpha s^1 + \beta s^2\|} = \frac{y'}{\|y'\|}.$$

Zatem $s \in S$.

Zauważmy, że przy dowodzie zwartości i wypukłości zbioru S nie korzystamy z warunku **(G7)**.

(ii) Teza jest bezpośrednią konsekwencją warunku **(G7)**. ■

3. WIELOPASMOWA MAGISTRALA PRODUKCYJNA I RÓWNOWAGA VON NEUMANNA

Weźmy dowolny wektor (optymalnej) struktury produkcji $s \in S$. W literaturze półprostą

$$N_s = \{\lambda s | \lambda > 0\} \tag{7}$$

nazywa się promieniem von Neumanna (lub magistralą produkcyjną), zob. Takayama (1985, rozdz. 7), Nikaido (1968, rozdz. IV). Zbiór

$$\mathbb{N} = \cup_{s \in S} N_s = \{\lambda s | \lambda > 0, s \in S\} \tag{8}$$

nazywamy **wielopasmową magistralą produkcyjną** w gospodarce Gale'a. Magistralę wielopasmową $\mathbb{N}$ tworzy wiązka promieni (pojedynczych magistral) N_S, $s \in S$. Zbiór S składa się z wszystkich unormowanych (do 1) wektorów charakteryzujących strukturę produkcji na wielopasmowej magistrali.

□ **Twierdzenie 3.** Przestrzeń metryczna $(\mathbb{N}, \rho)$ z metryką

$$\rho(N_{s^1}, N_{s^2}) = \left\| \frac{y^1}{\|y^1\|} - \frac{y^2}{\|y^2\|} \right\|, \; y^1 \in N_{s^1}, y^2 \in N_{s^2},$$

oraz operacjami dodawania:

$$N_{s^1} + N_{s^2} = \{y^1 + y^2 | \; y^1 \in N_{s^1}, \; y^2 \in N_{s^2}\}$$

i mnożenia przez skalar $\sigma \in R^1_+$:

$$\sigma N_s = \{\sigma y | y \in N_s\} = \{\sigma \lambda s | \lambda > 0\}$$

jest zwarta i wypukła.

Dowód. (Zwartość) Niech $N_{s^i} \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$, tzn. $s^i \in S$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$. Zbiór S jest zwarty, a odwzorowanie $f: S \to \mathbb{N}$ postaci

$$f(s) = N_s = \{\lambda s | \lambda > 0\}$$

ciągłe, więc przestrzeń metryczna $(\mathbb{N}, \rho)$ jest zwarta (jako ciągły obraz zbioru zwartego).

(Wypukłość) Weźmy dowolne promienie $N_{s^1}, N_{s^2} \in \mathbb{N}$ oraz liczby $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Niech $N = \alpha N_{s^1} + \beta N_{s^2}$. Pokażemy, że $N \in \mathbb{N}$. Jeżeli $\alpha = 0$, to $N = N_{s^2} \in \mathbb{N}$. Podobnie, jeżeli $\beta = 0$, to $N = N_{s^1} \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że α, $\beta > 0$. Wówczas:

$$N = \alpha N_{s^1} + \beta N_{s^2} = \alpha\{\lambda s^1 | \lambda > 0\} + \beta\{\lambda s^2 | \lambda > 0\} = \{\lambda(\alpha s^1 + \beta s^2) | \lambda > 0\} \in \mathbb{N},$$

gdyż $s = \alpha s^1 + \beta s^2 \in S$. ■

Oznaczmy przez $p = (p_1, \ldots, p_n) \geq 0$ wektor cen towarów w gospodarce Gale'a. Niech $(x, y) \in Z$. Iloczyn $\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ przedstawia wartość nakładów, a $\langle p, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i$ wartość produkcji w procesie (x, y) (przy cenach p). Liczbę

$$\beta(x, y, p) = \frac{\langle p, y \rangle}{\langle p, x \rangle}$$

(tam gdzie $\langle p, x \rangle \neq 0$) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (x, y) (przy cenach p).

□ **Twierdzenie 4.** Przy założeniach **(G1)–(G7)** istnieje taki wektor cen $\bar{p} \geq 0$, że

$$\forall (x, y) \in Z(\langle \bar{p}, y \rangle - \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle \leq 0), \tag{9}$$

oraz

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}(\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle > 0), \tag{10}$$

lub inaczej

$$\beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M \tag{9'}$$

(wszędzie gdzie funkcja $\beta(\cdot .\cdot, \bar{p})$ jest określona) oraz

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \alpha_M \tag{10'}$$

dla wszystkich procesów $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$.

Dowód[6]. Zbiór

$$C = \{c \in R^n | \, c = \alpha_M x - y, (x, y) \in Z\}$$

jest stożkiem wypukłym w R^n (jako liniowy obraz stożka Z) nie zawierającym wektorów ujemnych. Istotnie, gdyby istniał taki proces $(x', y') \in Z$, że $c' = \alpha_M x' - y' < 0$, to znalazłaby się również taka liczba $\varepsilon' > 0$, że prawdziwa byłaby nierówność $(\alpha_M + \varepsilon')x' \leqq y'$. Wówczas musiałby zachodzić także warunek:

$$\alpha_M = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) \geq \alpha(x', y') \geq \alpha_M + \varepsilon',$$

co jest oczywiście niemożliwe. Zbiór

---

[6] Dowód nawiązuje do tw. 5.4 z pracy Panek (2003); zob. także Panek (2015a, tw. 1).

$$D = C + R_+^n = \{c + x | c \in C, x \in R_+^n\}$$

też jest stożkiem wypukłym z wierzchołkiem w 0 (jako suma pary stożków) nadal nie zawierającym wektorów ujemnych (nie ma ich bowiem w żadnym ze zbiorów C, R_+^n) oraz $C \subset D$. Natomiast do D należą wektory jednostkowe $e^i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Z twierdzenia o hiperpłaszczyźnie oddzielającej wnioskujemy, że istnieje taki wektor $\bar{p} \neq 0$, że

$$\forall d \in D(\langle \bar{p}, d \rangle \geq 0).$$

Ponieważ $e^i \in D$, $i = 1, 2, \ldots, n$, więc $\bar{p}_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. W szczególności

$$\forall c \in C(\langle \bar{p}, c \rangle \geq 0),$$

czyli

$$\forall (x, y) \in Z(\langle \bar{p}, \alpha_M x - y \rangle \geq 0),$$

tzn. zachodzi warunek (9) (równoważnie (9')).

Jeżeli $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$, wtedy $\alpha_M \bar{x} \leqq \bar{y}$, więc

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \geq \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle.$$

Natomiast z (9), zważywszy na **(G7)** dostajemy:

$$0 < \langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle.$$

Tym samym spełniony jest warunek (10) (równoważnie (10')).

Wektor $\bar{p}$ nazywamy wektorem cen von Neumanna. O każdej trójce $\{\alpha_{M,} (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ spełniającej warunki (9)–(10) mówimy, że tworzy (optymalny) stan równowagi von Neumanna[7].

4. DOPUSZCZALNE I STACJONARNE PROCESY WZROSTU

Zakładamy czas skokowy, $t = 1, 2, \ldots$. Przez $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$, oznaczamy horyzont funkcjonowania gospodarki, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ jest wektorem

[7] W równowadze neumannowskiej ceny $\bar{p} \geq 0$ oraz proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\}$ są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią). Dochodzi w niej do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z efektywnością technologiczną na maksymalnym możliwym do osiągnięcia przez gospodarkę poziomie.

nakładów (zużycia) towarów w okresie t, $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ wektorem produkcji wytworzonej w tym okresie z nakładów $x(t)$. O parze wektorów $(x(t), y(t)) \in Z$ mówimy, że opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji w okresie t. Gospodarka jest zamknięta w tym znaczeniu, że nakłady w okresie następnym, $t + 1$, pochodzą w niej wyłącznie z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim t:

$$x(t+1) \leqq y(t),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1,$$

co w myśl **(G4)** prowadzi do inkluzji:

$$(y(t), y(t+1)) \in Z,\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \tag{11}$$

Przez y^0 oznaczamy początkowy wektor produkcji:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \tag{12}$$

O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (11)–(12) mówimy, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w gospodarce Gale'a. Łatwo zauważyć, że przy przyjętych założeniach, dla dowolnego początkowego wektora produkcji $y^0 \geq 0$, w każdym (dowolnej długości) horyzoncie T istnieją (y^0, t_1) – dopuszczalne procesy wzrostu; zob. np. Panek (2003, lemat 5.1). Proces dopuszczalny szczególnej postaci

$$y(t) = \gamma^t y^0,\ t = 0, 1, \dots, t_1 \tag{13}$$

($\gamma > 0$) nazywamy stacjonarnym procesem wzrostu z tempem γ. Nie zawsze (nie dla każdego wektora $y^0 \geq 0$) istnieje stacjonarny proces wzrostu. Proces taki (z tempem $\gamma > 0$) istnieje, gdy zachodzi inkluzja

$$(y^0, \gamma y^0) \in Z \setminus \{0\}.$$

Przy założeniach **(G1)–(G7)** w gospodarce Gale'a istnieją stacjonarne procesy wzrostu z dowolnym tempem $\gamma \in (0, \alpha_M]$:

$$\forall \gamma \in (0, \alpha_M] \exists \tilde{y} \geq 0 \big((\tilde{y}, \gamma \tilde{y}) \in Z \setminus \{0\}\big).$$

Zauważmy, że

$$\max_{(y, \gamma y) \in Z \setminus \{0\}} \gamma = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}).$$

Stąd, wobec **(G4)**, **(G5)** dostajemy:

$$(\bar{y}, \alpha_M \bar{y}) \in Z_{opt} \subset Z \setminus \{0\},$$

co prowadzi do stacjonarnego procesu $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci (13) z tempem $\gamma = \alpha_M$ i początkowym wektorem produkcji $y^0 = \bar{y}$, $\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = s \in S$. Nazywamy go optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu w gospodarce Gale'a. Optymalny stacjonarny proces postaci $\bar{y}(t) = \alpha_M^t \bar{y}$, $t = 0, 1, \ldots, t_1$ (z początkowym wektorem produkcji $\bar{y}$), biegnie po magistrali (promieniu) N_S:

$$\forall t \in T(\bar{y}(t) \in N_s),$$

gdzie $s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$. Jego dowolna dodatnia λ – wielokrotność $\lambda\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ też jest optymalnym stacjonarnym procesem (z początkowym wektorem produkcji $\lambda\bar{y}$). Suma dwóch optymalnych stacjonarnych procesów $\bar{y}^1(t) = \alpha_M^t \bar{y}^1$, $\bar{y}^2(t) = \alpha_M^t \bar{y}^2$ jest optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu (z początkowym wektorem produkcji $\bar{y} = \bar{y}^1 + \bar{y}^2$). Reasumując, optymalne stacjonarne procesy wzrostu w gospodarce Gale'a z wielopasmową magistralą tworzą stożek wypukły nie zawierający 0.

Jak pisaliśmy na wstępie, w pracach z teorii magistral przyjmuje się zazwyczaj, że optymalny stacjonarny proces jest w gospodarce Gale'a określony jednoznacznie z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią), co skutkuje istnieniem dokładnie jednej magistrali N_S (jednego promienia von Neumanna), a nie wiązki magistral $\mathbb{N}$. Jednoznaczność promienia von Neumanna zapewnia następujący warunek[8]: jeżeli $\alpha_M \bar{x} = \bar{y} > 0$ oraz $s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$, to

$$\forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} \left(\frac{x}{\|x\|} \neq s \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y \rangle}{\langle \bar{p}, x \rangle} < \alpha_M \right)$$

(jeżeli struktura nakładów w jakimkolwiek dopuszczalnym procesie produkcji odbiega od *jedynego* wektora s struktury produkcji na magistrali, to efektywność ekonomiczna takiego procesu jest niższa od optymalnej). W konsekwencji mamy jednoelementowy zbiór S oraz jeden, określony z dokładnością o struktury, optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$.

Założenie o istnieniu w gospodarce tylko jednej magistrali nie ma uzasadnienia. Ponieważ nie można wykluczyć istnienia wielu optymalnych stacjonarnych ścieżek/procesów wzrostu, dlatego dalej zakładamy, że w gospodarce Gale'a może istnieć cała wiązka (pasmo) magistral $\mathbb{N}$. W myśl twierdzeń 2, 3 zbiór S wektorów struktury produkcji we wszystkich optymalnych procesach produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$ oraz wielopasmowa magistrala $\mathbb{N}$, złożona z wiązki promieni von Neumanna $N_s, s \in S$, są zwarte i wypukłe. Po wielopasmowej magistrali biegną wszystkie optymalne stacjonarne procesy wzrostu postaci $\bar{y}(t) = \alpha_M^t \bar{y} > 0$, $\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = s \in S$, $\big(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1)\big) \in Z$, więc

[8] Zob. np. Radner (1961), Nikaido (1968, rozdz. IV, par. 13).

$$\beta(\bar{y}(t), \bar{y}(t+1), \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y}(t+1)\rangle}{\langle \bar{p}, \bar{y}(t)\rangle} = \frac{\langle \bar{p}, \alpha_M^{t+1}\bar{y}\rangle}{\langle \bar{p}, \alpha_M^{t}\bar{y}\rangle} = \alpha_M,\ t = 0,\ 1,\ \ldots,\ t_1 - 1,$$

co pokazuje, że procesy takie wyróżniają się także najwyższą efektywnością ekonomiczną. Wprowadźmy następującą miarę odległości (kątowej) wektora $x = (x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ od wielopasmowej magistrali (zbioru) $\mathbb{N}$:

$$d(x, \mathbb{N}) = \inf_{x' \in \mathbb{N}} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\|.$$

Zakładamy, że

(G8) $\forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} (x \notin \mathbb{N} \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M)$

(efektywność ekonomiczna procesu leżącego poza wielopasmową magistralą jest niższa od optymalnej) lub równoważnie:

(G8') $\forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} (x \notin \mathbb{N} \Rightarrow \langle \bar{p}, y\rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, x\rangle)$.

Warunek **(G8)** nie wyklucza istnienia wielu magistral, tym samym występowania w równowadze von Neumanna wielu optymalnych procesów produkcji o różnej strukturze. Wszystkie wyróżnia też najwyższa efektywność ekonomiczna.

□ **Twierdzenie 5.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)**–**(G8)**, to

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z \setminus \{0\}\ (d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon).$$

Dowód[9]**.** Zauważmy, że jeżeli proces $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ spełnia warunki twierdzenia, to spełnia je także każdy proces $\lambda(x, y)$ z liczbą $\lambda > 0$. Przy dowodzie wystarczy ograniczyć się do dopuszczalnych procesów produkcji (x, y) ze zbioru

$$V(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z | \|x\| = 1 \wedge d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon\}.$$

Z definicji mamy $d(x, \mathbb{N}) = \inf_{x' \in \mathbb{N}} f(x, x')$, gdzie $f(x, x') = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\|$, lub inaczej:

$$d(x, \mathbb{N}) = \inf_{s \in S} f(x, s),\ s = \frac{x'}{\|x'\|}.$$

[9] Dowód jest (dostosowaną do specyfiki obecnego modelu) wersją lematu Radnera (1961). Odległość (kątową) wektora x od pojedynczej magistrali $N_s = \{\lambda s | \lambda > 0\}$ postaci $d(x, N) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - s \right\|$ w oryginalnym dowodzie Radnera zastępuje obecnie odległość $d(x, \mathbb{N})$ wektora x od zbioru (wiązki) magistral $\mathbb{N}$. Technika dowodzenia pozostaje bez zmian.

Ponieważ $f \in C^0(R_+^n \setminus \{0\} \times R_+^n \setminus \{0\})$ oraz zbiór S jest zwarty, więc

$$\forall x \geq 0\ \exists \bar{s} \in S\ \big(f(x, \bar{s})\big) = \inf_{s \in S} f(x, s). \tag{14}$$

Ustalmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że zbiór $V(\varepsilon)$ jest zwarty (ograniczony i domknięty w R^{2n}).

(Ograniczoność) Załóżmy, że $\exists \{x^i, y^i\}_{i=1}^{\infty}, (x^i, y^i) \in V(\varepsilon),\ \|(x^i, y^i)\| \underset{i}{\to} +\infty$. Wobec tego, że $\forall i\ (\|x^i\| = 1)$ wnioskujemy, iż $\|y^i\| \underset{i}{\to} +\infty$. Wtedy, zgodnie z **(G1)**, istnieje ciąg dopuszczalnych procesów

$$(\xi^i, \eta^i) = \left(\frac{x^i}{\|y^i\|}, \frac{y^i}{\|y^i\|}\right) \in Z,\ i = 1, 2, \ldots,$$

$\xi^i \underset{i}{\to} 0$, $\|\eta^i\| = 1$, zatem istnieje podciąg $\{\xi^{i_j}, \eta^{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do granicy $(0, \bar{\eta})$ oraz $\|\bar{\eta}\| = 1$. Przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym w R^{2n}, więc $(0, \bar{\eta}) \in Z$, co przeczy jednak **(G3)**. Tym samym $V(\varepsilon)$ jest zbiorem ograniczonym.

(Domkniętość) Niech $\{x^i, y^i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem procesów ze zbioru $V(\varepsilon)$ zbieżnym do granicy $(\bar{x}, \bar{y})$. Wówczas oczywiście $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ oraz $\|\bar{x}\| = 1$. Pokażemy, że $d(\bar{x}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon$. Wobec ciągłości funkcji $f(\cdot\,,\cdot)$ i zwartości zbioru S, zgodnie z (14):

$$\forall i\ \exists s^i \in S\left(f(x^i, s^i) = \inf_{s \in S} f(x^i, s) = d(x^i, \mathbb{N}) \geq \varepsilon\right)$$

oraz

$$\exists \{s^{i_j}\}_{j=1}^{\infty}\left(s^{i_j} \underset{j}{\to} \bar{s} \in S \wedge f(x^{i_j}, s^{i_j}) = \inf_{s \in S} f(x^{i_j}, s) = d(x^{i_j}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon\right).$$

Wówczas $f(\bar{x}, \bar{s}) = d(\bar{x}, \mathbb{N}) \geq \varepsilon$. Zbiór $V(\varepsilon)$ jest zatem domknięty w R^{2n}. Jest także ograniczony, więc jest zwarty.

W myśl **(G8')**

$$\forall (x, y) \in V(\varepsilon)(0 \leq \langle \bar{p}, y \rangle < \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle),$$

czyli

$$\forall (x, y) \in V(\varepsilon)\left(0 \leq \beta(x, y, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, y \rangle}{\langle \bar{p}, x \rangle} < \alpha_M\right).$$

Funkcja $\beta(\cdot,\cdot,\bar{p})$ jest ciągła na $V(\varepsilon)$ jako iloraz dwóch funkcji liniowych z niezerową funkcją w mianowniku (wszędzie na $V(\varepsilon)$ mamy bowiem $\langle\bar{p},x\rangle > 0$), więc w myśl twierdzenia Weierstrassa istnieje rozwiązanie zadania

$$\max_{(x,y)\in V(\varepsilon)} \beta(x,y,\bar{p}) = \beta_\varepsilon < \alpha_M.$$

Wówczas

$$\exists\delta_\varepsilon > 0 \forall(x,y) \in V(\varepsilon)(\beta(x,y,\bar{p}) \le \alpha_M - \delta_\varepsilon),$$

(wystarczy przyjąć $\delta_\varepsilon = \alpha_M - \beta_\varepsilon > 0$) lub równoważnie:

$$\forall(x,y) \in V(\varepsilon)(\langle\bar{p},y\rangle \le (\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle\bar{p},x\rangle),$$

c.n.d. ■

5. OPTYMALNE PROCESY WZROSTU. „SŁABE" TWIERDZENIE O WIELOPASMOWEJ MAGISTRALI

Interesuje nas następujące zadanie maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach von Neumanna w końcowym okresie t_1 horyzontu T[10]:

$$\max \langle\bar{p},y(t_1)\rangle$$

$$\text{p.w. } (11)-(12).$$

Przy założeniach **(G1)−(G8)** zadanie to ma rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, które nazywamy $(y^0,t_1,\bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu (trajektorią produkcji) w gospodarce Gale'a, zob. np. Panek (2003, tw. 5.7). Kolejne twierdzenie (twierdzenie 6) mówi o specyficznej stabilności optymalnych procesów wzrostu w gospodarce Gale'a w otoczeniu wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$. Decydujemy się na przedstawienie jego dowodu, mimo że jest on wzorowany na dowodach podobnych twierdzeń w gospodarce Gale'a z pojedynczą magistralą, przedstawionych przez autora, m.in. w pracach (2003, tw. 5.8; 2013, tw. 4). W szczegółach różni się na tyle istotnie, iż uznaliśmy jego przytoczenie za zasadne.

[10] Tzw. zagadnienie wzrostu docelowego.

□ **Twierdzenie 6** („Słabe" twierdzenie o magistrali). Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G8)** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$d(y^*(t), \mathbb{N}) \geq \varepsilon \tag{15}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód. Z definicji $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zgodnie z (9), mamy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \; t = 0, 1, \ldots, t_1 - 1. \tag{16}$$

Załóżmy, że w okresach $\tau_1, \ldots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (15). Wówczas, w myśl twierdzenia 5 istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \; t = \tau_1, \ldots, \tau_k. \tag{17}$$

Łącząc (16), (17) dostajemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1 - k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle. \tag{18}$$

Z założenia istnieje $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzący w okresie $\check{t} < t_1$ do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$, zatem istnieje liczba $\sigma > 0$ i taki wektor $s \in S$, że $\sigma s = \check{y}(\check{t})$ oraz (y^0, t_1) – dopuszczalny jest proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), t = 0, 1, \ldots, \check{t}, \\ \sigma s \alpha_M^{t - \check{t}}, \; t = \check{t} + 1, \ldots, t_1 \end{cases} \tag{19}$$

utworzony ze „sklejenia" procesu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ i stacjonarnego procesu postaci (13) z tempem α_M (dla $t > \check{t}$). Wówczas

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t}} \langle \bar{p}, s \rangle > 0. \tag{20}$$

Z (18), (20) wynika nierówność:

$$\sigma \alpha_M^{t_1 - \check{t}} \langle \bar{p}, s \rangle \leq \alpha_M^{t_1 - k} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0 \rangle,$$

a stąd, po przekształceniach otrzymujemy:

$$k \leq \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)} = B, \tag{21}$$

gdzie $0 < A = \max_{s \in S} \frac{\alpha_M^{\check{t}} \langle \bar{p}, y^0 \rangle}{\sigma \langle \bar{p}, s \rangle} < +\infty$. W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od max $\{0, B + 1\}$. ■

Twierdzenie orzeka, że jeżeli choćby jeden dopuszczalny proces wzrostu prowadzi ze stanu początkowego y^0 do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$, to w długich okresach czasu każdy optymalny proces wzrostu „prawie zawsze" przebiega w jej dowolnie bliskim otoczeniu (kątowym).

6. UOGÓLNIENIA

Twierdzenie 4 o istnieniu optymalnego stanu równowagi von Neumanna $\{\alpha_{M,} (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ pozostaje prawdziwe po zastąpieniu warunku silnej regularności **(G7)** następującym warunkiem słabej regularności gospodarki Gale'a:

(G7') $\forall s \in S\ \exists t_s < +\infty \wedge \exists (s, t_s)$ – dopuszczalny proces $\{y(t)\}_{t=0}^{t_s}$ spełniający warunek:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z,\ t = 0, 1, \ldots, t_s - 1,$$

$$y(0) = s, y(t_s) > 0.$$

Mówi o tym twierdzenie 4'. Każdy (unormowany do 1) wektor $s \in S$ spełniający warunek **(G7)** jest dodatni (zob. twierdzenie 2(ii)), natomiast obecnie zbiór S może zawierać zarówno wektory dodatnie jak i półdodatnie (nieujemne i niezerowe)[11]. Warunek **(G7')** jest równoważny z warunkiem głoszącym, że z każdego miejsca (punktu) wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$ pewien proces wzrostu w skończonym czasie t_s prowadzi do dodatniego wektora produkcji $y(t_s)$. Oczywiście, warunek ten jest słabszy od **(G7)**, tzn. jeżeli zachodzi **(G7)**, to zachodzi także **(G7')** (dla $t_s = 0$).

□ **Twierdzenie 4'.** Przy założeniach **(G1)–(G6)**, **(G7')** zachodzą warunki (9)–(10) (równoważnie (9')–(10')).

Dowód warunku (9) nie zmienia się (przebiega analogicznie jak w twierdzeniu 4). Przechodząc do dowodu warunku (10) zauważmy, że wprawdzie przy założeniach

[11] Odnosi się to rzecz jasna także do magistral, na których mogą obecnie znajdować się nie tylko dodatnie, ale również półdodatnie wektory produkcji. Zwracamy także uwagę, że po zastąpieniu warunku **(G7)** warunkiem **(G7')** zbiór S pozostaje zwarty; zob. dowód twierdzenia 2(i).

(G1)−(G6) każdy optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$ spełnia nierówność $0 \leq \alpha_M \bar{x} \leqq \bar{y}$ i wobec tego

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}(\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \geq \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle \geq 0),$$

ale wektor produkcji $\bar{y}$ nie musi być dodatni. Z drugiej strony, w myśl (9)

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \subset Z(\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle),$$

zatem każdy proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$ spełnia warunek:

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle. \tag{22}$$

Wobec (9) i **(G7')** $\forall s \in S$ istnieje taki (s, t_s) – dopuszczalny proces $\{y(t)\}_{t=0}^{t_s}$, że

$$0 < \langle \bar{p}, y(t_s) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y(t_s - 1) \rangle \leq \ldots \leq \alpha_M^{t_s} \langle \bar{p}, y(0) \rangle = \alpha_M^{t_s} \langle \bar{p}, s \rangle, \tag{23}$$

gdzie $s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$, czyli (zważywszy na definicję zbioru *S*; zob. (6)):

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}(\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0).$$

Stąd i z (22) otrzymujemy warunek (10) (równoważnie (10')). ■

„Słabe" twierdzenie o magistrali (twierdzenie 6) zachowuje moc, gdy warunek **(G7)** zastąpimy słabszym warunkiem **(G7')**. Co więcej, zastąpienie w warunku początkowym (14) półdodatniego wektora produkcji y^0 wektorem dodatnim zapewnia istnienie $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalnego procesu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ prowadzącego do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$ już w okresie $\check{t} = 1$. „Słabe" twierdzenie o magistrali przyjmuje wówczas postać następującą.

□ **Twierdzenie 6'.** Jeżeli gospodarka Gale'a z dodatnim początkowym wektorem produkcji y^0 spełnia warunki **(G1)−(G6)**, **(G7')**, **(G8)**, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna *k*, że liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (15) nie przekracza *k*. Liczba *k* nie zależy od długości horyzontu *T*.

Dowód jest dosłownym powtórzeniem dowodu twierdzenia 6, z tym że obecnie (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ przyjmuje postać następującą:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & t = 0, \\ \sigma s \alpha_M^t, & t = 1, \ldots, t_1, \end{cases}$$

gdzie $\sigma = \min_i \frac{y_i^0}{\bar{s}_i} > 0$. Zamiast warunku (20) mamy[12]:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1)\rangle = \sigma\alpha_M^{t_1}\langle \bar{p}, s\rangle > 0. \tag{20'}$$

W ten sposób zastąpienie warunku **(G7)** słabszym warunkiem **(G7')** znowu prowadzi do oszacowania (21) i zamyka dowód. ■

Niech u: $R_+^n \to R_+^1$ będzie ciągłą, wklęsłą, rosnącą i dodatnio jednorodną stopnia 1 społeczną funkcją użyteczności produkcji, spełniającą dodatkowo następujące warunki:

(G9) **(i)** $\exists a > 0\ \forall\, y \geq 0\ (u(y) \leq a\,\langle \bar{p}, y\rangle)$, **(ii)** $\forall s \in S\ (u(s)\ > 0)$[13].

Warunek **(i)** stanowi, że funkcję użyteczności można aproksymować (z góry) formą liniową (z wektorem tworzącym $a\bar{p}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią)[14]. Zgodnie z **(ii)** produkcję na magistrali charakteryzuje dodatnia użyteczność. Rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania

$$\begin{gathered}\max\ u(y(t_1))\\ \text{p.w. } (11)-(12)\end{gathered}$$

nazywamy (y^o, t_1, u) – optymalnym procesem wzrostu w gospodarce Gale'a[15].

□ **Twierdzenie 7.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)**–**(G9)** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k, iż liczba okresów czasu, w których (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek (15) nie przekracza k. Liczba k zależy od ε oraz nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód. Postępując analogicznie jak przy dowodzie twierdzenia 6 dochodzimy do warunku (18):

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_M^{t_1-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k\langle \bar{p}, y^0\rangle.$$

Stąd, wobec **(G9)**, otrzymujemy ograniczenie górne (wartości funkcji użyteczności):

---

[12] Parametry σ oraz α_M są bowiem dodatnie oraz $\langle \bar{p}, s\rangle > 0$ (zgodnie z (23)).

[13] Jeżeli zachodzi warunek **(G7)**, to (ii) można zastąpić równoważnym warunkiem: $u(y) > 0$ choćby dla jednego wektora $y > 0$.

[14] Zob. np. Takayama (1985, rozdz. 7). Warunki takie spełniają np. dodatnio jednorodne stopnia 1 funkcje użyteczności typu Cobba-Douglasa i CES oraz funkcja Leontiefa-Koopmansa.

[15] Przy przyjętych założeniach procesy takie istnieją dla dowolnego wektora początkowego $y^0 \geq 0$ i dowolnej długości (skończonego) horyzontu T.

$$u\big(y^*(t_1)\big) \leq a\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq a\alpha_M^{t_1-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k\langle \bar{p}, y^0\rangle, \tag{24}$$

gdzie a jest pewną liczbą dodatnią. Z drugiej strony, zważywszy na definicję (y^0, t_1, u) – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, własność **(i)**, **(ii)** funkcji użyteczności (warunek **(G9)**) oraz konstrukcję $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalnego procesu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$ (zob. (19)), dochodzimy do ograniczenia dolnego:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \geq u\big(\tilde{y}(t_1)\big) = u\left(\sigma s\alpha_M^{t_1-\check{t}}\right) = \sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}}u(s) > 0. \tag{25}$$

Z (24), (25) otrzymujemy nierówność:

$$\sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}}u(s) \leq a\alpha_M^{t_1-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k\langle \bar{p}, y^0\rangle,$$

co daje oszacowanie (21) liczby k, z tym że obecnie $0 < A = \max_{s\in S}\frac{a\alpha_M^{\check{t}}\langle \bar{p}, y^0\rangle}{\sigma u(s)} < +\infty$. Podobnie jak w twierdzeniu 6, w charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od max $\{0, B+1\}$, gdzie $B = \frac{\ln A}{\ln\alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)}$. ■

Twierdzenie 7, podobnie jak twierdzenie 6, pozostaje prawdziwe, gdy warunek **(G7)** zastąpimy w nim warunkiem **(G7')**. Jeżeli ponadto przyjmiemy, że początkowy wektor produkcji y^0 jest dodatni, wtedy dostajemy wersję „słabego" twierdzenia o magistrali podobną do twierdzenia 6'.

7. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione twierdzenia (6, 7) nawiązują do podobnych twierdzeń mówiących o własnościach optymalnych procesów wzrostu w gospodarce Gale'a z pojedynczą magistralą produkcyjną (jednym promieniem von Neumanna)[16]. W artykule uchylamy ten warunek i dopuszczamy istnienie w gospodarce Gale'a zbioru magistral, złożonego ze zwartej wiązki promieni von Neumanna. Obydwa udowodnione twierdzenia o wielopasmowej magistrali należą do relatywnie najprostszej grupy tzw. „słabych" twierdzeń mówiących wprawdzie o zbieżności optymalnych procesów do magistrali, jednak bez wskazania okresów czasu, w których zbieżność taka zachodzi. Z tego punktu widzenia inspirujące i zachęcające do dalszych badań są tzw. „silne" oraz „bardzo silne" twierdzenia o wielopasmowej magistrali na gruncie modeli Neumanna-Gale'a.

[16] Zob. np. wspomniane wcześniej prace: Nikaido (1968, rozdz. IV, tw. 13.8), Panek (2003, rozdz. 5, tw. 5.8), Takayama (1985, rozdz. 7).

LITERATURA

McKenzie L. W., (1976), Turnpike Theory, *Econometrica*, 44, 841–866.
McKenzie L. W., (1998), Turnpikes, *American Economic Review*, 88 (2), 1–14.
McKenzie L. W., (2005), Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, w: Arrow K. J., Intriligator M. D., (red.), *Handbook of Mathematical Economics*, ed. 2, vol. III, chapter 26, 1281–1355.
Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York.
Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE, Poznań.
Panek E., (2013), „Słaby" i „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–303.
Panek E., (2014), Niestacjonarna gospodarka Gale'a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 61 (1), 5–14.
Panek E., (2015a), Zakrzywiona magistrala w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Część I, *Przegląd Statystyczny*, 62 (2), 149–163.
Panek E., (2015b), Zakrzywiona magistrala w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Część II, *Przegląd Statystyczny*, 62 (2), 349–360.
Panek E., (2016), „Silny" efekt magistrali w modelu niestacjonarnej gospodarki z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 63 (2), 109–121.
Radner R., (1961), Paths of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem, *Review of Economic Studies*, 28 (2), 98–104.
Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.

GOSPODARKA GALE'A Z WIELOMA MAGISTRALAMI. „SŁABY" EFEKT MAGISTRALI

Streszczenie

W bogatej literaturze z teorii magistral zazwyczaj zakłada się, że wzorcowa ścieżka – zwana magistralą – do której w długich okresach czasu zbieżne są wszystkie optymalne procesy wzrostu, jest określona jednoznacznie. W modelu Gale'a (w wersji stacjonarnej) jej obrazem geometrycznym jest półprosta w przestrzeni stanów gospodarki, zwana promieniem von Neumanna. W artykule uchylamy założenie jednoznaczności magistrali (promienia von Neumanna) i badamy zachowanie stacjonarnej gospodarki typu Gale'a ze zwartą wiązką magistral, którą umownie nazywamy magistralą wielopasmową. Prezentujemy dowód kilku wariantów „słabego" twierdzenia o wielopasmowej magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale'a.

Słowa kluczowe: model wzrostu Gale'a, równowaga von Neumanna, warunek silnej (słabej) regularności, wielopasmowa magistrala produkcyjna, „słaby" efekt magistrali

GALE'S ECONOMY WITH MULTIPLE TURNPIKES. "WEAK" TURNPIKE EFFECT

Abstract

In the vast literature on turnpike theory it is generally assumed that the model path – called the turnpike – to which in a long time period all the optimal processes are convergent, is uniquely determined. Its geometric image in the Gale's model (in its stationary version) is a ray in the space of all states of the economy. We call it von Neumann's ray. In this paper we evade the assumption of the uniqueness of this turnpike (von Neumann's ray) and study the behaviour of the stationary Gale's economy with the compact turnpikes' bundle. We call it multilane turnpike. We present proofs for several variants of the "weak" multilane turnpike theorem in the stationary Gales' economy.

Keywords: Gale economy, von Neumann equilibrium, strong (weak) regularity condition, multilane production turnpike, "weak" turnpike theorem