PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVII – ZESZYT 1 – 2010

EWA DRABIK

ASYMPTOTYCZNIE EFEKTYWNA STRATEGIA ODRZUCANIA GIER OBARCZONYCH ZBYT DUŻYM RYZYKIEM

1. WSTĘP

W niektórych grach bilans ryzyka, strat i zagrożeń przewyższa wszelkiego rodzaju korzyści, które gracz może czerpać z gry. W takiej sytuacji gracz powinien raczej zrezygnować z uczestnictwa w rozgrywkach, oczywiście jeśli nie jest hazardzistą. Hazardzista jest to bowiem specyficzny rodzaj gracza, który na ogół nie zachowuje się racjonalnie i raczej nie ma awersji do ryzyka.

Inaczej sprawa wygląda w przypadku racjonalnie zachowujących się uczestników rynku, którzy w wielu różnych sytuacjach ekonomicznych utożsamiani są z graczami. Przykładem może być uczestnictwo w grach o „charakterze społecznym", a z tymi bardzo często mamy do czynienia współdziałając z grupą jednostek mających wspólne cele, np. w zakładzie pracy. W tym przypadku gra się może toczyć o zasoby, o strukturę formalną i miejsca poszczególnych graczy w owej strukturze. Jeżeli nie uczestniczy się w grze, świadomie lub nie, to można wypaść z tej struktury. Podobnie jak w przypadku wielu innych struktur rynkowych, których istnienie uzależnione jest głównie od zachowań uczestników tychże struktur.

Zwyczajowo przyjmuje się, że racjonalnie działający gracz ma awersję do ryzyka. Awersja do ryzyka jest koncepcją znaną od dawna, na przykład z ekonomii, teorii gier, finansów i psychologii i dotyczy ona zachowań konsumentów, graczy oraz inwestorów działających w warunkach niepewności. Stopień awersji do ryzyka można wyrazić liczbowo. Najbardziej znane miary awersji do ryzyka zostały wprowadzone przez Johna W. Pratta (1964) oraz Kennetha Arrowa (1965). Awersja do ryzyka jest jedną z ważniejszych charakterystyk zjawisk ekonomicznych, które były dyskutowane w ostatnich latach. Bardzo ważny jest problem uczestnictwa w przedsięwzięciach, inwestycjach lub grach, w tym rynkowych, które charakteryzują się dużym ryzykiem. Z punktu widzenia gracza (np. uczestnika rynku) niezwykle istotne jest ustalenie maksymalnej straty oraz minimalnego zysku, przy których warto uczestniczyć w grze. Problemami tymi w ostatnich latach zajmowało się wieku autorów [9], [10], [13].

Problem awersji do ryzyka został poruszony, a następnie rozwinięty przy okazji omawiania teorii perspektywy (*prospect theory*) przez Daniela Kahnemana i Amosa Tversky'ego (1979). Teoria ta stwierdza, m.in., że gospodarka to nie tylko prawidłowości, ale również ludzie, którzy nie zawsze zachowują się racjonalnie. Pokazali oni również, że uczestnicy rynku inaczej odbierają stratę, a inaczej taki sam co do wartości bezwzględnej zysk. Innymi słowy, poczucie straty bywa bardziej bolesne niż radość z takiego samego co do wartości bezwzględnej zysku. W 1991 r. Kahneman i Tversky ustalili i przebadali empirycznie, że najbardziej pożądanym stosunkiem straty do zysku jest 1:2 (*loss – aversion to gain – attraction*) [13]. Wielu autorów, takich jak Rabin, Thaler (2001), Segal, Spivak (1990), Epstein (1992) prowadziło rozważania dotyczące uczestnictwa w grach o zróżnicowanych stawkach, a także rozważało stosunek do ryzyka uczestników takich gier w różnych kontekstach, przy różnych funkcjach użyteczności. W 2000 r. Matthew Rabin sformułował jedno z ważniejszych twierdzeń odnoszące się do graczy z awersją do ryzyka, którzy maksymalizują swoją funkcję użyteczności, tzw. *calibration theorem* [10]. W uproszczeniu mówi ono, że przy ustalonym poziomie zamożności możliwe jest ustalenie zysku i straty, przy których gracz powinien zrezygnować z gry. Ponadto grę należy odrzucić również wówczas, gdy zysk jest mniejszy od założonego (wyliczonego), zaś strata większa od założonej.

Problem odrzucania tzw. złych gier był również przedmiotem rozważań Ignacio Palacios – Huerty oraz Roberta Serrano [9]. Zaprezentowali oni pewne cechy bezpiecznych gier. Sformułowali przy tym bardzo istotne twierdzenie pozwalające ustalić graniczną wartość zysku i straty, przy których gra może być uznana za „bezpieczną" – zostanie ono sformułowane w dalszej części pracy. Robert Aumann oraz wspomniany Serrano (2007) w oparciu o miary awersji do ryzyka Arrowa – Pratta zdefiniowali tzw. Indeksy *riskiness*, których własności scharakteryzowali, m.in., przy użyciu aksjomatów.

Rozważania prowadzone były wyłącznie w odniesieniu do gier jednoetapowych. Celem niniejszej pracy jest zaprezentowanie strategii wyznaczającej graniczne zyski i straty w grach rozgrywanych wielokrotnie, a konkretnie wieloetapowych. W tym celu została zaadoptowana asymptotycznie efektywna strategia, która po raz pierwszy została wykorzystana do rozwiązania problemu jednorękiego bandyty (*one – armed bandit problem*) przez T.L. Lai i Herberta Robbinsa [5].

Praca została zorganizowana w następujący sposób. W punkcie drugim przedstawiono elementy teorii związanej ze zróżnicowanym stosunkiem do ryzyka uczestników rynku, a także zaprezentowano twierdzenie Palacios – Huerty oraz Serrano z 2006 roku dotyczące wyznaczania granicznych wartości zysku i straty, przy których należy zrezygnować z uczestnictwa w grze rozgrywanej tylko jeden raz. W punkcie trzecim przedstawiono strategię dotyczącą obliczania granicznych wartości zysku i straty, przy których należy odrzucić grę wieloetapową w konkretnej z faz.

2. PODSTAWOWE INFORMACJE ZWIĄZANE ZE ZRÓŻNICOWANYM STOSUNKIEM DO RYZYKA UCZESTNIKÓW RYNKU

2.1. ELEMENTY TEORII OCZEKIWANEJ UŻYTECZNOŚCI

Wiele ważnych zagadnień związanych z podejmowaniem decyzji w warunkach niepewności zawiera element ryzyka. Przez wiele lat obowiązywało w ekonomii założenie, że uczestnicy rynku mają awersję do ryzyka, a decyzje przez nich podejmowane są racjonalne. Awersja do ryzyka jest założeniem znanym nie tylko z ekonomii, ale również teorii gier, finansów, psychologii. Mówiąc o awersji do ryzyka warto wspomnieć o teorii oczekiwanej użyteczności oraz innych pojęciach związanych z tym zagadnieniem.

Oczekiwaną użyteczność w sensie von Neumana – Morgensterna można zapisać w postaci

$$V = \sum_x p(x)u(x) \tag{1}$$

gdzie:
u: $X \to R$ jest elementarną funkcją użyteczności w sensie Bernoulliego,
p – prawdopodobieństwem zajścia określonego zdarzenia,
X – jest zbiorem zdarzeń.

Prostym przykładem, którym można posłużyć się podczas omawiania kolejnych pojęć jest loteria (*simple lottery*). Prawdopodobieństwo p_i reprezentuje w tym przypadku prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia i, zaś n-tka $L = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \geq 0$ określa loterię przy czym $i = 1, \ldots, n$ oraz $\sum_i p_i = 1$. Loterię można również zilustrować w postaci geometrycznej jako punkt n wymiarowego simpleksu

$$\Delta = \{p \in [0,1]^n : p_1 + \ldots + p_n = 1\}.$$

Niech $F_z(x) = P\{z \leq x\}$ będzie dystrybuantą odpowiadającą zmiennej losowej z. Gracz dokonuje wyboru zgodnie z następującą wskazówką

F_z jest bardziej preferowana niż F_y, tj. $F_z \succ F_y$ wtedy, i tylko wtedy, gdy

$V(F_z) \geq V(F_y)$, gdzie $V(F_z) = \int u(x)dF_z(x)$ lub równoważnie $V(F_z) = \sum_x p(x)u(x)$; (analogicznie określa się $V(F_y)$).

W dalszym ciągu zakłada się, że zmienna losowa z przyjmuje dwie wartości z_1 lub z_2. Niech p oznacza prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia z_1, zaś $(1 - p)$ prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia z_2. Przez u w dalszym ciągu oznaczana będzie elementarna funkcja użyteczności, której oczekiwaną wartość można określić następująco

$$E(u) = pu(z_1) + (1-p)u(z_2).$$

Dochód z loterii zwany również ekwiwalentem pewności (*certainty equivalent*) oznacza się jako $C(z)$; $V(C(z)) = E(u)$. Z kolei $\prod(z) = E(z) - C(z)$ jest premią za ryzyko. Premia ta określa dochód, który może uzyskać gracz podejmujący ryzyko.

Przyjmuje się, że gracz wykazuje:

– awersję do ryzyka (*risk aversion*) jeżeli $C(z) < E(z)$ dla każdego $z \in$ M,

– jest neutralny wobec ryzyka (*risk neutral*) jeżeli $C(z) = E(z)$ dla każdego $z \in$ M,

– nie ma awersji do ryzyka (kocha ryzyko – *risk – loving*) $C(z) > E(z)$ dla każdego $z \in$ M, gdzie M jest zbiorem zmiennych losowych odpowiadających badanemu zjawisku.

Słuszne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Niech $u : R \to R$ będzie monotonicznie rosnącą elementarną funkcją użyteczności (Bernoulliego) reprezentującą relację preferencji $\geq_h$ na zbiorze M, która jest funkcją monotonicznie rosnącą. Wówczas

(i) u jest wklęsła wtedy, i tylko wtedy, gdy relacja preferencji $\geq_h$ związana jest z awersję do ryzyka,

(ii) u jest wypukła wtedy, i tylko wtedy, gdy relacja preferencji $\geq_h$ związana jest z brakiem awersji do ryzyka,

(iii) u jest liniowa wtedy, i tylko wtedy, gdy relacja preferencji $\geq_h$ związana jest z neutralnym stosunkiem do ryzyka.

Wiadomo również, że wraz ze zmianą zamożności w gracz, którego użyteczność wynosi u wykazuje

– malejącą bezwzględną awersję do ryzyka (*decreasing absolute risk aversion* – DARA) i ma to miejsce wówczas, gdy

$$\prod(w, u) > \prod(w + a, u) \text{ dla każdego } a > 0,$$

– rosnącą absolutną awersję do ryzyka (*increasing absolute risk aversion* – IARA):

$$\prod(w, u) < \prod(w + a, u) \text{ dla każdego } a > 0,$$

– stałą absolutną awersję do ryzyka (*constant absolute risk aversion* – CARA):

$$\prod(w, u) < \prod(w + a, u) \text{ dla każdego } a > 0,$$

gdzie $\prod(.)$ jest opisaną wcześniej awersją do ryzyka.

Najbardziej znane miary awersji do ryzyka zostały wprowadzone w latach 60. przez Arrowa i Pratta.

2.2. MIARY AWERSJI DO RYZYKA

Niech w oznacza zamożność (np. bogactwo, dochód, stopę zwrotu).

Definicja 1. Współczynnik Arrowa – Pratta bezwzględnej awersji do ryzyka (*absolute risk aversion* – ARA) względem bogactwa w określa się następująco

$$r_A(w,u) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \tag{2}$$

gdzie u – jest podwójnie różniczkowalną elementarną funkcją użyteczności.

Współczynnik względnej awersji do ryzyka (*relative risk aversion* – RRA) określa się w następujący sposób

$$r_r(w,u) = w \cdot r_A(w,u). \tag{3}$$

Bezwzględna awersja do ryzyka jest miarą reakcji gracza na niepewność związaną z bezwzględnymi zmianami zamożności. Względna awersja do ryzyka wyraża stosunek gracza względem „niepewności"[1] związanej ze względnymi (procentowymi) zmianami poziomu jego zamożności. Gracz z malejącą awersją do ryzyka wraz ze wzrostem zamożności będzie przeznaczał coraz większą kwotę na ryzykowną grę. Gracze mogą mieć również zróżnicowany stopień awersji do ryzyka.

Niech $u_1(.)$, $u_2(.)$ będą dwiema elementarnymi funkcjami użyteczności. Słuszne jest następujące twierdzenie, które stwierdza, m.in., że warunki (i)-(iv) są równoważne [7].

Twierdzenie 2. Gracz, którego użyteczność wynosi $u_1(.)$ ma większą awersję do ryzyka niż gracz, którego użyteczność wynosi $u_2(.)$ jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków.

(i) $r_A(w,u_1) > r_A(w,u_2)$ dla każdego poziomu zamożności w,

(ii) istnieje taka wklęsła funkcja $\Psi(.)$, że $u_2(w) = \Psi(u_1(w))$ dla każdego w ($u_1(.)$ jest bardziej wklęsła" niż $u_2(.)$),

(iii) $C(Z,u_2) \leq C(Z,u_1)$ dla pewnej zmiennej losowej $z \in M$.

(iv) $\prod(w, u_2) \geq \prod(w, u_1)$ dla pewnego w,

gdzie $C(.)$ jest ekwiwalentem pewności, $\prod(.)$ premią za ryzyko.

Gracz wykazuje bezwzględną awersję do ryzyka jeśli $r_A(w, u)$ jest malejącą funkcją dla określonej postaci $u(.)$. Dobór $u(.)$ jest zatem bardzo ważnym problemem merytorycznym omawianej teorii. W tabeli 1 zostały zaprezentowane przykładowe funkcje użyteczności i ich klasyfikacja pod względem zmian bezwzględnej i względnej awersji do ryzyka.

Tabela 1

Przykładowe funkcje użyteczności i ich klasyfikacja pod względem zmian bezwzględnej i względnej awersji do ryzyka

Funkcja użyteczności	Bezwzględna awersja do ryzyka	Względna awersja do ryzyka
$u(w) = \ln w$	malejąca	stała
$u(w) = (w + C)^{-\gamma}\ c > 0, \gamma \in (0,1)$	malejąca	rosnąca
$u(w) = -e^{-\gamma w}\ \gamma > 0$	stała	rosnąca
$u(w) = -e^{-2w^{-\frac{1}{2}}}$	malejąca	malejąca

Źródło: za pracą [8].

[1] Niektórzy autorzy zalecają, aby pojęcie niepewności wyraźnie odróżnić od pojęcia ryzyka. Kahneman i Tversky w stworzonej przez siebie teorii perspektywy stwierdzili, że istotnym elementem zachowań uczestników rynku jest asymetria związana ze sposobem podejmowania tych decyzji, w wyniku których można spodziewać się strat oraz tych, które mogą przynieść zyski. Ponadto gracze są skłonni wybrać ryzyko, bez względu na okoliczności, jeśli uważają swoje postępowanie za właściwe. W związku z tym autorzy twierdzą, że gracze mają raczej awersję do strat niż do ryzyka.

Należy podkreślić, że zaprezentowane w tabeli 1 funkcje użyteczności charakteryzują inwestora wykazującego awersję do ryzyka. Inni autorzy, np. Rabin [10] zaprezentowali inne funkcje użyteczności, takie jak na przykład

$$u(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}\gamma \geq 0,$$

a także

$$u(w) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{w} \text{ dla } w \notin (19, 20)$$
$$u(w) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{19} - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right](w-19)^2 \text{ dla } w \in [19, 20].$$

Problem doboru $u(.)$ jest szeroko dyskutowany, gdyż przyjmuje się, że nie każdy gracz z taką samą siłą unika ryzyka. Podczas rozważań dotyczących różnych zagadnień stosowane są inne funkcje użyteczności, tzn. o różnych postaciach analitycznych i różnych własnościach wynikających ze znaków pierwszej i drugiej pochodnej [9], [10], [13]. Generalnie jednak stwierdzono, że podstawowe charakterystyki tejże funkcji, przy założeniu, że gracze maksymalizują swoją oczekiwaną użyteczność, są „słabo" wrażliwe na rodzaj indywidualnej skłonności do ryzyka reprezentowanej przy pomocy bezwzględnej i względnej awersji do ryzyka.

Oprócz wymienionych miar Arrowa – Pratta istnieją inne metody pomiaru awersji do ryzyka. W 1981 r. Ross wprowadził pojęcie silnej miary awersji do ryzyka (*stronger risk – aversion measurement*). Idea konstrukcji wspomnianej miary jest następująca.

Niech u i v będą elementarnymi funkcjami użyteczności. Przyjmuje się, że u odpowiada silniejszej awersji do ryzyka niż v jeśli istnieje $\lambda > 0$ takie, że dla każdych dwóch poziomów zamożności w i w_1 zachodzi

$$\frac{u''(w)}{v''(w)} \geq \lambda \geq \frac{u'(w_1)}{v'(w_1)}. \tag{3}$$

Jeżeli $w = w_1$ to mamy do czynienia z miarami Arrowa – Pratta. Tak więc silna awersja do ryzyka (SRAM) implikuje awersję do ryzyka w sensie Arrowa – Pratta. Odwrotna implikacja nie zachodzi. Ross sformułował również poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3. Niech u i v będą podwójnie różniczkowalnymi elementarnymi funkcjami użyteczności. Następujące warunki są równoważne.

(i) $\frac{u''(w)}{v''(w)} \geq \lambda \geq \frac{u'(w_1)}{v'(w_1)}$ dla każdych dwóch poziomów zamożności w i w_1.

(i) istnieje $\lambda > 0$ oraz taka malejąca, wklęsła funkcja $G : R \to R$ ($G' < 0$ oraz $G'' < 0$), że $v(w) = \lambda u(w) + G(w)$ dla każdego poziomu zamożności $w \in$ R.

(i) $\prod(w, u) \geq \prod(w, v)$ dla każdego poziomu zamożności $w \in$ R.

2.3. „BEZPIECZNE" GRY

We wstępie zostało wspomniane, że w trakcie rozważań dotyczących zachowań graczy, inwestorów, konsumentów czy też innych uczestników rynku, w sposób naturalny nasunął się problem ich uczestnictwa w zbyt ryzykownych przedsięwzięciach. Gracze nie są skłonni do uczestnictwa w grach przynoszących zbyt małe zyski lub zbyt duże straty. W 1991 r. Kahneman i Tversky stwierdzili, że zamiast o awersji do ryzyka należy raczej mówić o awersji do strat (*loss aversion*) [13]. W 2006 r. Palocious – Huerta oraz Serrano zaproponowali i udowodnili twierdzenie pozwalające za pomocą obliczeń ustalić graniczną wartość straty do zysku, przy których grę można uznać za bezpieczną i w niej uczestniczyć [9].

Niech U oznacza zysk, μ stratę. Gracz odrzuca grę jeśli przegrana jest większa od μ, zaś wygrana mniejsza od U.

Twierdzenie 4. Niech u będzie rosnącą elementarną funkcją użyteczności odpowiadającą awersji do ryzyka. Niech I będzie przedziałem określonym na zbiorze liczb rzeczywistych. Dla każdego poziomu zamożności $w \in I$

$$\frac{1}{2}u(w+U)+\frac{1}{2}u(w-\mu)<u(w) \tag{4}$$

oraz istnieje takie $a^* > 0$, że współczynnik bezwzględnej awersji do ryzyka $r_A(w, u)$ jest większy niż a^* dla każdego $w \in I$. Największe takie a^* jest rozwiązaniem równania

$$f(a) = e^{a\mu} + e^{-aU} - 2 = 0. \tag{5}$$

Nie sposób przecenić wartości merytorycznej twierdzenia 3. Należy jednak zaznaczyć, że dotyczy ono wyłącznie gier rozgrywanych tylko jeden raz. W kolejnym rozdziale zostanie zaproponowana metoda, która pozwoli wyznaczyć graniczne wartości U i μ w grach wieloetapowych (rozgrywanych wielokrotnie).

3. ASYMPTOTYCZNIE EFEKTYWNA REGUŁA ALOKACJI

Załóżmy, że gracze uczestniczący w określonej grze mają awersję do ryzyka. Z punktu widzenia teorii perspektywy stworzonej przez Kahnemana i Tversky'ego, opartej na najnowszych osiągnięciach psychologii poznawczej wiadomo, że gracze o wiele boleśniej odczuwają stratę niż czerpią zadowolenie z takiego samego co do wartości bezwzględnej zysku. W związku z tym ważnym problemem staje się ustalenie wartości granicznych zysków i strat, które satysfakcjonowałyby uczestników gier rozgrywanych wielokrotnie.

W celu rozwiązania tego problemu celowa wydaje się konstrukcja takiej strategii uczestnictwa w grze, która nie przynosi zbyt dużych strat i nie daje zbyt małych zysków. W tym celu zostanie zaadoptowana asymptotycznie efektywna strategia stworzona w latach 80. XX wieku przez Lai i Robbinsa, która została wykorzystana do rozwiązania jedno- i wielorękich bandytów [5]. W niniejszej pracy zostanie wykorzystana do gier rozgrywanych wielokrotnie.

Literatura dotycząca problemów jedno- i wielorękich bandytów jest obszerna (zobacz np. bibliografię w pracy [5]). Nazwa jednoręki bandyta pochodzi od nazwy automatu do gry (*slot machine*), wyposażonego najczęściej w trzy bębny do gry ozdobione kolorowymi obrazkami oraz dźwignię lub przycisk. Po wrzuceniu pewnej kwoty i uruchomieniu dźwigni lub naciśnięciu przycisku umieszczone na bębnach symbole „ustawiają się" w różnych układach, co daje określoną „wygraną". Problemem tym zainteresowali się także naukowcy, którzy wykorzystali znane metody statystyczne do opisu różnych wariantów tej gry (w uproszczeniu rzecz ujmując), po czym rozważania swoje „przenieśli na grunt" teorii sterowania, biologii a także ekonomii. „Zaadoptowany" przez badaczy problem decyzyjny generalnie polega na tym, że na podstawie obserwacji wyników gry, gracz podejmuje decyzję, czy w konkretnej fazie będzie grał czy też nie, zaś jego celem jest maksymalizacja całkowitej (lub średniej) wygranej.

W dalszym ciągu zakłada się, że w_i ($i = 1, 2 \ldots$) oznacza odpowiednią stratę lub zysk w fazie i dowolnej gry rozgrywanej wielokrotnie (niekoniecznie jednorękiego bandyty). Niech $f(w, \theta_i)$ będzie funkcją gęstości dla w odpowiadającą pewnej mierze probabilistycznej v, gdzie funkcja $f(.,.)$ jest znana, zaś θ_i są nieznanymi parametrami należącymi do przestrzeni nieznanych parametrów Θ. Zakłada się również, że spełniony jest warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w| f(w, \theta) dv(w) < \infty \text{ dla każdego } \theta \in \Theta.$$

W trakcie gry sekwencyjnie zbierane są informacje dotyczące przeszłych zysków i strat $w_1, w_2 \ldots$ Innymi słowy, zbierane są dane historyczne, na podstawie których podejmowane są decyzje dotyczące uczestnictwa w kolejnej fazie gry. Regułę gry φ można traktować jako ciąg zmiennych losowych $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, przy czym $\varphi_t = 0$, kiedy gracz rezygnuje z gry, $\varphi_t = 1$, kiedy gracz decyduje się na kontynuację gry, W każdej z faz obliczane są statystyki μ_t, U_t odpowiadające „średnim" zyskom i stratom. Własności tych statystyk zostały zaprezentowane w pracy [5].

Niech $S_n = w_1 + \ldots + w_n$. Celem gracza jest osiągniecie największej z możliwych oczekiwanej wartości sumy wygranych S_n przy $n \to \infty$. Niech

$$\mu(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} w f(w;\theta) dv(w) \tag{6}$$

będzie oczekiwaną wypłatą w grze. Oczekiwaną sumę wypłat S_n w grze do fazy n można zapisać następująco

$$ES_n = \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=1}^{n} E\left(w_i I_{\{\varphi_i = j\}} \middle| \Im_{i-1}\right) = \sum_{j=0}^{1} \mu(\theta) T_n(j) \tag{7}$$

gdzie

$T_n(j) = \sum_{i=1}^{n} I_{\{\varphi_i = j\}} (j = 0,1)$ jest liczbą momentów, podczas których gracz prowadził grę do fazy n (jeśli $j = 1$) lub też liczbą momentów, podczas których gracz zrezygnował z gry do fazy n (jeśli $j = 0$),
$I_{\{.\}}$ jest indykatorem zdarzenia.

Zdarzenie $\{\varphi_n = j\}$ należy do σ- ciała $\Im_{n-1}$ generowanego przez poprzednie wartości $\varphi_1, w_2, \ldots, \varphi_{n-1}, w_{n-1}$.

Problem maksymalizacji ES_n jest równoważny minimalizacji następującego kosztu gry

$$R_n(\theta) = n\mu^* - ES_n = \sum_{j:\mu(\theta_j) < \mu^*} \left(\mu^* - \mu(\theta_j)\right) ET_n(j) \tag{8}$$

gdzie

$$\mu^* = \max\left\{\mu(\theta_0), \mu(\theta_1)\right\} = \mu(\theta^*) \text{ dla } \theta^* \in \left\{\theta_0, \theta_1\right\}.$$

Pomocniczo wprowadza się tzw. liczbę Kulbacka – Leiblera $I(\theta, \lambda)$, którą określa się za pomocą formuły

$$I(\theta, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{f(w;\theta)}{f(w;\lambda)} \cdot f(w;\theta) dv(w) \tag{9}$$

przy czym $0 < I(\theta, \lambda) < \infty$, jeżeli $\mu(\lambda) > \mu(\theta)$.

Lai – Robbins pokazali, że koszt wyrażony za pomocą formuły (8) można przedstawić jako ([5], Twierdzenie 1, str. 7)

$$R_n(\theta) \approx \left\{ \sum_{j:\mu(\theta_j) < \mu^*} \left(\mu^* - \mu(\theta_j)\right) / I\left(\theta_j, \theta^*\right) \right\} \log n \text{ przy } n \to \infty. \tag{10}$$

Autorzy pracy [3] pokazali również, że $R_n(\theta)$ przy $n \to \infty$ zbiega do asymptoty (jest zbieżny asymptotycznie). Skonstruowali również regułę gry φ minimalizującą $R_n(\theta)$, którą następnie nazwali asymptotycznie efektywną regułą alokacji (*asymptotically efficient allocation rule*). Zostanie ona zaprezentowana poniżej w odniesieniu do zysków i strat w dowolnej grze. Wcześniej jednak omówione zostaną własności, które powinny spełniać statystyki pomocnicze μ_n, $U_{n.}$, które wykorzystywane są przy konstrukcji strategii φ. Podany będzie także przykład, który zilustruje jaką postać przyjmują te statystyki oraz liczba Kulbacka – Leiblera dla konkretnego rozkładu $f(.;.)$, np. normalnego.

Niech $w_1, w_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie o funkcji gęstości $f(w; \theta)$ z odpowiadającą miarą probabilistyczną v, gdzie $\theta \in \Theta$ oznacza nieznany parametr. Górną granicę przedziału ufności dla nieznanej średniej $\mu(\theta)$ można zdefiniować za pomocą funkcji $g_{nt}: \Re^t \to \Re$ ($n = 1, 2, \ldots; t = 1, \ldots, n$), która to funkcja dla każdego $\theta \in \Theta$ spełnia następujące warunki.

(W1) $P_\theta\{r \le g_{nt}(w_1, \ldots, w_t)$ dla wszystkich $t \le n\} = 1 - o(n^{-1})$ dla każdego $r < \mu(\theta)$,

gdzie $o(n^{-1})$ jest pewną małą wartością zależną od $1/n$ przy $n \to \infty$.

$$\text{(W2)}\ \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\limsup_{n \to \infty} \sum_{t=1}^{n} P_\theta\{g_{nt}(w_1, \ldots, w_t) \ge \mu(\lambda) - \varepsilon\} / \log n\right) \le 1/I(\theta, \lambda)$$

jeżeli $\mu(\lambda) > \mu(\theta)$.

(W3) g_{nt} jest funkcją niemalejącą gdy $n \ge t$ dla każdego $t = 1, 2, \ldots$

Dodatkowo definiuje się estymator punktowy $h_t(w_1, \ldots, w_t)$ dla średniej $\mu(\theta)$, $h_t : \mathfrak{R}^t \to \mathfrak{R}$. Spełnia on warunki

(W4) $h_t \le g_{nt}$ dla każdego $\theta \in \Theta$.

$$\text{(W5)}\ P_\theta\left\{\max_t \left| h_t(w_1, \ldots, w_t) - \mu(\theta) \right| > \varepsilon\right\} = o(n^{-1}) \text{ dla każdego } \varepsilon > 0.$$

Można zauważyć, że warunek W5 jest spełniony dla średniej, tj. dla $h_t(w_1, \ldots, w_t) = (w_1 + \ldots + w_t)/t$, gdy $E_\theta w_i^2 < \infty (i = 1, \ldots, t)$.

Przykład. Przyjmijmy, że w_i $(i = 1, 2, \ldots)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym i znanej wariancji $\sigma^2 > 0$ oraz nieznanej wartości oczekiwanej $Ew_i = \theta$, $\mu(\theta) = \theta$, $\theta = (-\infty, \infty)$, ν – jest miarą Lesbegu'e. Funkcja gęstości jest postaci

$$f(w; \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(w - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Z prostych obliczeń wynika, że liczba Kulbacka – Leiblera przyjmuje postać

$$I(\theta, \lambda) = \frac{(\theta - \lambda)^2}{2\sigma^2}.$$

Po podstawieniu $I(\theta, \lambda)$ do wzoru (10) i dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy równość

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} ES_n = \mu^* .$$

A zatem średnia wypłata na jednostkę czasu może być równa oczekiwanej wypłacie w dowolnej z faz gry. Estymator punktowy $h_t(w_1, \ldots, w_t)$ odpowiada średniej

$$h_t(w_1, \ldots, w_t) = (w_1 + \ldots + w_t)/t = \bar{w}_t.$$

Z kolei górną granicę przedziału ufności dla średniej można wyrazić za pomocą formuły

$$g_{nt}(w_1, \ldots, w_t) = \bar{w}_t + \sigma(2a_{nt})^{1/2} \text{ dla } n \geq t$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym,
a_{nt} ($n = 1, 2, \ldots; t = 1, \ldots, n$) jest dodatnią stałą taką, że dla każdego t, a_{nt} jest niemalejąca dla $n \geq t$
oraz istnieje $\varepsilon \to 0$ takie, że spełniona jest nierówność

$$\left| a_{nt} - \frac{\log n}{t} \right| \leq \frac{\varepsilon(\log n)^{1/2}}{t^{1/2}} \text{ dla każdego } t \leq n.$$

Analiza dotycząca innych rozkładów funkcji $f(.,.)$ została zaprezentowana w pracy [3].

W dalszym ciągu niech $w_1, \ldots, w_{T_n(j)}$ oznacza sukcesywne obserwacje zysków i strat do fazy n. Należy zauważyć, że w przypadku rozważań prowadzonych w niniejszej pracy, $T_n(0) + T_n(1) = n$, przy czym $T_n(0)$ oznacza liczbę chwil do fazy n, podczas których gracz zgodnie ze strategią nie uczestniczył w grze, zaś $T_n(1)$ oznacza liczbę chwil do fazy n, podczas których gracz prowadził grę.

Wspomniane wcześniej statystyki pomocnicze to

$$\mu_n(j) = h_{T_n(j)}(w_1, \ldots, w_{T_n(j)})$$
$$U_n(j) = h_{T_n(j)}(w_1, \ldots + w_{T_n(j)}).$$

Strategia gry φ jest następująca.

1) Przez dwie pierwsze fazy gry gracz prowadzi grę i zbiera informacje o wygranych lub stratach w_1, w_2.

2) W fazie $(n + 1)$ $(n \geq 2)$ gracz podejmuje decyzję dotyczącą dalszej gry: $\varphi_{n+1} = 1$ decyduje się na grę, $\varphi_{n+1} = 0$ rezygnuje z gry.

a) jeżeli $\mu_n \leq U_n$ to $\varphi_{n+1} = 1$,

b) jeżeli $\mu_n > U_n$ to $\varphi_{n+1} = 0$.

Strategia φ jest asymptotycznie efektywna, co oznacza, że koszt takiej gry przy $n \to \infty$ zbiega do asymptoty. Jest to szczególnie ważne, gdy udział w grze jest obowiązkowy, a można jedynie zrezygnować z uczestnictwa w pojedynczych fazach gry.

Autorka niniejszej pracy zastosowała powyższą, aczkolwiek nieco inaczej sformułowaną strategię do gry na giełdzie $k \geq 1$ akcjami spółek (akcje odpowiadały k ramionom). Przeprowadzone symulacje komputerowe dla giełd: NYSE (New York Stock Exchange) oraz Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie pokazały, że w dłuższym okresie czasu, po przetestowaniu akcji dużej liczby spółek oraz uwzględnieniu kosztów transakcji należałoby raczej zrezygnować z dywersyfikacji portfela (przy dużym n) i zdecydować się na grę akcjami niewielkiej liczby spółek, przynoszących w dłuższym horyzoncie czasowym najwyższe dochody. Szczegółowe badania pokazały, że czasami najlepiej, aby była to jedna spółka [3].

Strategia zaprezentowana w niniejszej pracy w zamyśle odnosi się do innych niż jednoręki bandyta, czy też giełda gier powtarzanych wielokrotnie. Przeprowadzenie symulacji wymaga jednak sporych nakładów. Należałoby bowiem uwzględnić w celach porównawczych opisane po części w rozdziale drugim najnowsze osiągnięcia psychologii poznawczej oraz badania przeprowadzone przez Palacios – Huertę i Serrano [9].

Politechnika Warszawska

LITERATURA

[1] Aumann R.J., Serrano R., [2007], *An Economic Index of Riskiness*, 3th Spain Italy Netherlands Meeting on Game Theory (SING 3), Amsterdam July 4-6, p. 37.
[2] Drabik E., [2009], *Asymptotically Efficient Adaptive Allocation Rule as a Method of Rejecting Low and Excessively High Risk*, 5th Spain Italy Netherlands Meeting on Game Theory (SING 5), Amsterdam July 1-3, p. 25.
[3] Drabik E., [2000], *Zastosowania teorii gier do inwestowania w papiery wartościowe*, str. 251, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok.
[4] Epstein L.G., [1992], *Behavior Under Risk: Recent Developments*, [in:] Theory and Applications in Advances in Economic Theory, Vol. II, edited by J.L. Laffont, Cambridge University Press, s. 1-63.
[5] Lai T.L., Robbins H., [1985], *Asymptotically Efficient Adaptive Allocation Rules*, Advanced in Applied Mathematics 6, s. 4-22.
[6] Kimball. M.S., [1991], *Standard risk aversion*, NBER Technical Working Paper, No. 99.
[7] Mass-Colell A., Whinston M.D., Green J.R., [1995], *Microeconomic theory*, Oxford University Press, New York.
[8] Michalska E., Gołąbowska B., [1998], *Użyteczność a Ryzyko w Problemie Wyboru Portfela Akcji*, [w:] Modelowanie preferencji a ryzyko' 98, red. T. Trzaskalik, s. 265-274, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
[9] Palacios Huerta I., Serrano R., [2006], *Rejecting Small Gambles Under Expected Utility*, Economics Letters 91, s. 250-259.
[10] Rabin M., [2000], *Risk Aversion and Expected Utility: a Calibration Theorem*, „Econometrica" 68, s. 1287-1292.
[11] Rabin M., Thaler R.H., [2001], *Anomalies Risk Aversion*, „Journal of Economic Properties" 15(1), s. 219-232.
[12] Segal U., Spivak A., [1990], *First Order versus Second Order Risk Aversion*, „Journal of Economic Theory" 51, s. 111-125.
[13] Tversky A., Kahneman R., [1991], *Loss Aversion in Riskless Choice a Reference -Dependent Model*, „Quarterly Journal of Economics" 106, s. 204-217.

Praca wpłynęła do redakcji we wrześniu 2009 r.

ASYMPTOTYCZNIE EFEKTYWNA STRATEGIA ODRZUCANIA GIER OBARCZONYCH ZBYT DUŻYM RYZYKIEM

Streszczenie

Wiele decyzji ekonomicznych podejmowanych w warunkach niepewności zawiera w sobie element ryzyka, a uczestnicy rynku mogą mieć zróżnicowany do niego stosunek, przy czym przez wiele lat obowiązywało założenie, że mają oni awersję do ryzyka. Awersja do ryzyka jest koncepcją znaną nie tylko z ekonomii, ale również teorii gier, finansów i psychologii, a dotyczy ona zachowań konsumentów, graczy, inwestorów działających w warunkach niepewności. Również awersja do strat jest koncepcją szeroko dys-

kutowaną w ostatnich latach. Zauważono bowiem, że uczestnicy rynku o wiele intensywniej odczuwają stratę niż czerpią radość z takiego samego co do wartości bezwzględnej zysku. Wielu autorów analizowało problem opłacalności uczestnictwa w grach z określoną wartością zysku lub straty. Kahneman i Tversky (1991) ustalili nawet, że warto brać udział w grach, w których stosunek ewentualnego zysku do ewentualnej straty ma się tak jak 2:1. Inni autorzy prezentowali cechy tzw. bezpiecznych gier.

Celem pracy jest zaprezentowanie asymtotycznie efektywnej strategii stosowanej w grach wieloetapowych, która umożliwia interaktywne wyznaczanie granicznych wartości straty i zysku przy jakich warto kontynuować grę.

Słowa kluczowe: asymptotycznie efektywna strategia, awersja do ryzyka, awersja do strat, gry wieloetapowe

ASYMPTOTICALLY EFFICIENT ADAPTIVE STRATEGY OF REJECTING GAMES WITH TOO HIGH RISK

Summary

Many important economic decisions involve an element of risk. Risk aversion is a concept in economic, game theory, finance and psychology related to the behavior of consumers, players and investors under uncertainty. Loss aversion is an important component of a phenomenon that has been discussed a lot in recent years. Loss aversion is a tendency to feel the pain of a loss more acutely than pleasure of the equal – sized gain. Many scientists have analyzed the problem of profitability in the game. Some authors presented certain features, by which "safe" games played once should be characterized. Kahneman and Tversky (1991) showed that loss – aversion – to – gain – attraction ratio should amount to 1:2.

The aim of this paper is to show an asymptotically effective strategy which enables the risk – aversive player to establish boundary variables loss and gain at each stage of the repeated game.

Key words: asymptotically efficient strategy, risk aversion, loss aversion, repeated game