PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVII – ZESZYT 2-3 – 2010

EMIL PANEK

STABILNOŚĆ STANU RÓWNOWAGI NA RYNKU KONKURENCYJNYM Z NIEKLASYCZNYM RÓWNANIEM DYNAMIKI CEN I CZASEM DYSKRETNYM

1. WSTĘP

W pracy [2] przedstawiony został model stacjonarnego rynku konkurencyjnego z następującym nieklasycznym równaniem dynamiki cen:

$$p(t+1) = \frac{p(t) + \sigma z(p(t))}{\| p(t) + \sigma z(p(t)) \|}, \tag{1}$$

gdzie:
t – dyskretna zmienna czasu, $t = 0, 1, \ldots,$
$p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t)$ – wektor cen towarów na rynku (n – liczba towarów),
$z(p) = (z_1(p)p, \ldots, z_n(p)$ – wektorowa funkcja popytu nadwyżkowego na towary,
σ – parametr dodatni,

$$\frac{p(t) + \sigma z(p)}{\| p + \sigma z(p) \|} = \left(\frac{p_1(t) + \sigma z_1(p)}{\| p + \sigma z(p) \|}, \ldots, \frac{p_n(t) + \sigma z_n(p)}{\| p + \sigma z(p) \|} \right), \| p \| = \sum_i | p_i |.$$

W równaniu (1) ceny są unormowane:

$$\forall t \geq 0 \left(p(t) \in P_+^n(1) = \left\{ p \in R_+^n \,\middle|\, \sum_i p_i = 1 \right\} \right).$$

Uogólnia ono klasyczne równanie dynamiki cen na rynku konkurencyjnym i opisuje taki mechanizm ich kształtowania, który wpływa hamująco z jednej strony na wzrost cen, towarów w nadmiarze (których podaż jest większa od popytu), z drugiej strony na spadek cen towarów deficytowych (oferowanych w niewystarczającej ilości). We wspomnianej pracy dowód twierdzenia o globalnej stabilności rynku z równaniem dynamiki cen (1) był przeprowadzony przy założeniu, że odwzorowanie

$$\phi(p) = \frac{p + \sigma z(p)}{\| p + \sigma z(p) \|} \tag{2}$$

simpleksu $P_+^n(1)$ w siebie jest kontrakcją (odwzorowaniem zwężającym). Nie ma szczególnego uzasadnienia dla tego założenia. Poniżej przedstawiamy dowód twierdzenia o globalnej stabilności rynku z równaniem dynamiki cen (1), w którym nie jest wymagana kontrakcja odwzorowania ϕ. Inaczej też definiujemy normę $\|p\|$. Obecnie $\| p \| = \left(\sum_i p_i^z\right)^{\frac{1}{2}}$ (norma Euklidesa)[1].

2. DEFINICJE I ZAŁOŻENIA

Obowiązują ponadto następujące standardowe założenia[2]:

(I) $z \in C^1(R_+^n \setminus \{0\})$,

(II) $\forall i \left(p_i = 0 \Rightarrow z_i(p) > 0\right)$,

(III) $\forall p \in P_+^n(1)\left(\langle p, z(p)\rangle = 0\right)$,

(IV) $\forall p, p^1, p^2 \in P_+^n(1)\, \forall \lambda = p^1 - p^2 \neq 0\left(\lambda J(p)\lambda^T < 0\right)$,

gdzie

$$J(p) = \left(\frac{\partial z_i(p)}{\partial p_j}\right)_{(n,n)}$$

(tutaj i wszędzie dalej $\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i$).

Przy założeniach (I)-(III) istnieje dokładnie jeden taki dodatni wektor cen $\bar{p} \in P_+^n(1)$, że $z(\bar{p}) = 0$, zob. np. [1], rozdz. 3, twierdzenie 3.1. Nazywamy go wektorem cen równowagi rynkowej.

Rozwiązanie $(p(t))_{t=0}^{\infty}$ równania (1) z warunkiem poczatkowym

$$p(0) = p^0 \in P_+^n(1) \tag{3}$$

nazywamy (p^0, ∞) – dopuszczalną trajektorią cen.

Rynek jest globalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli każda (p^0, ∞) – dopuszczalna trajektoria cen jest przy $t \to +\infty$ asymptotycznie zbieżna do $\bar{p}$:

$$\lim_t p(t) = \bar{p}.$$

Zauważmy, że warunek $z(\bar{p}) = 0$ jest równoważny z tym, że $\bar{p} = \phi(\bar{p})$. Ponadto:

– jeżeli $p^0 = \bar{p}$, to $\forall t \geq 0\left(p(t) = \bar{p}\right)$,

– jeżeli $p^0 \neq \bar{p}$, to $\forall t \geq 0\left(p(t) \neq \bar{p}\right)$.

---

[1] Wektory cen zlokalizowane są na kuli o promieniu $r = 1$, ze środkiem w 0 (w pracy [2]) pozostawały na simpleksie jednostkowym).

[2] Z interpretacją ekonomiczną założeń można zapoznać się np. w [1] rozdz. 3.

3. TWIERDZENIE O STABILNOŚCI RYNKU

Przy dowodzie twierdzenia pomocny będzie następujący lemat.

Lemat 1. Jeżeli $(p(t))_{t=0}^{\infty}$ jest taką (p^0, ∞) – dopuszczalną trajektorią cen, że $p^0 \neq \bar{p}$, to

$$\forall t \geq 0 \big(\langle \bar{p}, z(p(t) \rangle > 0 \big) \qquad (*)$$

(wyrażona w cenach równowagi wartość niezrównoważonego popytu nadwyżkowego jest zawsze dodatnia).

Dowód. Jeżeli $p^0 \neq \bar{p}$, to $\forall t \geq 0 \;\; p(t) \neq \bar{p}$. Ustalmy czas t i przyjmijmy oznaczenia:

$$p^1 = \bar{p},\, p^2 = p(t)$$
$$p(\tau) = p^1 + \tau(p^2 - p^1),$$
$$\Pi(\tau) = \big\langle p^2 - p^1, z\big(p(\tau) - z(p^1)\big\rangle,$$

gdzie $\tau \in [0,1]$. Wówczas $p(0) = p^1$, $p(1) = p$, $\Pi(0) = 0$
oraz $\forall \tau \in [0,1]\big(p(\tau) \in P_+^n(1)\big)$.

Odwzorowanie $\Pi : [0,1] \to R^1$ jest ciągłe i różniczkowalne (gładkie),

$$\dot{\Pi}(\tau) = \lambda J(p(\tau) \lambda^T,$$

gdzie $\lambda = p^2 - p^1$, $J(p) = \left(\dfrac{\partial z_i(p)}{\partial p_j} \right)_{(n,n)}$. Przy założeniu (IV)

$$\forall \tau \in [0,1](\Pi(\tau) < 0),$$

tzn.

$$\Pi(1) = \langle p^2 - p^1, z(p^2) - z(p^1) \rangle = \big\langle p(t) - \bar{p}, z\big(p(t) - z(\bar{p})\big\rangle =$$
$$= \langle p(t), z(p(t)) \rangle - \langle \bar{p}, z(p(t) \rangle = -\langle \bar{p}, z(p(t) \rangle < 0,$$

co kończy dowód lematu.

Faktycznie udowodniliśmy więcej niż głosi teza lematu 1, a mianowicie, że warunek (*) spełniają nie tylko wektory tworzące (p^0, ∞) – dopuszczalną trajektorię cen, lecz że warunek ten spełnia każdy wektor cen $p \in P_+^n(1) \setminus \{\bar{p}\}$.

Przy dowodzie twierdzenia o stabilności rynku z równaniem dynamiki cen (1) będzie nam potrzebna dodatkowo następująca własność funkcji popytu nadwyżkowego $z(p)$:

$$\text{(V)} \quad \inf_{\|p\|=1} \frac{\langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle z(p), z(p) \rangle} = v_{\bar{p}} > 0.$$

Nie potrafimy wprawdzie pokazać, jak obszerna klasa funkcji popytu nadwyżkowego czyni zadość założeniu V, ale nawet proste przykłady pokazują, że nie jest to założenie restrykcyjne. Np., jeżeli weźmiemy rynek 2×2 z funkcjami użyteczności kupców $u^k(x_1, x_2) = a_k \ln x_1 + b_k \ln x_2$ i zapasami towarów $y^k = (y_1^k, y_2^k) \underset{\neq}{\geq} 0$ $(a_k > 0, b_k > 0, y_1^k + y_2^k > 0,\ k = 1,2)$, to odpowiadająca im funkcja popytu nadwyżkowego ma postać

$$z(p_1, p_2) = (z_1(p_1, p_2), z_2(p_1, p_2)) = \left(A\frac{p_2}{p_1} - B, B\frac{p_1}{p_2} - A\right), \tag{4}$$

gdzie: $A = \dfrac{a_1 y_1^2}{a_1 + b_1} + \dfrac{a_2 y_2^2}{a_2 + b_2}$, $B = \dfrac{b_1 y_1^2}{a_1 + b_1} + \dfrac{b_2 y_2^2}{a_2 + b_2}$. Ceny równowagi tworzy wektor $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$ (ceny równowagi istnieją, choć na brzegu $P_+^2(1)$ nie jest spełnione założenie (I)). Łatwo sprawdzić, że $\forall p \in P_+^2(1) \setminus \{\bar{p}\}$

$$\langle \bar{p}, z(p) \rangle = \frac{(Ap_2 - Bp_1)^2}{\sqrt{A^2 + B^2}\, p_1 p_2}, \langle z(p), z(p) \rangle = \frac{(Ap_2 - Bp_1)^2 (p_1^2 + p_2^2)}{p_1^2 p_2^2},$$

a stąd

$$\inf_{\|p\|=1} \frac{\langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle z(p), z(p) \rangle} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \inf_{\|p\|=1} \frac{p_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2} = \frac{1}{2\sqrt{A^2 + B^2}} > 0.$$

Twierdzenie 1. Jeżeli spełnione są założenia (I)-(V) i parametr $\sigma > 0$ w (1) jest dostatecznie mały, to rynek konkurencyjny z nieklasycznym równaniem dynamiki cen (1) jest globalnie asymptotycznie stabilny (w równaniu (1) $\|p + \sigma z(p)\|$ oznacza normę Euklidesa wektora $p + \sigma z(p)$).

Dowód. Weźmy dowolną (p^0, ∞) – dopuszczalną trajektorię cen $(p(t))_{t=0}^{\infty}$ z warunkiem początkowym $p^0 \neq \bar{p}$ i wprowadźmy funkcję $V(t) = \| p(t) - \bar{p} \|^2 = \langle p(t) - \bar{p}, p(t) - \bar{p} \rangle$.

Aby udowodnić twierdzenie wystarczy pokazać, że $\lim_t V(t) = 0$.
Z definicji funkcji $V(t)$ otrzymujemy:

$$\Delta V(t) = V(t+1) - V(t) = \left\langle \frac{p(t) + \sigma z(p(t))}{\| p(t) + \sigma z(p(t)) \|} - \bar{p}, \frac{p(t) + \sigma z(p(t))}{\| p(t) + \sigma z(p(t)) \|} - \bar{p} \right\rangle -$$

$$- \langle p(t) - \bar{p}, p(t) - \bar{p} \rangle = \left\langle -2\bar{p}, \frac{p(t) + \sigma z(p(t))}{\| p(t) + \sigma z(p(t)) \|} \right\rangle + 2\langle \bar{p}, p(t) \rangle = -2F(p(t), \sigma),$$

gdzie

$$F(p,\sigma) = \left\langle \bar{p}, \frac{p + \sigma z(p)}{\| p + \sigma z(p) \|} \right\rangle - \langle \bar{p}, p \rangle, F \in C^0\left(P^n_+(1) \times R^1_+\right), F(\bar{p},\sigma) = F(p,0) = 0$$

oraz

$$\forall p \in P^n_+(1)\left(\| p + \sigma z(p) \| \geq 1\right).$$

Pokażemy, że

$$\exists \underline{\sigma} > 0 \ \forall \sigma \in (0, \underline{\sigma}) \ \forall p \in P^n_+(1) \ \left(F(p\sigma) > 0\right).$$

Zauważmy, że

$$F(p\sigma) > 0 \Leftrightarrow \langle \bar{p}, p + \sigma z(p) \rangle - \langle \bar{p}, p \rangle \| p + \sigma z(p) \| > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma^2 G(p) + 2\sigma H(p) > 0 \Leftrightarrow \sigma G(p) + 2H(p) > 0$$

gdzie

$$G(p) = \langle \bar{p}, z(p) \rangle^2 - \langle \bar{p}, p \rangle^2 \langle z(p), z(p) \rangle, H(p) = \langle \bar{p}, p \rangle \langle \bar{p}, z(p) \rangle > 0,$$
$$G, H \in C^0\left(P^n_+(1)\right).$$

Jeżeli $G(p) \geq 0$ na $P^n_+(1)$, wtedy $\forall p \neq \bar{p}$ nierówność $\sigma G(p) + 2H(p) > 0$ zachodzi przy dowolnej wartości parametru $\sigma > 0$. Jeżeli $\exists p \in P^n_+(1) G(p) < 0$, to warunek

$$\forall p \in P^n_+(1)\left(p \neq \bar{p} \Rightarrow F(p,\sigma) > 0\right)$$

jest równoważny z następującym:

$$\forall p \in P^n_+(1)\left(p \neq \bar{p} \Rightarrow 0 < \sigma < 2 \inf_{\| p \| = 1} \frac{-H(p)}{G(p)} = 2 \inf_{\| p \| = 1} \frac{\langle \bar{p}, p \rangle \langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle \bar{p}, p \rangle^2 \langle z(p_1), z(p) \rangle - \langle \bar{p}, z(p) \rangle^2} \right).$$

Ponieważ

$$\frac{\langle \bar{p}, p \rangle \langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle \bar{p}, p \rangle^2 \langle z(p), z(p) \rangle - \langle \bar{p}, z(p) \rangle^2} > \frac{\langle \bar{p}, p \rangle \langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle \bar{p}, p \rangle^2 \langle z(p), z(p) \rangle} >$$
$$> \frac{\langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle \bar{p}, p \rangle \langle z(p), z(p) \rangle} > \frac{\langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle z(p), z(p) \rangle} \geq \inf_{\| p \| = 1} \frac{\langle \bar{p}, z(p) \rangle}{\langle z(p), z(p) \rangle} = v_{\bar{p}} > 0,$$

więc w charakterze parametru $\underline{\sigma} > 0$ wystarczy przyjąć

$$\underline{\sigma} = 2v_{\bar{p}} > 0.$$

Biorąc dowolny parametr $\sigma \in (0, \underline{\sigma})$ mamy $\forall t \geq 0$

$$\Delta V(t) = -2F\big(p(t), \sigma\big) < 0,$$

zatem $\exists\left(\lim_t V(t) = \bar{V} \geq 0\right)$. Załóżmy, że $\bar{V} > 0$. Wówczas

$$\exists \varepsilon > 0 \forall t \geq 0\Big(p(t) \neq U_\varepsilon(\bar{p}) = \Big\{p \in P^n_+(1) \Big| \| p - \bar{p} \| < \varepsilon\Big\}\Big),$$

tzn.

$$\forall t \geq 0\big(p(t) \in \Omega = P^n_+(1) \backslash U_\varepsilon(\bar{p})\big).$$

Ponieważ zbiór Ω jest zwarty $F(\cdot, \sigma) \in C^0(\Omega)$ i $\forall p \in \Omega F(p, \sigma) > 0)$, więc

$$\exists \max_{p \in \Omega} F(p, \sigma) = -\varepsilon' < 0,$$

tzn.

$$\forall t \geq 0(\Delta V(t) = -2F\big(p(t), \sigma\big) \leq -\varepsilon'),$$

czyli

$$0 \leq V(t) \leq V(0) - \varepsilon' t \to -\infty.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

4. PRZYKŁAD

Kontynuując przykład rynku 2×2 z funkcją popytu nadwyżkowego (4) przyjmijmy następujące wartości parametrów: $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = 0{,}25$, $b_1 = 0{,}5$, $b_2 = 0{,}75$, $y_1 = (10, 0)$, $y_2 = (5, 20)$.

Wówczas

$$\big(z_1(p_1, p_2), z_2(p_1, p_2)\big) = \left(5\frac{p_2}{p_1} - \frac{35}{4}, \frac{35}{4}\frac{p_1}{p_2} - 5\right). \tag{5}$$

Ceny równowagi rynkowej tworzy wektor

$$\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \left(\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{7}{\sqrt{65}}\right) \approx (0{,}496, 0{,}868).$$

Aby rynek był globalnie asymptotycznie stabilny należy w równaniach dynamiki cen

$$p_1(t+1) = \frac{p_1(t) + \sigma z_1\left(p_1(t), p_2(t)\right.}{\left\| p_1(t) + \sigma z\left(p_1(t) p_2(t)\right)\right\|},$$
$$p_2(t+1) = \frac{p_2(t) + \sigma z_2\left(p_1(t), p_2(t)\right.}{\left\| p_1(t) + \sigma z\left(p_1(t) p_2(t)\right)\right\|} \tag{6}$$

przyjąć parametr $\sigma \in (0;\ 0{,}0468)$.

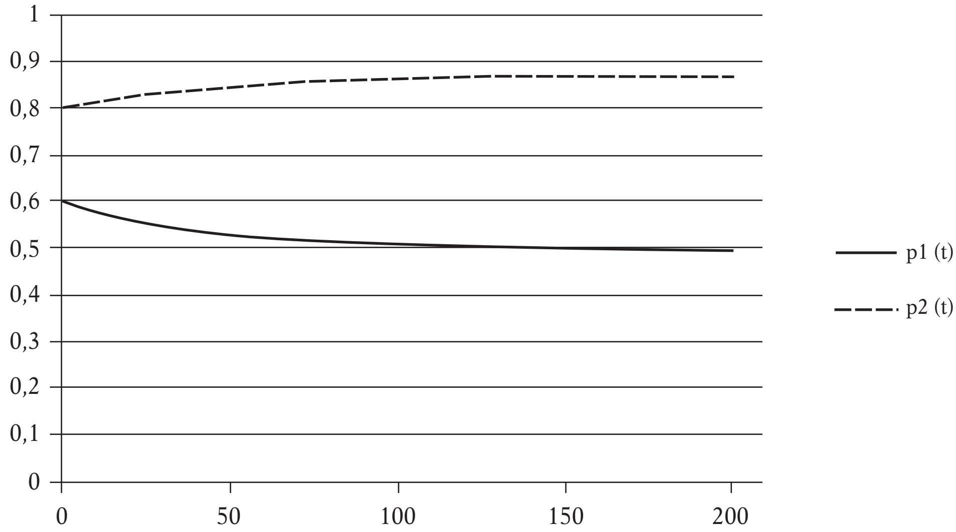
Przykładowe stabilne trajektorie cen prezentujemy w tabelach (oraz na rysunkach) 1, 2. W tabeli (oraz na rysunku) 3 prezentujemy przykład trajektorii cen na rynku niestabilnym, z parametrem $\sigma > \underline{\sigma}$.

Tabela 1

Rozwiązanie układu równań (6) z warunkiem początkowym $p^0 = (0{,}6;\ 0{,}8)$ i parametrem $\sigma = 0{,}001$

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$z_1(t)$	$z_2(t)$
0	0,6	0,8	–2,08333	1,5625
1	0,597915	0,80156	–2,04704	1,526966
2	0,595866	0,803084	–2,0112	1,492252
3	0,593853	0,804574	–1,97581	1,458338
4	0,591875	0,80603	–1,94088	1,425205
5	0,589932	0,807453	–1,9064	1,392832
6	0,588024	0,808843	–1,87237	1,3612
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	0,497223	0,867623	–0,02531	0,014502
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	0,496139	0,868243	–1,5E-10	8,65E-11

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 1. Wykres trajektorii cen z tabeli 1

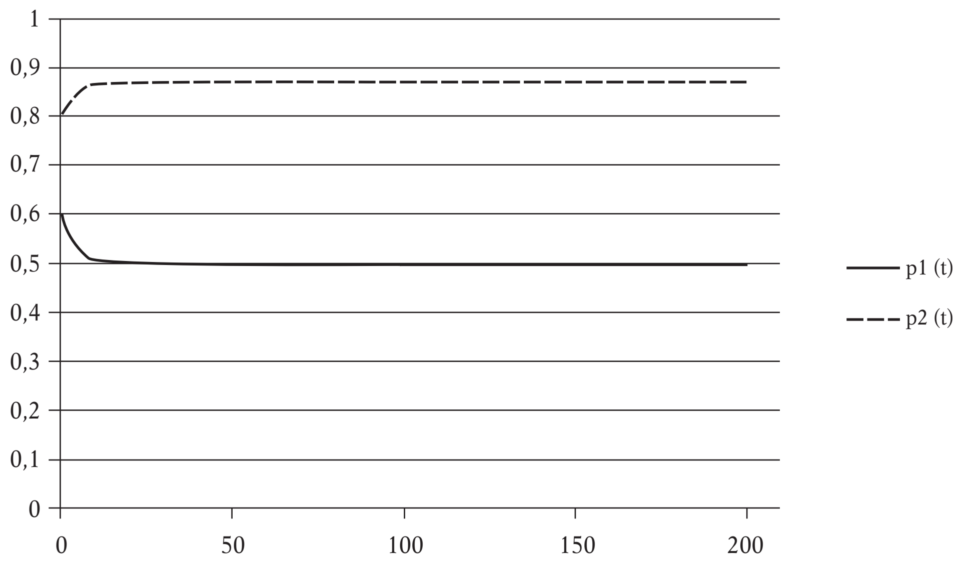
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2

Rozwiązanie układu równań (6) z warunkiem początkowym $p^0 = (0{,}6;\ 0{,}8)$ parametrem $\sigma = 0{,}001$

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$z_1(t)$	$z_2(t)$
0	0,6	0,8	–2,08333	1,5625
1	0,57897	0,815349	–1,70863	1,213282
2	0,561761	0,8273	–1,38655	0,941506
3	0,547818	0,836597	–1,11428	0,72965
4	0,536628	0,843819	–0,88776	0,564575
5	0,527721	0,849418	–0,70202	0,436146
6	0,520683	0,85375	–0,55163	0,33643
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	0,496139	0,868243	0	0

Źródło: opracowanie własne.



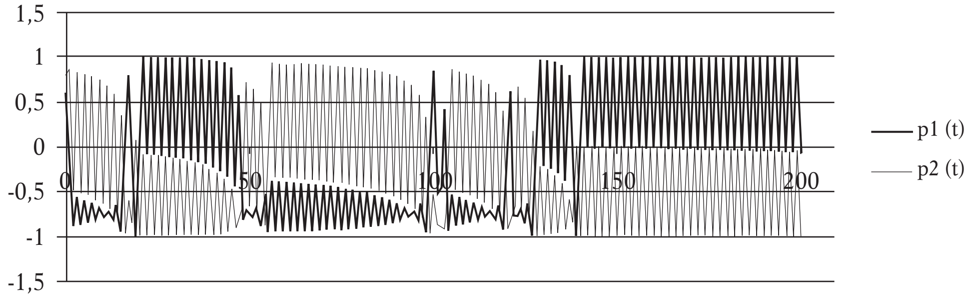
Rysunek 2. Wykres trajektorii cen z tabeli 2

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Rozwiązanie układu równań (6) z warunkiem początkowym p^0 = (0,6; 0,8) i parametrem σ = 1

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$z_1(t)$	$z_2(t)$
0	0,6	0,8	–2,08333	1,5625
1	–0,53174	0,846906	–16,7135	–10,4938
2	–0,87273	–0,4882	–5,95302	10,64185
3	–0,5579	0,829907	–16,1878	–10,8821
4	–0,85738	–0,51468	–5,74855	9,576302
5	–0,58908	0,808071	–15,6087	–11,3788
6	–0,83745	–0,54652	–5,48699	8,407884
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
195	0,998695	–0,05106	–9,00565	–176,134
196	–0,0454	–0,99897	101,2702	–4,60235
197	0,998473	–0,05525	–9,02668	–163,127
198	–0,04914	–0,99879	92,88035	–4,56952
199	0,998206	–0,05988	–9,04992	–150,874
200	–0,05327	–0,99858	84,97799	–4,53322

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3. Wykres trajektorii cen z tabeli 3

Źródło: opracowanie własne.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

[1] Panek E., [2003], *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AEP, Poznań.
[2] Panek E., [2005], *Model stacjonarnego rynku z nieklasycznym równaniem dynamiki cen*, „Przegląd Statystyczny" nr 3/2005.

Praca wpłynęła do redakcji w lipcu 2010 r.

STABILNOŚĆ STANU RÓWNOWAGI NA RYNKU KONKURENCYJNYM Z NIEKLASYCZNYM RÓWNANIEM DYNAMIKI CEN I CZASEM DYSKRETNYM

Streszczenie

Artykuł nawiązuje do pracy E. Panek (2005), w której udowodniono twierdzenie o stabilności rynku konkurencyjnego z czasem dyskretnym $t = 0, 1, \ldots$ i nieklasycznym równaniem dynamiki cen postaci

$$p(t+1) = \phi(p(t)) \tag{*}$$

przy założeniu, że odwzorowanie $\phi : P^n_+(1) \to P^n_+(1)$ jest kontrakcją, gdzie $P^n_+(1)$ jest simpleksem jednostkowym w R^n. Obecnie dowodzimy, że rynek pozostaje stabilny także bez założenia o kontrakcji ϕ, o ile tylko zmiany cen z okresu na okres w równaniu (*) nie będą zbyt gwałtowne.

Słowa kluczowe: rynek konkurencyjny, równowaga rynkowa, stabilność rynku

STABILITY OF COMPETITIVE MARKET EQUILIBRIUM WITH NON-CLASSICAL EQUATION OF PRICE DYNAMICS AND DISCRETE TIME

Summary

The article is refers to E. Panek's (2005) paper, in which a competitive stability theorem with discrete time $t = 0, 1, \ldots$ and a non-classical equation of price dynamics given by:

$$p(t+1) = \phi(p(t)) \tag{*}$$

was proved under the assumption that the relation $\phi : P^n_+(1) \to P^n_+(1)$ is a contraction, where $P^n_+(1)$ is a unit simplex in R^n. We proof currently, that a market is stable without the assumption of ϕ contraction, if periodically price changes in the equation (*) are not too rapid.

Key words: competitive market, market equilibrium, market stability