PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVIII – ZESZYT 1-2 – 2011

EMIL PANEK

O PEWNEJ PROSTEJ WERSJI „SŁABEGO" TWIERDZENIA O MAGISTRALI W MODELU VON NEUMANNA

1. WSTĘP

Model J. von Neumanna po raz pierwszy został opublikowany w języku niemieckim w 1928 r., ale szersze zainteresowanie ekonomistów i matematyków wzbudziła dopiero jego angielska wersja [36] z 1945 r. Intensywny okres zainteresowania równowagą v. Neumanna i tzw. efektem magistrali w wieloproduktowych (wielosektorowych) modelach wzrostu typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa przypada na drugą połowę XX wieku, zob. np. prace [1, 3, 4-8, 10-35], ale również w pierwszej dekadzie obecnego wieku raz po raz pojawiają się nowe publikacje na tan temat w czołowych czasopismach naukowych, por. [2, 9, 37-39].

W artykule prezentujemy wersję modelu von Neumanna, którego postać nawiązuje do klasycznych prac, [4-7, 12, 16, 24}. Przytaczamy stosunkowo prosty dowód istnienia stanu równowagi neumannowskiej oraz „słabą" wersję twierdzenia o magistrali w takim modelu. Idea dowodu nawiązuje do artykułu R. Radnera [33] (zob. także m.in. H. Nikaido [24] twierdzenie 13.8, A. Takayama [34] twierdzenie 7.A.2).

Zanim przejdziemy do przedstawienia modelu, słów kilka o niektórych symbolach matematycznych stosowanych w pracy. Przez R^n oznaczamy n-wymiarową przestrzeń wektorową (nad ciałem liczb rzeczywistych). Jeżeli wektor $x \in R^n$ jest nieujemny, piszemy $x \geqq 0$. Zapis $x \geqslant 0$ oznacza, że nieujemny wektor x zawiera co najmniej 1 element dodatni, tzn. $x \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \geqq 0$ oraz $x \neq 0$. Nazywamy go wektorem półdodatnim. Natomiast zapis $x > 0$ oznacza, że wszystkie składowe wektora x są dodatnie. Zapis $x \geqq y$ znaczy tyle, co $x - y \geqq 0$, podobnie $x \geqslant y$ oznacza, że $x - y \geqslant 0$, a $x > y$ oznacza, że $x - y > 0$. Przez R^n_+ oznaczamy nieujemny orthant R^n, tzn. $R^n_+ = \{x \in R^n \,|x \geqq 0\}$. Symbolem $\langle x, y\rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów $x, y \in R^n$, czyli $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i, y_i$. Przez $\|x\|$ oznaczamy tzw. normę taksówkową wektora $x \in R^n$: $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Jeżeli a jest skalarem, to $a \geqslant 0$ oznacza, że $a = 0$ lub $a > 0$.

2. MODEL VON NEUMANNA. STATYKA

W gospodarce mamy n towarów oraz m procesów produkcji, które nazywamy bazowymi procesami technologicznymi. Skalar $a_{ji} \geqslant 0$ wskazuje na wielkość zużycia i-tego towaru w j-tym bazowym procesie technologicznym prowadzonym z jednostkową intensywnością. Natomiast skalar $b_{ji} \geqslant 0$ wskazuje na produkcję i-tego towaru w j-tym bazowym procesie technologicznym prowadzonym z jednostkową intensywnością. Nieujemne (prostokątne, $m \times n$) macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy (odpowiednio) macierzą nakładów (zużycia) i macierzą wyników (produkcji) w modelu von Neumanna. Zatem w $j-$tym bazowym procesie technologicznym stosowanym z jednostkową intensywnością z wektora (wierszowego) nakładów $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jn})$ można wytworzyć wektor produkcji $b_j = (b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jn})$. Zakładamy, że:

1. **Każdy wiersz nieujemny macierzy A zawiera element dodatni** (tzn. w każdym bazowym procesie technologicznym zużywany jest co najmniej jeden towar).
2. **Każda kolumna nieujemnej macierzy B zawiera element dodatni** (tzn. każdy towar jest wytwarzany w przynajmniej jednym bazowym procesie technologicznym).

Model jest liniowy w tym sensie, że dla dowolnych liczb $v_1 \geqslant 0, v_2 \geqslant 0, \dots v_m \geqslant 0$ z nakładów $x = \sum_{j=1}^{m} v_j a_j$ otrzymujemy produkcję $y = \sum_{j=1}^{m} v_j b_j$.

O parze

$$(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{m} v_j a_j, \ \sum_{j=1}^{m} v_j b_j \right) = (vA, vB)$$

mówimy, ze opisuje dopuszczalny proces produkcji w modelu von Neumanna. Półdodatni wektor (wierszowy) $v = (v_1, ..., v_m) \geqslant 0$ nazywamy wektorem intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych.

Weźmy (niezerowy) wektor intensywności $v \geqslant 0$ i utwórzmy proces $(x, y) = (vA, vB)$. Liczbę

$$\alpha_i(v) = \begin{cases} \dfrac{(vB)_i}{(vA)_i}, & gdy\ (vA)_i > 0 \\ +\infty\ , & gdy \quad (vA)_i = 0,\ (vA)_i > 0 \\ wielkosc\ nieokreslona, & gdy \quad (vA)_i = \ (vB)_i = 0 \end{cases}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności wytwarzania i-tego towaru w procesie (vA, vB). Liczbę

$$\alpha(v) = \min_i \alpha_i(v)$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (vA, vB), a liczbę

$$\alpha_N = \max_{v \geqslant 0} \alpha(v) \tag{1}$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w modelu (gospodarce) von Neumanna.

Ponieważ $v \geqslant 0$, więc wprost z definicji mamy

$\alpha(v) = \min\limits_i \alpha_i(v) = \max\{\alpha \,|\alpha\; vA \leqq vB\}$,

czyli zadanie (1) jest równoważne z zadaniem

$$\begin{aligned} &\max \alpha \\ &\alpha vA \leqq vB \\ &v \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Pokażemy, że przy założeniach (I), (II) zadanie to ma rozwiązanie.[1]

□ **Twierdzenie 1.** Przy założeniach (I), (II) istnieje taki wektor intensywności $\bar{v} \geqslant 0$, że

$$\alpha(\bar{v}) = \max_{v \geqslant 0} \alpha(v) = \alpha_N > 0.$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że funkcja $\alpha(v)$ jest wszędzie na R^n_+ poza 0 ciągła oraz dodatnio jednorodna stopnia 0.

Zauważmy, że z definicji

$$\alpha(v) = \min_i \alpha_i(v) = \min_i \frac{\langle v, b^i \rangle}{\langle v, a^i \rangle} = \frac{\langle v, b^k \rangle}{\langle v, a^k \rangle}$$

dla pewnego k.[2]

Funkcja $\alpha(v)$ jest zatem ciągła w każdym takim punkcie $v \geqslant 0$, w którym $\langle v, a^k \rangle > 0$ (jako iloraz funkcji liniowych, a więc ciągłych) . Załóżmy teraz, że

$\alpha(v) = \dfrac{\langle v, b^k \rangle}{\langle v, a^k \rangle}$ oraz $\langle v, a^k \rangle = 0$.

[1] Inny dowód przytacza m.in. D. Gale [7], twierdzenie 9.8.

[2] Symbolem a^k, b^k oznaczamy k-tą kolumnę macierzy Ai B:

$$a^k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \; b^k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix}$$

Przy założeniu (I) warunek $v \neq 0$ pociąga za sobą $vA \geqslant 0$, czyli $\langle v, a^j \rangle > 0$ dla pewnego j, tzn.

$$\alpha(v) = \min_i \frac{\langle v, b^i \rangle}{\langle v, a^i \rangle} = \frac{\langle v, b^k \rangle}{\langle v, a^k \rangle} \leqslant \alpha_j(v) < +\infty \quad ,$$

co jest niemożliwe. Jeżeli bowiem $\langle v, b^k \rangle > 0$, to $\alpha(v) = +\infty$, jeżeli zaś $\langle v, b^k \rangle = 0$, to w punkcie v funkcja $\alpha(v)$ jest nieokreślona . Zatem, gdy $v \geqslant 0$, to

$\alpha(v) = \min_i \frac{\langle v, b^i \rangle}{\langle v, a^i \rangle} = \frac{\langle v, b^k \rangle}{\langle v, a^k \rangle}$ dla takiego (pewnego) k że $\langle v, a^k \rangle > 0$

i tym samym funkcja $\alpha(v)$ jest ciągła wszędzie na R^n_+ poza 0.

Ponieważ dla każdego $v \geqslant 0$ istnieje takie $k \in \{1, ..., n\}$, że $\langle v, a^k \rangle > 0$ i $\alpha(v) = \frac{\langle v, b^k \rangle}{\langle v, a^k \rangle}$, więc dla dowolnej liczby $\lambda > 0$ mamy

$$\alpha(\lambda v) = \frac{\langle \lambda v, b^k \rangle}{\langle \lambda v, a^k \rangle} = \frac{\langle v, b^k \rangle}{\langle v, a^k \rangle} = \alpha(v),$$

co dowodzi dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji $\alpha(v)$ wszędzie na R^n_+ poza 0.

Wówczas

$$\max_{v \geqslant 0} \alpha(v) = \max_{\substack{v \geqslant 0 \\ \|v\| = 1}} \alpha(v). \tag{3}$$

Zbiór $S^n_+(1) = \{v \geqslant 0 \,|\, \|v\| = 1\}$ jest zwarty oraz funkcja $\alpha(v)$ jest ciągła na $S^n_+(1)$, więc zadanie (3) ma rozwiązanie $\bar{v} \geqslant 0$. Macierze A, B spełniają warunki (I), (II), więc istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że

$\sigma eA \leqq eB > 0$,

gdzie $e = (1, ..., 1)$ i wobec tego $\alpha_N = \alpha(\bar{v}) \geqslant \sigma > 0$.

Wektor $\bar{v} \geqslant 0$, dla którego $\alpha_N = \alpha(\bar{v})$, nazywamy optymalnym wektorem intensywności w modelu von Neumanna. Wektory $\bar{x} = \bar{v}A$, $\bar{y} = \bar{v}B$ nazywamy optymalnymi wektorami nakładów (zużycia) i wyników (produkcji). O parze $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{v}A, \bar{v}B)$ mówimy, że opisuje optymalny proces produkcji. Przy założeniach (I), (II), zgodnie z twierdzeniem 1, optymalne procesy produkcji w modelu von Neumanna istnieją i są określone z dokładnością do mnożenia przez dowolną stałą dodatnią (z dokładnością do struktury).

Trzecie założenie brzmi następująco:

(III) Istnieje taki optymalny wektor intensywności $\bar{v} \geqslant 0$, któremu odpowiada wektor produkcji

$$\bar{y} = \bar{v}B > 0.$$

Innymi słowy, wśród optymalnych procesów produkcji istnieje przynajmniej jeden proces, w którym wytwarzane są wszystkie towary. Model von Neumanna spełniający ten warunek nazywamy regularnym. Jeżeli spełnione jest założenie (III), to spełnione jest także założenie (II), dlatego w przytoczonych dalej twierdzeniach 2 i 3 jest ono pomijane.

Niech $p \geqslant 0$ oznacza n-wymiarowy (kolumnowy) wektor cen towarów. Liczbę

$$\beta(v,p) = \begin{cases} \dfrac{vBp}{vAp}, & gdy \quad vAp > 0 \\ +\infty, & gdy\ vAp = 0, \quad oraz \quad vBp > 0 \\ wielkosc\ nieokreslona, & gdy \quad vAp = vBp = 0 \end{cases}$$

nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (vA, vB) przy cenach p.

Δ **Definicja 1.** Mówimy, że gospodarka z technologiczną efektywnością $\alpha(\bar{v}) = \alpha_N > 0$ znajduje się w równowadze von Neumanna, jeżeli obowiązują w niej takie ceny $\bar{p} \geqslant 0$, przy których dla dowolnego wektora intensywności $v \geqslant 0$ spełniony jest warunek:

$$vB\bar{p} - \alpha_N vA\bar{p} \leqq 0. \tag{4}$$

▲

Wektor $\bar{p}$ nazywamy wektorem cen von Neumanna. Łatwo zauważyć, że ceny von Neumanna są określone z dokładnością do struktury. O trójce $\{\alpha_N, \bar{v}, \bar{p}\}$, w której wektor intensywności $\bar{v} \geqslant 0$ spełnia założenie (III), mówimy, że tworzy (optymalny) stan równowagi neumannowskiej.

Zgodnie z twierdzeniem 1:

$$\alpha_N \bar{v}A \leqq \bar{v}B. \tag{5}$$

Z (4) otrzymujemy (dla $v = \bar{v}$)

$$\bar{v}B\bar{p} \leqq \alpha_N \bar{v}A\bar{p},$$

a z (5) (po przemnożeniu obu stron nierówności przez wektor $\bar{p} \geqslant 0$):

$$\bar{v}B\bar{p} \geqq \alpha_N \bar{v}A\bar{p},$$

tzn.

$$\alpha_N \bar{v}A\,\bar{p} = \quad \bar{v}\,B\,\bar{p} \quad ,$$

przy czym $\bar{v}\,B\,\bar{p} > 0$, czyli także $\bar{v}A\,\bar{p} > 0$. Tak więc wszędzie gdzie funkcja $\beta(\cdot, \bar{p})$ jest określona mamy

$$\beta(v, \bar{p}) = \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} \leqslant \alpha(\bar{v}) = \alpha_N$$

oraz

$$\beta(\bar{v}, \bar{p}) = \frac{\bar{v}B\bar{p}}{\bar{v}A\bar{p}} = \max_{v \geqslant 0} \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}} = \alpha(\bar{v}) = \alpha_N \quad .$$

W równowadze von Neumanna ekonomiczna efektywność produkcji jest równa efektywności technologicznej i jest to maksymalna efektywność, jaką może osiągnąć gospodarka.

□ **Twierdzenie 2.** Jeżeli spełnione są założenia (I), (III), to istnieją ceny von Neumanna

Dowód. Przy założeniach (I), (III) zbiór

$Q = \{q \mid q = v(\alpha_N A - B),\ v \geqq 0\}$

jest nietrywialnym stożkiem wielościennym w R^n z wierzchołkiem w 0, który nie zawiera wektorów ujemnych. Rzeczywiście, załóżmy że $q \in Q$ i $q < 0$. Wówczas $q = v(\alpha_N A - B) = \alpha_N v A - v B < 0$ dla pewnego wektora $v \geqslant 0$, co jest niemożliwe (sprzeczne z definicją optymalnego wskaźnika technologicznej efektywności α_N).

Utwórzmy zbiór

$$D = Q + R^n_+ = \{d \mid d = q + r,\ q \in Q,\ r \in R^n_+\} \quad .$$

Wówczas $D \neq R^n$ (gdyż zbiór D nie zawiera wektorów ujemnych) oraz $e_i \in D$, $i = 1, ..., n$. Zatem istnieje taka hiperpłaszczyzna z wektorem kierunkowym $\bar{p} \neq 0$, że

$$\langle \bar{p}, d \rangle \geqslant 0 \text{ dla każdego } d \in D. \tag{6}$$

Do zbioru D należą w szczególności wektory $e_i = (0, ..., \underset{(i)}{1}, ...0)$, $i = 1, ..., n$, więc $\langle \bar{p}, e_i \rangle = \bar{p}_i \geqslant 0$ dla każdego i, a ponieważ $\bar{p} \neq 0$, więc $\bar{p} \geqslant 0$. Z (6) wynika w szczególności, że dla każdego $v \geqslant 0$:

$$v(\alpha_N A - B)\bar{p} \geqslant 0 \quad ,$$

co jest równoważne (4).

■

Podobnie jak optymalny wektor intensywności $\bar{v} \geqslant 0$, również ceny von Neumanna $\bar{p} \geqslant 0$ są określone z dokładnością do struktury.

3. MODEL VON NEUMANNA. DYNAMIKA

Załóżmy, że czas t zmienia się skokowo, $t = 0, 1, ..., t_1$. Symbolem $v(t) = (v_1(t), ..., v_n(t))$ oznaczamy wektor (wierszowy) intensywności, z jaką poszczególne bazowe procesy technologiczne są stosowane w okresie t. Model von Neumanna opisuje gospodarkę zamkniętą w tym sensie, że źródłem nakładów w okresie t+1 może być tylko produkcja wytworzona w okresie poprzednim t, co prowadzi do nierówności:

$$v(t+1)A \leqq v(t)B, \quad t = 0, 1, ..., t_1 - 1 \tag{7}$$

$$v(t) \geqslant 0, \quad t = 0, 1, ..., t_1.$$

Niech v^0 będzie dowolnym wektorem intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych w okresie $t = 0$

$$v(0) = v^0 \geqslant 0. \tag{8}$$

Δ **Definicja 2.** Ciąg wektorów $\{v(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki (7)-(8) nazywamy $(v^0 t_1)$ – dopuszczalną trajektorią intensywności. Ciągi $\{x(t)\}_{t=0}^{t_1}$, $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, gdzie $x(t) = v(t)A$, $y(t) = v(t)B$, nazywamy (odpowiednio) dopuszczalną trajektorią nakładów (zużycia) i wyników (produkcji). O trójce $\{v(t), x(t), y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje dopuszczalny proces wzrostu w modelu von Neumanna.

▲

Spośród dopuszczalnych procesów wzrostu szczególną klasę tworzą procesy stacjonarne.

Δ **Definicja 3.** $(v^0 t_1)$ – dopuszczalną trajektorię intensywności $\{v(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy stacjonarną, jeżeli dla pewnej liczby $\gamma > 0$:

$$v(t) = \gamma^t v^0, \quad t = 0, 1, ..., t_1. \tag{9}$$

Stacjonarnej trajektorii intensywności odpowiada stacjonarna trajektoria nakładów

$$x(t) = \gamma^t x^0 \tag{10}$$

oraz wyników

$$y(t) = \gamma^t y^0, \tag{11}$$

gdzie $x^0 = v^0 A$, $y^0 = v^0 B$. O trójce trajektorii (9) – (11) mówimy, że opisują stacjonarny proces wzrostu w modelu von Neumanna.

▲

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia stacjonarnego procesu wzrostu z tempem $\gamma > 0$ i początkowym wektorem intensywności $v^0 \geqslant 0$ jest spełnienie układu nierówności:

$$\gamma v^0 A \leqq v^0 B. \tag{12}$$

Przy założeniach (I), (III), zgodnie z twierdzeniem 1, istnieje takie rozwiązanie układu (12) z tempem $\gamma = \alpha_N > 0$ i określonym z dokładnością do struktury wektorem $v^0 = \bar{v} \geqslant 0$, że $\bar{v}B > 0$. Innymi słowy istnieje stacjonarny proces wzrostu $\{\bar{v}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\bar{v}(t) = \alpha_N^t \bar{v}, \tag{13}$$

$$\bar{x}(t) = \alpha_N^t \bar{x}, \tag{14}$$

$$\bar{y}(t) = \alpha_N^t \bar{y}, \tag{15}$$

z wektorami $\bar{x} = \bar{v}A \geqslant 0$, $\bar{y} = \bar{v}B > 0$. Nazywamy go optymalnym stacjonarnym procesem wzrostu w modelu von Neumanna. Trajektorie (13) – (15) nazywamy, odpowiednio, optymalna stacjonarną trajektorią intensywności, nakładów (zużycia) i wyników (produkcji).

O wektorach

$$\bar{s}^v = \frac{\bar{v}(t)}{\|\bar{v}(t)\|} = \frac{\alpha_N^t \bar{v}}{\left\|\alpha_N^t \bar{v}\right\|} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \left(\frac{\bar{v}_1}{\sum\limits_i \bar{v}_i}, ..., \frac{\bar{v}_m}{\sum\limits_i \bar{v}_i}\right) = const.,$$

$$\bar{s}^x = \frac{\bar{x}(t)}{\|\bar{x}(t)\|} = \frac{\alpha_N^t \bar{x}}{\left\|\alpha_N^t \bar{x}\right\|} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \left(\frac{\bar{x}_1}{\sum_i \bar{x}_i}, ..., \frac{\bar{x}_n}{\sum_i \bar{x}_i}\right) = const.,$$

$$\bar{s}^y = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\alpha_N^t \bar{y}}{\left\|\alpha_N^t \bar{y}\right\|} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \left(\frac{\bar{y}_1}{\sum_i \bar{y}_i}, ..., \frac{\bar{y}_n}{\sum_i \bar{y}_i}\right) = const.,$$

mówimy, że charakteryzują strukturę intensywności stosowania bazowych procesów technologicznych, strukturę nakładów i strukturę produkcji w optymalnym stacjonarnym procesie wzrostu. O półprostych

$$N^v = \{\lambda \bar{s}^v \mid \lambda > 0\},$$

$$N^x = \{\lambda \bar{s}^x \mid \lambda > 0\},$$

$$N^y = \{\lambda \bar{s}^y \mid \lambda > 0\},$$

mówimy, że tworzą magistrale (promienie von Neumanna) w przestrzeni intensywności, przestrzeni nakładów i produkcji. Wszystkie optymalne stacjonarne procesy wzrostu przebiegają po magistralach.

W celu zapewnienia jednoznaczności magistral przyjmiemy następujące założenie:

(IV) Dla każdego wektora intensywności $v \notin N^v$ zachodzi nierówność:

$$v\,B\,\bar{p} - \alpha_N vA\bar{p} < 0.$$

Łatwo zauważyć, że warunek ten zachodzi także dla dowolnego wektora $x = vA \notin N^x$ oraz $y = vB \notin N^y$. Założenie głosi zatem, że jedynie na magistralach ekonomiczna efektywność produkcji jest równa efektywności technologicznej (wszędzie poza magistralami efektywność ekonomiczna jest niższa od technologicznej).[3]

Ustalmy początkowy wektor intensywności $v^0 > 0$ i postawmy następujące (liniowe) zadanie programowania dynamicznego:

$$\begin{gathered} \max v(t_1)B\bar{p} \\ v(t+1)A \leqq v(t)B, \quad t = 0, 1, ..., t_1 - 1 \\ v(0) = v^0 (\text{dane}). \end{gathered} \tag{16}$$

Jest to zadanie maksymalizacji wartości produkcji w końcowym okresie horyzontu $\{0, 1, ..., t_1\}$, mierzonej w cenach von Neumanna $\bar{p} \geqslant 0$, na zbiorze wszystkich (v^0, t_1)-dopuszczalnych trajektorii intensywności. Jego rozwiązanie $\{v^*(t)\ \}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy $(v^0, t_1, \bar{p})$- optymalną trajektorią intensywności. Ciągi $\{x^*(t)\ \}_{t=0}^{t_1}$, $\{y^*(t)\ \}_{t=0}^{t_1}$,

[3] Innymi słowy przy założeniu (III) w żadnej przestrzeni – intensywności, nakładów, produkcji – nie ma dwóch różnych magistral (o różnej strukturze). Założenie to znacznie ułatwia dowód twierdzenia 3, choć nie jest generalnie wymagane przy dowodach innych twierdzeń o magistrali formułowanych w literaturze, por. prace wymienione we wstępie.

gdzie $x^*(t) = v^*(t)A$ oraz $y^*(t) = v^*(t)B$, nazywamy $(x^0, t_1, \bar{p})$- optymalną trajektorią nakładów (z początkowym wektorem nakładów $x^0 = v^0 A$) oraz $(y^0, t_1, \bar{p})$-optymalną trajektorią produkcji (z początkowym wektorem produkcji $y^0 = v^0 B$). O trójce $\{v^*(t), x^*(t), y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ mówimy, że opisuje optymalny proces wzrostu w modelu von Neumanna.

4. „SŁABE" TWIERDZENIE O MAGISTRALI

W literaturze znanych jest wiele twierdzeń o stabilności typu magistralnego optymalnych procesów wzrostu w modelach von Neumanna-Gale'a-Leontiefa (por. załączoną bibliografię). Choć niekiedy modele te znacznie różnią się między sobą, istota dowodzonych na ich gruncie twierdzeń pozostaje ta sama. Wszystkie głoszą, że bez względu na początkowy stan gospodarki, procesy wzrostu optymalne w sensie obszernej klasy kryteriów wzrostu (nie tylko kryterium maksymalizacji wartości produkcji w końcowym okresie ustalonego horyzontu) „prawie zawsze" przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu magistral. Zbieżność jest tym wyraźniejsza, im dłuższy jest zakładany horyzont gospodarki. Magistrale jawią się jako „drogi szybkiego ruchu" do których powinna zmierzać (ewentualnie, po których powinna poruszać się) każda racjonalnie rozwijająca się gospodarka. Tempo wzrostu na magistralach jest bowiem maksymalnym tempem możliwym do osiągnięcia przez gospodarkę.

□ **Twierdzenie 3 (Radner).** Jeżeli spełnione są założenia (I), (III) i (IV) to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna $k_\varepsilon > 0$, że liczba okresów czasu, w których zachodzi choćby jeden z warunków

$$\left\| \frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|} - \bar{s}^v \right\| \geqslant \varepsilon, \quad \left\| \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} - \bar{s}^x \right\| \geqslant \varepsilon, \quad \left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s}^s \right\| \geqslant \varepsilon \tag{17}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu t_1.

Dowód. Pokażemy najpierw, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon^v > 0$, iż warunek

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} - \bar{s}^v \right\| \geqslant \varepsilon \tag{18}$$

pociąga za sobą nierówność

$$vB\bar{p} - (\alpha_N - \delta_\varepsilon^v)vA\bar{p} \leqslant 0. \tag{19}$$

Przy dowodzie wystarczy ograniczyć się do wektorów intensywności $v \geqslant 0$ unormowanych do 1, gdyż jeżeli jakikolwiek wektor $v \geqslant 0$ spełnia warunki (18), (19), to spełnia je także wektor λv, gdzie λ jest dowolną liczbą dodatnią . Zbiór

$$V_\varepsilon = \{v \in S_+^n(1) \mid \|v - \bar{s}^v\| \geqslant \varepsilon\}$$

jest zwarty oraz dla każdego $v \in V_\varepsilon$

$$v \notin N^v,$$

czyli

$$vB\bar{p} - \alpha_N vA\bar{p} < 0 \tag{20}$$

(zgodnie z założeniem (III)), tzn.

$$vA\bar{p} > 0 \quad \text{dla każdego} \quad v \in V_\varepsilon.$$

Ponieważ $\beta(v, \bar{p}) = \dfrac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}}$ jest ciągłą na V_ε funkcją zmiennej v, więc (wobec (20)) istnieje liczba

$$\bar{\beta} = \max_{v \in V_\varepsilon} \beta(v, \bar{p}) < \alpha_N,$$

czyli $\alpha_N - \delta_\varepsilon^v \geqslant \bar{\beta}$ dla pewnej liczby $\delta_\varepsilon^v > 0$, skąd wnioskujemy, że dla każdego $v \in V_\varepsilon$

$$\alpha_N - \delta_\varepsilon^v \geqslant \frac{vB\bar{p}}{vA\bar{p}},$$

co prowadzi do warunku (19).

Podobnie dowodzi się, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie liczby $\delta_\varepsilon^x > 0$, $\delta_\varepsilon^y > 0$, iż nierówność $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \bar{s}^x \right\| \geqslant \varepsilon$ pociąga za sobą $vB\bar{p} - (\alpha_N - \delta_\varepsilon^x)vA\bar{p} \leqslant 0$, a nierówność $\left\| \dfrac{y}{\|y\|} - \bar{s}^y \right\| \geqslant \varepsilon$ pociąga za sobą nierówność $vB\bar{p} - (\alpha_N - \delta_\varepsilon^y)vA\bar{p} \leqslant 0$, gdzie $x = vA$, $y = vB$. Biorąc $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^v, \delta_\varepsilon^x, \delta_\varepsilon^y\}$ dochodzimy do wniosku, iż dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon > 0$, że jeżeli zachodzi którakolwiek z nierówności

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} - \bar{s}^v \right\| \geqslant \varepsilon, \quad \left\| \frac{x}{\|x\|} - \bar{s}^x \right\| \geqslant \varepsilon, \quad \left\| \frac{y}{\|y\|} - \bar{s}^y \right\| \geqslant \varepsilon$$

(gdzie $x = vA$, $y = vB$), to

$$vB\bar{p} - (\alpha_N - \delta_\varepsilon^)vA\bar{p} \leqslant 0. \tag{21}$$

Niech $\{v^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie $(v^0, t_1, \bar{p})$- optymalną trajektorią intensywności rozwiązaniem zadania (16). Wówczas, zgodnie z (4)

$$v^*(t)\, B\, \bar{p} \leqslant \alpha_N v^*(t) A\, \bar{p}, \quad t = 0, 1, ..., t_1$$

oraz

$$v^*(t+1)\, A \leqslant v^*(t) B, \quad t = 0, 1, ..., t_1 - 1$$

(w myśl (7)), czyli

$$v^*(t+1)\, A\, \bar{p} \leqslant v^*(t) AB\bar{p} \leqslant \alpha_N v^*(t) A\, \bar{p}, \quad t = 0, 1, ..., t_1 - 1. \tag{22}$$

Niech L będzie zbiorem tych okresów czasu, w których zachodzi którykolwiek z warunków (17). Niech n_ε będzie liczbą elementów zbioru L. Wówczas

$$v^*(t+1)\,A\,\bar{p} \leqslant (\alpha_M - \delta_\varepsilon)v^*(t)A\bar{p} \quad \text{dla } t \in L. \tag{23}$$

Z (22), (23) otrzymujemy nierówność

$$v^*(t_1)A\bar{p} \leqslant \alpha_N^{t_1-n_\varepsilon}(\alpha_N - \delta_\varepsilon)^{n_\varepsilon} v^0 A\,\bar{p}. \tag{24}$$

Ponieważ $v^0 > 0$, więc (przy założeniu (III)) istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że

$0 < \sigma\,\bar{s}^v A \leqq v^0 B$,

i wobec tego istnieje $(v^0 t_1)$ – dopuszczalna trajektoria $\{\tilde{v}(t)\}_{t=0}^{\tau}$:

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v^0, & dla \quad t = 0 \\ \alpha_N^{t-1}\sigma\bar{s}^v, & dla \quad t = 1, ..., t_1. \end{cases}$$

Wówczas

$$v^*(t_1)\,B\,\bar{p} \geqslant \tilde{v}(t_1)\,B\,\bar{p} = \alpha_N^{t_1-1}\sigma\bar{s}^v B\bar{p} > 0. \tag{25}$$

Łącząc warunki (24) i (25) (zważywszy, że $v^*(t_1)\,B\,\bar{p} \leqslant \alpha_N v^*(t_1)A\,\bar{p}$) otrzymujemy:

$$0 < \alpha_N^{t_1-1}\sigma\bar{s}^v B\bar{p} \leqslant v^*(t_1)\,B\,\bar{p} \leqslant \alpha_N v^*(t_1)A\,\bar{p} \leqslant \alpha_N^{t_1-n_\varepsilon+1}(\alpha_N - \delta_\varepsilon)^{n_\varepsilon} v^0 A\,\bar{p},$$

co pozwala na oszacowanie górnego ograniczenia liczby n_ε:

$$n_\varepsilon \leqslant \mu = \frac{\ln A}{\ln\alpha - \ln(\alpha_N - \delta_\varepsilon)},$$

gdzie $A = \dfrac{\alpha_N^2 v^0 A\bar{p}}{\sigma\bar{s}^v B\bar{p}} > 0$. W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\min\{0, \mu\}$.

■

LITERATURA

[1] Araujo A., Scheinkman J.A. [1977], *Smoothness, Comparative Dynamics and Turnpike Property*, „Econometrica", 43/1977.

[2] Blot J., Crettez B., [2007], *On the Smoothness of Optimal Path II: Some Local Turnpike Results,* „Decision Econom. Finance", nr 2/2007.

[3] *Contribution to the von Neumann Growth Model*, (Bruckman G., Weber W. – red.) [1971], Springer Verlag, New York -Wien.

[4] Czeremnych J., N. [1982], *Analiz powiedienija trajektorii dynamiki narodnochaziajstwiennych modeliej*, Nauka, Moskwa.

[5] Czeremnych J., N. [1986], *Matiematiczieskije modeli razwitija narodnogo chaziajstwa*, MGU, Moskwa.

[6] Czerwiński Z., [1973], *Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego*, PWE, Warszawa.

[7] Gale D., [1969], *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa.

[8] Gantz D.T. [1980], *A Strong Turnpike Theorem for Nonstationary von Neumann-Gale Production Model*, „Econometrica" t. 48, nr 7/1980.
[9] Guerrero-Luchtenberg C.L. [2000], *A Uniform Neighborhood Turnpike Theorem and Applications*, „Journal of Math. Econ." 34/2000.
[10] *Handbook of Mathematical Economics*, (Arrow K.J., Intrigilator M.D. – red.) [1982], t.II, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.
[11] *John von Neumann and Modern Economics*, (Dove M., Chakravorty S., Goodwin R. - red.) [1989], Clarendon Press, Oxford.
[12] Kemeny J.G., Morgenstern O., Thompson G.L. [1956], *A Generalization of the von Neumann Model of Expanding Economy,* „Econometrica" 24/1956.
[13] Krass J.A. [1976], *Matiematiczieskije modeli ekonomiczeskoj dinamiki*, Sowietskoje Radio, Moskwa.
[14] Makarow W.L., Rubinow A.M. [1973], *Matiematiczeskaja tieoria ekonomiczeskoj dinamiki i rawnowiesija*, Nauka, Moskwa.
[15] Marena M., Montrucchio L., [1999], *Neighborhood Turnpike Theorem for Continous Time Optimization Models*, Journal Optim. Theory Appl. 101/1999.
[16] *Mathematical Models of Economics*, (Łoś J., Łoś M. – red.) [1974], North-Holland, Amsterdam.
[17] McKenzie L.W. [1976], *Turnpike Theory*, „Econometrica", t.44, nr 5/1976.
[18] McKenzie L.W. [1998], *Turnpikes*, „American Econ. Rev. 88 (22)/1998.
[19] Montrucchio L. [1995], *A New Turnpike Theorem for Discounted Programs*, „Econ. Theory", 5/1995.
[20] Morishima M. [1964], *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford.
[21] Morishima M. [1969], *Theory of Economic Growth*, Clavendon Press, Oxford.
[22] Mowszowicz S.M. [1969], *Tieoriemy o magistrali w modeliach Neumanna-Gale'a*, „Ekonomika i matiematiczeskije metody", nr 6/1969.
[23] Mowszowicz S.M. [1972], *Magistralnyj rost w dinamiczeskich narodnochoziastwiennych modeliach*, „Ekonomika i matiematiczeskije metody", nr 2/1972.
[24] Nikaido H., [1968], *Convex Structers and Economic Theory*, Acad. Press, New York.
[25] Panek E., [1985], *Asymptotyka optymalnych trajektorii w wielosektorowym modelu wzrostu*, „Przegląd statystyczny" nr 2/1985.
[26] Panek E., [1985], *Słabe twierdzenie o magistrali konsumpcyjnej w wielosektorowym modelu wzrostu*, Przegląd Statystyczny nr 3/1985.
[27] Panek E., [1986], *Asymptotyka trajektorii produkcji w dynamicznym modelu Leontiefa,* Przegląd Statystyczny nr 2/1986.
[28] Panek E., [1987], *O pewnej wersji twierdzenia o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu,* Przegląd Statystyczny nr 1/1987.
[29] Panek E., [1988], *Consumption Turnpike in a Nonlinear Model of Input-Output Type*, w: Input – Output Analysis. Current Developments, red. M. Chiaschini, Chapman and Hall Ltd., London-New York.
[30] Panek E., [1992], *Optimal Trajectories in a Multisectoral Model of Economic Growth*, Computers and mathematics with Applications, nr 8-9 (24)/1992.
[31] Panek E., [1992], *„Bardzo silne" twierdzenie o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu*, Przegląd Statystyczny nr 3-4/1992.
[32] Panek E., [1997], *"Silne" twierdzenie o magistrali w wielosektorowym modelu wzrostu*, *Wersja szczególna,* Przegląd Statystyczny nr 1/1997.
[33] Radner R.[1961], *Path of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem*, Review of Econ. Studies, XXVIII, 1961.
[34] Takayama A. [1985], *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
[35] Tsukui J., Murokami Y. [1978], *Turnpike Optimality in Input-Output Systems. Theory and Applications for Planning*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

[36] Von Neumann J. [1945], *A Model of General Economic Equilibrium*, Rev. Econ. Studies, 13/1945-46.
[37] Zaslawski A.J. [2000], *Turnpike Theorem for Nonautonomous Infinite Dimensional Discrete-Time Control Systems,* Optimization, 48/2000.
[38] Zaslawski A.J. [2004], *A Turnpike Result for Autonomous Variational Problems*, Optimization, 53/2004.
[39] Zaslawski A.J. [2006], *Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer Science & Business Media, Inc New York.

O PEWNEJ PROSTEJ WERSJI „SŁABEGO" TWIERDZENIA O MAGISTRALI W MODELU VON NEUMANNA

S t r e s z c z e n i e

Prezentujemy klasyczną wersję modelu von Neumanna, którego postać nawiązuje do prac [4-7, 12, 16, 24]. Przytaczamy prosty dowód istnienia stanu równowagi oraz „słabą" wersję twierdzenia R. Radnera o magistrali w takim modelu.

Słowa kluczowe: równowaga von Neumanna, stacjonarny i optymalny proces wzrostu, efekt magistrali

JEL codes: O 41

A SIMPLE VERSION OF "WEAK" TURNPIKE THEOREM IN THE VON NEUMANN MODEL

S u m m a r y

In the paper we present a classical version of von Neumann model which refers to works [4-7, 12, 16, 24]. We adduce a simple proof of equilibrium state and a "weak" version of R. Radner theorem – about turnpike in such model.

Key words: von Neumann theorem, stationary and optimal growth process, turnpike effect (result)