PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVIII – ZESZYT 3-4 – 2011

MICHAŁ KOLUPA, JOANNA PLEBANIAK

KILKA UWAG O WARTOŚCIACH WŁASNYCH MACIERZY KORELACJI

W niniejszej pracy, w nawiązaniu do pracy Kolupa, 2006, podajemy konstrukcję przedziału $[\alpha^{\mathbf{R}}, \beta^{\mathbf{R}}]$, w którym leżą wszystkie wartości własne macierzy korelacji $\mathbf{R}(k) = [r_{ij}]$ stopnia k, gdzie r_{ij} oznacza współczynnik korelacji pomiędzy standaryzowanymi zmiennymi Z_i oraz Z_j będącymi zmiennymi objaśniającymi jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego postaci:

$$Y = \alpha_1 Z_1 + \ldots + \alpha_k Z_k + e. \tag{1}$$

Wspomnianą konstrukcję przedziału $[\alpha^{\mathbf{R}}, \beta^{\mathbf{R}}]$ wykorzystujemy prezentując kryterium (dwie wersje), na podstawie którego rozstrzygamy o dodatniości wszystkich wartości własnych macierzy korelacji $\mathbf{R}(k)$.

Dodajmy jeszcze, że przedstawione niżej kryterium jest inne niż dotychchczas znane i opisane w literaturze (Mostowski, Stark, 1968).

Jeżeli $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ jest rzeczywistą macierzą symetryczną stopnia k, to wszystkie jej wartości własne leżą w przedziale $[\ \alpha, \beta\ ]$, gdzie:

$$\alpha = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\mathbf{A} - \frac{1}{k}\sqrt{(k-1)[k\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 - (\mathrm{tr}\mathbf{A})^2]}, \tag{2}$$

$$\beta = \frac{1}{k}\mathrm{tr}\mathbf{A} + \frac{1}{k}\sqrt{(k-1)[k\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 - (\mathrm{tr}\mathbf{A})^2]}. \tag{3}$$

Oznaczmy symbolem d następujące wyrażenie:

$$d = \frac{1}{k}\sqrt{(k-1)[k\mathrm{tr}\mathbf{A}^2 - (\mathrm{tr}\mathbf{A})^2]} \tag{4}$$

(por. np. Kolupa, 2006).

Wówczas jak to wynika ze wzorów (2) i (3) mamy:

$$\alpha + \beta = \frac{2\mathrm{tr}\mathbf{A}}{k} \tag{5}$$

$$\alpha - \beta = -2d$$

Ponieważ macierz korelacji $\mathbf{R}(k) = [r_{ij}]_{kxk}$ jest rzeczywistą macierzą symetryczną przeto:

$$\frac{1}{k}\mathrm{tr}\mathbf{R}(k) = 1 \tag{6}$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{R}^2(k) = k + \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2 \tag{7}$$

$$[\mathrm{tr}\mathbf{R}(k)]^2 = k^2 \tag{8}$$

Wobec tego:

$$k\mathrm{tr}\mathbf{R}^2(k) - [\mathrm{tr}\mathbf{R}(k)]^2 = k^2 + k\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2 - k^2 = k\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2 \tag{9}$$

co pociąga za sobą, że:

$$(k-1)\left[k\mathrm{tr}\mathbf{R}^2(k) - [\mathrm{tr}\mathbf{R}(k)]^2\right] = (k-1)k\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2 \tag{10}$$

Wówczas na podstawie (2) i (3) uwzględniając rezultaty podane we wzorach (6), (7), (8), (9) i (10) mamy przedział [$\alpha^{\mathbf{R}}, \beta^{\mathbf{R}}$], gdzie:

$$\alpha^{\mathbf{R}} = 1 - d^{\mathbf{R}}, \tag{11}$$

$$\beta^{\mathbf{R}} = 1 + d^{\mathbf{R}}, \tag{12}$$

zaś:

$$d^{\mathbf{R}} = \frac{1}{k}\sqrt{(k-1)k\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2}. \tag{13}$$

Oznacza to, że wszystkie wartości własne $\lambda_i^{\mathbf{R}}$ macierzy korelacji $\mathbf{R}(k)$ leżą w przedziale:

$$1 - d^{\mathbf{R}} \leqslant \lambda_i^{\mathbf{R}} \leqslant 1 + d^{\mathbf{R}}, i = 1, 2, \ldots, k. \tag{14}$$

Żądamy, aby $\lambda_i^{\mathbf{R}} > 0$, czyli:

$$1 - d^{\mathbf{R}} \geqslant 0 \tag{15}$$

albo:

$$k^2 \geqslant k^2 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2 - k \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2. \tag{16}$$

Zapisujemy (16) w równoważnej postaci:

$$\left(1 - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2\right) k^2 \geqslant -k \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2. \tag{17}$$

Ostatecznie:

$$\left(1 - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2\right) k \geqslant - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2. \tag{18}$$

Z nierówności (18) wyznaczamy k. Mogą zaistnieć dwa przypadki, które oznaczamy symbolami A oraz B.

Przypadek A:

$$\operatorname{sign}\left(1 - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2\right) = +1. \tag{19}$$

Wówczas:

$$k \geqslant u, \tag{20}$$

zaś:

$$u = \frac{-\sum\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2}{1 - \sum\limits_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2}. \tag{21}$$

Nierówność (20) jest, to jak tu widać ze wzoru (21), zawsze spełniona.

Przypadek B:

$$\operatorname{sign}\left(1 - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2\right) = -1. \tag{22}$$

Wówczas:

$$k \leqslant u, \tag{23}$$

gdzie u dane jest wzorem (21).

Tak więc w obydwu przypadkach (przypadek A oraz przypadek B) jest spełniona nierówność (15).

Oznacza to, że wówczas wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{R}(k)$ są dodatnie.

Dodajmy jeszcze, że warunek (19) ma miejsce wówczas, kiedy:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2 < 1, \tag{24}$$

zaś warunek (22) zachodzi wówczas, kiedy:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2 > 1. \tag{25}$$

Tak więc otrzymujemy dwie wersje kryterium na podstawie którego można rozstrzygnąć, czy wszystkie wartości własne macierzy korelacji $\mathbf{R}(k)$ są dodatnie.

Wersja 1

Jeżeli jest spełniony warunek (24), to wszystkie wartości własne macierzy korelacji $\mathbf{R}(k)$ są dodatnie (nierówność (19) jest zawsze spełniona).

Wersja 2

Jeżeli są spełnione warunek (22) i nierówność (23), to wszystkie wartości własne macierzy korelacji $\mathbf{R}(k)$ są dodatnie.

Odwołamy się do kilku przykładów ilustrujących opisane rezultaty.

Przykład 1

Dana jest macierz $\mathbf{R}(2)$ postaci:

$$\mathbf{B}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0,2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że:

$$\det\left[\mathbf{R}(2) - \lambda\mathbf{I}(2)\right] = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0,2 \\ 0,2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0, \tag{27}$$

czyli:

$$(1-\lambda)^2 - 0,04 = 0 \tag{28}$$

albo:

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 0,04 = 0 \tag{29}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 0,96 = 0 \tag{30}$$

$$\Delta = 4 - 4\cdot 0,96 = 4 \cdot 0,04 \tag{31}$$

$$\sqrt{\Delta} = 2 \cdot 0,2 \tag{32}$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - 2\cdot 0,2}{2} = 1 - 0,2 = \frac{4}{5}, \tag{33}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 + 2\cdot 0,2}{2} = 1 + 0,2 = \frac{6}{5}. \tag{34}$$

Ze wzorów (11) i (12) wynika, że w omawianym przypadku dla macierzy (26) mamy:

$$\alpha^{\mathbf{R}} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 2\cdot 0,08} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{0,16} = \frac{4}{5}, \tag{35}$$

$$\beta^{\mathbf{R}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 2\cdot 0,08} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{0,16} = \frac{6}{5}. \tag{36}$$

Wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{R}(2)$ danej wzorem (26) należą do przedziału $\left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right]$. A zatem są dodatnie.

Przykład 2 (ilustracja wersji 1)

Rozpatrzymy ponownie macierz **R**(2) daną wzorem (26). Mamy zatem:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2 = (0,2)^2 + (0,2)^2 = 2 \cdot 0,04 = \frac{2}{25}, \tag{37}$$

czyli:

$$1 - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2 = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}. \tag{38}$$

Jest zatem spełniony warunek (19). Tym samym nierówność (20) jest zawsze spełniona. Oznacza to, że wszystkie wartości własne macierzy danej wzorem (26) są dodatnie, co sprawdziliśmy też bezpośrednio (patrz przykład 1).

Przykład 3 (ilustracja wersji 2)

Dana jest macierz:

$$\mathbf{R}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że:

$$0 = \det\left[\mathbf{R}(3) - \lambda\mathbf{I}(3)\right] = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}, \tag{40}$$

czyli:

$$(1-\lambda)^3 - 0,64(1-\lambda) = 0, \tag{41}$$

stąd:

$$(1 - \lambda)[\, (1 - \lambda)^2 - 0{,}64 + 0{,}64\lambda] = 0,$$

$$(1 - \lambda)[\, \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 0{,}64 + 0{,}64\lambda] = 0,$$

$$(1 - \lambda)[\, \lambda^2 - 1{,}36\lambda + 0{,}36] = 0,$$

stąd:

$$\lambda_1 = 1 \tag{42}$$

oraz:

$$\lambda^2 - 1{,}36\lambda + 0{,}36 = 0,$$

przeto:

$$\Delta = 1,8496 - 1,4400 = 0,4096$$

$$\sqrt{\Delta} = 0,64$$

$$\lambda_2 = \frac{1,36 - 0,64}{2} = 0,36 \tag{43}$$

$$\lambda_3 = \frac{1,36 + 0,64}{2} = 1. \tag{44}$$

A zatem wszystkie wartości własne macierzy **R**(3) danej wzorem (39) są dodatnie. Tym razem skorzystamy z wersji 2 kryterium, na podstawie którego można rozstrzygnąć czy wszystkie wartości własne macierzy **R**(3) danej wzorem (39) są dodatnie.

Zauważmy, że:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2 = 0,64 + 0,64 = 1,28 \tag{45}$$

i wobec tego jest spełniony warunek (25), czyli:

$$1 - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} r_{ij}^2 = 1 - 1,28 = -0,28 \tag{46}$$

oraz nierówność (23), bo u dana jest wzorem (21). Zatem:

$$u = \frac{-1,28}{-0,28} \approx 4,57 > 0. \tag{47}$$

Wobec tego dla $k = 3$ (taki jest stopień macierzy **R**(3) danej wzorem (39)) mamy:

$$3 < 4,57. \tag{48}$$

A to oznacza, że wszystkie wartości własne macierzy **R**(3) danej wzorem (39) są dodatnie.

Sprawdziliśmy to bezpośrednio (patrz wzory (41), (42) i (43)).

Podamy teraz przedział [$\alpha^{\mathbf{R}}$, $\beta^{\mathbf{R}}$], w którym leżą wszystkie wartości własne rozpatrywanej macierzy.

Dla macierzy **R**(3) danej wzorem (39) na podstawie wzorów (11), (12) i (13) mamy kolejno:

$$d^{\mathbf{R}} = \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 1,28} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2,56} = 0,5737 \cdot 1,6 \approx 0,91792,$$

przeto:

$$\alpha^{\mathbf{R}} = 1 - d^{\mathbf{R}} = 1 - 0{,}91792 = 0{,}08208,$$
$$\beta^{\mathbf{R}} = 1 + d^{\mathbf{R}} = 1 + 0{,}91792 = 1{,}91792,$$

a zatem wszystkie wartości własne $\lambda_i^{\mathbf{R}}$ $i = 1, 2, 3$ macierzy korelacji $\mathbf{R}(3)$ danej wzorem (29) należą do przedziału [$\alpha^{\mathbf{R}}, \beta^{\mathbf{R}}$], czyli:

$$0{,}08208 < \lambda_i^{\mathbf{R}} \leqslant 1{,}91792, \; i = 1, 2, 3,$$

co stwierdziliśmy bezpośrednio (patrz wzory (41), (42) i (43)).

Zauważmy następnie, że podane rezultaty przenoszą się na przypadek macierzy uniwersalnej $\mathbf{G}(k) = [g_{ij}]$ stopnia k, dla której:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ r_i r_j & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases} \tag{49}$$

gdzie r_p oznacza współczynnik korelacji pomiędzy parą zmiennych (Z_i, Z_j), $p = i, j$ oraz również macierzy uniwersalnej $\mathbf{Q}(k) = [q_{ij}]$ stopnia k, dla której:

$$q_{ij} = q_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ \dfrac{r_i}{r_j} & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases} \tag{50}$$

gdzie r_i oraz r_j mają te same znaczenie o którym informowaliśmy omawiając macierz uniwersalną.

Dodajmy jeszcze, że macierz uniwersalna i neutralna zostały wprowadzone do ekonometrii przez Z. Hellwiga (patrz np. Hellwig, 1976).

prof. zw. dr hab. Michał Kolupa,
Politechnika Radomska w Radomiu
dr hab. Joanna Plebaniak, prof. SGH.
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

LITERATURA

[1] Hellwig Z., (1976), *Przechodniość relacji skorelowania zmiennych losowych i płynące stąd wnioski ekonometryczne,* „Przegląd Statystyczny" nr 3, Warszawa.
[2] Kolupa M., (2006), *O konstrukcji przedziału dającego oszacowanie wartości własnych regularnej macierzy symetrycznej – Matematyka język uniwersalny* – AE Kraków.
[3] Mostowski A., Stark M , (1968), *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa.

KILKA UWAG O WARTOŚCIACH WŁASNYCH MACIERZY KORELACJI

Streszczenie

W pracy wykazano, że wszystkie wartości własne macierzy korelacji $\mathbf{R}(k) = [r_{ij}]$ stopnia k leżą w przedziale $[\alpha^{\mathbf{R}}, \beta^{\mathbf{R}}]$, gdzie:

$$\alpha^{\mathbf{R}} = 1 - d^{\mathbf{R}}$$

$$\beta^{\mathbf{R}} = 1 + d^{\mathbf{R}}$$

zaś:

$$d^{\mathbf{R}} = \frac{1}{k}\sqrt{(k-1)k\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2}$$

Wartości własne macierzy korelacji są dodatnie, jeżeli tylko jest spełniony jeden z dwóch następujących warunków:
albo:

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2 < 1 \text{i} k \geqslant u$$

albo:

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2 > 1$$

oraz :

$$k \leqslant u$$

gdzie:

$$u = \frac{-\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2}{1 - \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2}$$

Słowa kluczowe: macierz korelacji, wartości własne macierzy

SAME REMARKS ABOUT CHARACTERISTIC ROOTS OF MATRIX OF CORRELATION $\mathbf{R}(k) = [r_{ij}]_{kxk}$

S u m m a r y

The paper is devoted presentation construction the of the interval [$\alpha^{\mathbf{R}}$, $\beta^{\mathbf{R}}$] for all characteristic roots of matrix of correlation $\mathbf{R}(k) = [r_{ij}]_{kxk}$:

$$\alpha^{\mathbf{R}} = 1 - d^{\mathbf{R}}$$
$$\beta^{\mathbf{R}} = 1 + d^{\mathbf{R}}$$

where:

$$d^{\mathbf{R}} = \frac{1}{k}\sqrt{(k-1)k\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2}$$

The all characteristic root $\lambda_i^{\mathbf{R}}$ are positive, if:

A)
$$\operatorname{sign}\left(1 - \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2\right) = +1 \text{ and } k \geqslant u$$

or:

B)
$$\operatorname{sign}\left(1 - \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2\right) = -1$$

and:

$$k \leqslant u$$

where:

$$u = \frac{-\sum\limits_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2}{1 - \sum\limits_{\substack{i,j\\ i\neq j}} r_{ij}^2}$$

Keywords: matrix of correlation, characteristic roof of matrix