PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVIII – ZESZYT 3-4 – 2011

MICHAŁ KOLUPA
JOANNA PLEBANIAK

KONSEKWENCJE MAJORYZOWANIA MACIERZY KORELACJI PRZEZ MACIERZ UNIWERSALNĄ NA TLE NIERÓWNOŚCI HELLWIGA

W roku 1976 Profesor Zdzisław Hellwig sformułował hipotezę:

Jeżeli jest spełniona nierówność macierzowa:

$$\mathbf{0}(k) < \mathbf{R}(k) \leqslant \mathbf{G}(k), \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{0}(k)$, $\mathbf{R}(k)$ oraz $\mathbf{G}(k)$ są macierzami stopnia k odpowiednio macierzą zerową, macierzą korelacji oraz macierzą uniwersalną, to model ekonometryczny określony przez regularną parę korelacyjną $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$ jest koincydentny.

Nierówność (1) nazywamy nierównością Hellwiga. Występujący w niej zapis:

$$\mathbf{R}(k) \leqslant \mathbf{G}(k) \tag{2}$$

oznacza, że macierz korelacji $\mathbf{R}(k)$ jest majoryzowana przez macierz uniwersalną $\mathbf{G}(k)$.

W niniejszej pracy przedstawimy konsekwencje, które wynikają z nierówności (2) występującej w nierówności Z. Hellwiga dotyczącej jakości mierzonej współczynnikiem $r^2_{\mathbf{R}}(k)$ modelu określonego przez regularna parę korelacyjną $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$.

Dla zwiększenia czytelności rozważań przypominamy definicje zarówno macierzy $\mathbf{R}(k)$ jak i $\mathbf{G}(k)$.

Macierz $\mathbf{R}(k)$ jest macierzą korelacji o elementach r_{ij}, które oznaczają współczynniki korelacji pomiędzy zmiennymi objaśniających Z_i oraz Z_j modelu, którego zmienną objaśnianą jest zmienna Y, czyli model:

$$Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k + e \tag{3}$$

określonego przez parę korelacyjną $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$, zaś $\mathbf{R}_0(k) = [r_j]$ jest wektorem korelacji, natomiast jego składowe r_j są równe współczynnikom korelacji pomiędzy parą zmiennych (Y, Z_j).

Para korelacyjna $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$ jest regularną parą korelacyjną to znaczy, że:

$$0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_k < 1. \tag{4}$$

Z kolei macierz uniwersalna $\mathbf{G}(k)$ ma elementy g_{ij} zdefiniowane wzorem:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ r_i r_j & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases} \tag{5}$$

natomiast współczynniki r_i oraz r_j są współczynnikami korelacji pomiędzy parami zmiennych (Y, Z_i) oraz (Y, Z_j).

Hipoteza Z. Hellwiga jest od 1993 roku twierdzeniem tegoż autora ponieważ w tym roku została udowodniona ([3]).

Dodajmy jeszcze, że koincydencja, regularna para korelacyjna, macierz korelacji i macierz uniwersalna zostały wprowadzone do ekonometrii przez Z. Hellwiga (patrz [1]).

Tak więc, jeżeli jest spełniona nierówność (1), to wektor $\mathbf{A}(k)$ spełniający układ równań:

$$\mathbf{R}(k)\mathbf{A}(k) = \mathbf{R}_0(k) \tag{6}$$

jest wektorem o dodatnich składowych.

Miarą jakości modelu określonego przez regularną parę korelacyjną $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$ jest współczynnik $r^2_{\mathbf{R}}(k)$ postaci:

$$r^2_{\mathbf{R}}(k) = \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k) = \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{A}(k). \tag{7}$$

Odnotujmy jeszcze, że współczynnik $r^2_{\mathbf{G}}(k)$ stanowi miarę modelu określonego przez regularną parę korelacyjną $(\mathbf{G}(k), \mathbf{R}_0(k))$, natomiast wektor $\mathbf{B}(k)$ spełnia układ równań:

$$\mathbf{G}(k)\mathbf{B}(k) = \mathbf{R}_0(k) \tag{8}$$

Dowodzi się ([2]), że składowa b_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ wektora $\mathbf{B}(k)$ spełniającego układ (8) ma postać:

$$b_i = \frac{r_i}{1 - r_i^2}\varphi^2_{\mathbf{G}}(k), \tag{9}$$

gdzie:

$$\varphi^2_{\mathbf{G}}(k) = 1 - \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k). \tag{10}$$

Ponieważ para korelacyjna $(\mathbf{G}(k), \mathbf{R}_0(k))$ jest regularna, przeto wektor $\mathbf{B}(k)$ ma wszystkie składowe dodatnie.

Jak wiadomo ([2]) prawdziwa jest równość:

$$\mathbf{G}(k) = \mathbf{M}(k) + \mathbf{R}_0(k)\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k), \tag{11}$$

gdzie:

$$\mathbf{M}(k) = \mathrm{diag}\left\{ 1 - r_1^2 \quad 1 - r_2^2 \quad \ldots \quad 1 - r_k^2 \right\}. \tag{12}$$

Wówczas na podstawie nierówności mamy:

$$\mathbf{R}(k) \leqslant \mathbf{M}(k) + \mathbf{R}_0(k)\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k), \tag{13}$$

a ponieważ wektor $\mathbf{A}(k) > 0$, przeto (13) dostajemy:

$$\mathbf{R}(k)\mathbf{A}(k) \leqslant \mathbf{M}(k)\mathbf{A}(k) + \mathbf{R}_0(k)\mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{A}(k), \tag{14}$$

przeto na podstawie (5) i (6) otrzymujemy:

$$\mathbf{R}_0(k) \leqslant \mathbf{M}(k)\mathbf{A}(k) + \mathbf{R}_0(k)r_{\mathbf{R}}^2(k), \tag{15}$$

albo:

$$\mathbf{R}_0\left[1 - r_{\mathbf{R}}^2(k)\right] \leqslant \mathbf{M}(k)\mathbf{A}(k), \tag{16}$$

czyli:

$$\mathbf{R}_0(k)\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) \leqslant \mathbf{M}(k)\mathbf{A}(k), \tag{17}$$

ale:

$$\mathbf{M}^{-1}(k) = \operatorname{diag}\left\{ \frac{1}{1-r_1^2} \quad \frac{1}{1-r_2^2} \quad \cdots \quad \frac{1}{1-r_k^2} \right\}, \tag{18}$$

przeto:

$$\mathbf{A}(k) \geqslant \mathbf{M}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k)\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) \tag{19}$$

skąd na podstawie (9) dostajemy:

$$a_i \geqslant \frac{r_i}{1-r_i^2}\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) = \frac{r_i}{1-r_i^2}\varphi_{\mathbf{G}}^2(k)\frac{\varphi_{\mathbf{R}}^2(k)}{\varphi_{\mathbf{G}}^2(k)} \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, k \tag{20}$$

czyli:

$$a_i\varphi_{\mathbf{G}}^2(k) \geqslant b_i\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, k \tag{21}$$

albo:

$$\mathbf{A}(k)\varphi_{\mathbf{G}}^2(k) \geqslant \mathbf{B}(k)\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) \tag{22}$$

Ponieważ $r_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, przeto z (21) mamy:

$$r_i a_i\varphi_{\mathbf{G}}^2(k) \geqslant r_i b_i\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, k \tag{23}$$

ale:

$$\sum_{i=1}^{k} r_i a_i = r_{\mathbf{R}}^2(k), \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{k} r_i b_i = r_{\mathbf{G}}^2(k), \tag{25}$$

przeto z (23) wynika, że:

$$r_{\mathbf{R}}^2(k)\varphi_{\mathbf{G}}^2(k) \geqslant r_{\mathbf{G}}^2(k)\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) \tag{26}$$

a stąd po prostych nie wymagających objaśnień przekształceniach dostajemy:

$$r_{\mathbf{R}}^2(k) \geqslant r_{\mathbf{G}}^2(k) \tag{27}$$

Nierówność (26) oznacza, że w przypadku majoryzowania macierzy $\mathbf{R}(k)$ przez macierz $\mathbf{G}(k)$ jakość modelu określonego przez regularną parę korelacyjną ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) jest nie większa niż jakość modelu określonego przez regularną parę korelacyjną ($\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$).

Na podstawie (9) i (24) mamy:

$$r_{\mathbf{G}}^2(k) = \sum_{i=1}^{k} r_i b_i = \varphi_{\mathbf{G}}^2(k) \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2}, \tag{28}$$

czyli:

$$r_{\mathbf{G}}^2(k) = \left[1 - r_{\mathbf{G}}^2(k)\right] \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2}, \tag{29}$$

$$r_{\mathbf{G}}^2(k) \left[1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2}\right] = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2}. \tag{30}$$

Ostatecznie:

$$r_{\mathbf{G}}^2(k) = \frac{Q}{1 + Q}, \tag{31}$$

gdzie:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2}. \tag{32}$$

Wobec tego na podstawie (7) oraz (27) mamy:

$$r_{\mathbf{R}}^2(k) \geqslant \frac{Q}{1 + Q}. \tag{33}$$

Tak więc jakość modelu określonego przez regularną parę korelacyjną ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) dla którego jest spełniona nierówność Z. Hellwiga jest co najmniej równa ułamkowi $\frac{Q}{1 + Q}$.

Na zakończenie odwołajmy się do przykładu ilustrującego przedstawione rozważania.

Przykład

Dana jest regularna para korelacyjna ($\mathbf{R}(3)$, $\mathbf{R}_0(3)$), gdzie:

$$\mathbf{R}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 & 0,02 \\ 0,01 & 1 & 0,04 \\ 0,02 & 0,04 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{R}_0(3) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Model określony przez tę parę jest koincydentny, ponieważ jest spełniona nierówność Z. Hellwiga:

$$\mathbf{0}(3) < \mathbf{R}(3) \leqslant \mathbf{G}(3), \tag{35}$$

gdzie:

$$\mathbf{G}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0,02 & 0,03 \\ 0,02 & 1 & 0,06 \\ 0,03 & 0,06 & 1 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Następnie:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2} = \frac{0,0001}{1 - 0,0001} + \frac{0,0004}{1 - 0,0004} + \frac{0,0009}{1 - 0,0009} \approx 0,001401 \tag{37}$$

zaś:

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2} \approx 1,001401 \tag{38}$$

czyli:

$$r_{\mathbf{R}}^2(k) \geqslant \frac{0,001401}{1,001401} \approx 0,0014. \tag{39}$$

a to oznacza, że jakość modelu określonego przez regularną parę daną wzorem (34) jest co najmniej równa 0,0014. Jest to również istotna konsekwencja majoryzowania macierzy korelacji przez macierz uniwersalną na tle nierówności Z. Hellwiga.

prof. zw. dr hab. Michał Kolupa, Politechnika Radomska w Radomiu
dr hab. Joanna Plebaniak, prof. SGH, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

LITERATURA

[1] Hellwig Z., (1976), *Przechodniość relacji skorelowania zmiennych losowych i płynące stąd wnioski ekonometryczne,* „Przegląd Statystyczny" nr 3, Warszawa.
[2] Kolupa M., (1977), *Dowód pewnego twierdzenia Z. Hellwiga i pewne własności macierzy uniwersalnej,* „Przegląd Statystyczny" nr 7, Warszawa.
[3] Kolupa M., (1993), *Dowód hipotezy Z. Hellwiga*, „Przegląd Statystyczny" nr 2, Warszawa.

KONSEKWENCJE MAJORYZOWANIA MACIERZY KORELACJI PRZEZ MACIERZ UNIWERSALNĄ NA TLE NIERÓWNOŚCI HELLWIGA

S t r e s z c z e n i e

W pracy wykazano, że jeżeli jest spełniona nierówność Z. Hellwiga:

$\mathbf{0}(k) < \mathbf{R}(k) \leqslant \mathbf{G}(k)$,

gdzie $\mathbf{0}(k)$, $\mathbf{R}(k)$ oraz $\mathbf{G}(k)$ są macierzami stopnia k odpowiednio zerowej, korelacji oraz uniwersalnej, to jakość modelu określonego przez regularną parę korelacyjną $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$ mierzona współczynnikiem $r^2_{\mathbf{R}}(k)$ jest co najmniej równa:

$$\frac{Q}{1+Q}$$

gdzie:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1-r_i^2},$$

zaś $r_i = r(Y, Z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ jest współczynnikiem korelacji pomiędzy parą zmiennych Y oraz Z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

W pracy udowodniono, że:

$$\mathbf{A}(k)\varphi^2_{\mathbf{G}}(k) \geqslant \mathbf{B}(k)\varphi^2_{\mathbf{R}}(k)$$

gdzie $\mathbf{A}(k)$ oraz $\mathbf{B}(k)$ są rozwiązaniami układów:

$\mathbf{R}(k)\mathbf{A}(k) = \mathbf{R}_0(k)$

$\mathbf{G}(k)\mathbf{B}(k) = \mathbf{R}_0(k)$

zaś $\varphi^2_{\mathbf{G}}(k)$ oraz $\varphi^2_{\mathbf{R}}(k)$ obliczamy według wzorów:

$$\varphi^2_{\mathbf{G}}(k) = 1 - \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k),$$

$$\varphi^2_{\mathbf{R}}(k) = 1 - \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k),$$

które mierzą jakość modeli określonych przez regularne pary korelacyjne odpowiednio $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$ oraz $(\mathbf{G}(k), \mathbf{R}_0(k))$. Główny wynik zamieszczony w niniejszej pracy orzeka, że jeżeli macierz korelacji jest majoryzowana przez macierz uniwersalną i jest spełniona nierówność Z. Hellwiga, to jakość modelu określonego przez regularną parę korelacyjną $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$ jest co najmniej równa jakości modelu określonego przez parę korelacyjną $(\mathbf{G}(k), \mathbf{R}_0(k))$.

Słowa kluczowe: macierz korelacji, macierz uniwersalna, nierówność Z. Hellwiga

THE CONSEQUENCES OF THE MAJORISATION OF THE CORRELATION MATRIX BY THE UNIVERSAL MATRIX BASED ON HELLWIG'S INEQUALITY

S u m m a r y

In the paper it was proved that if there is Hellwig's inequality:

$\mathbf{0}(k) < \mathbf{R}(k) \leqslant \mathbf{G}(k)$,

where $\mathbf{0}(k)$, $\mathbf{R}(k)$ and $\mathbf{G}(k)$ are accordingly, the zero matrix, the correlation matrix and the universal matrix, then the quality of the model defined by regular correlation pair $(\mathbf{R}(k), \mathbf{R}_0(k))$ measured by the factor $r^2_{\mathbf{R}}(k)$ is at least equal:

$$\frac{Q}{1+Q}$$

where:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i^2}{1 - r_i^2},$$

and $\mathrm{r}_i = r(Y, Z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ is a correlation coefficient between a pair of variables Y and Z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

In the paper it was proved, that:

$$\mathbf{A}(k)\varphi_{\mathbf{G}}^2(k) \geqslant \mathbf{B}(k)\varphi_{\mathbf{R}}^2(k)$$

where vector $\mathbf{A}(k)$ and vector $\mathbf{B}(k)$ are solution to the equations:

$\mathbf{R}(k)\mathbf{A}(k) = \mathbf{R}_0(k)$

$\mathbf{G}(k)\mathbf{B}(k) = \mathbf{R}_0(k)$

where $\varphi_{\mathbf{G}}^2(k)$ and (10) $\varphi_{\mathbf{R}}^2(k)$ are calculated according to the formulas:

$$\varphi_{\mathbf{G}}^2(k) = 1 - \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{G}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k),$$

$$\varphi_{\mathbf{R}}^2(k) = 1 - \mathbf{R}_0^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{R}_0(k),$$

which measure the quality of the models determined by the regular correlation pairs accordingly ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) and ($\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$). The main solution included in this work states that if the correlation matrix is majorised by the universal matrix and Hellwig's inequality is satisfied then the quality of the model defined by the regular correlation pair ($\mathbf{R}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$) is at least equal to the quality of the model defined by the regular universal pair ($\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{R}_0(k)$).

Key words: correlation matrix, universal matrix, Hellwig's inequality