PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVIII – ZESZYT 3-4 – 2011

EMIL PANEK

SYSTEM WALRASA I ZAPASY

1. WSTĘP

Przez system Walrasa w ekonomii matematycznej rozumiemy zazwyczaj układ równań różniczkowych dynamiki cen w n-produktowej gospodarce

$$\dot{p}(t) = \sigma f(p(t)), \tag{1}$$

gdzie:

t – zmienna czasu, $t \in R^1_+ = [0, +\infty)$,

n – liczba towarów (wytwarzanych i/lub zużywanych) w gospodarce,

$p(t) = (p_1(t), ..., p_n(t))$ – wektor cen towarów w momencie t,

$\dot{p}(t) = (\dot{p}_1(t), ..., \dot{p}_n(t))$ – pochodna funkcji (trajektorii) cen w momencie t,

$f(p(t)) = (f_1 p(t), ..., f_n p(t))$ – funkcja popytu nadwyżkowego(excess demand function),

$$f(p(t)) = f^d(p(t)) - f^s(p(t)),$$

$f^d(p(t)) = (f^d_1(p(t)), ..., f^d_n(p(t)))$ – funkcja zagregowanego popytu na towary w momencie t,

$f^s(p(t)) = (f^s_1(p(t)), ..., f^s_n(p(t)))$ – funkcja zagregowanej podaży towarów w gospodarce w momencie t,

σ – dodatni wskaźnik proporcjonalności (prędkości reakcji cen na zmianę popytu i podaży) [1].

Układ równań (1) opisuje prosty mechanizm dostosowywania cen do popytu i podaży, zgodnie z którym:

- jeżeli popyt na pewien towar przekracza jego podaż, a więc gdy w gospodarce mamy do czynienia z niedoborem towaru, jego cena zaczyna rosnąć,
- jeżeli popyt na towar jest niższy od jego podaży, tj. gdy w gospodarce mamy nadmiar pewnego towaru, wówczas jego cena zaczyna maleć,
- jeżeli popyt na towar jest równy jego podaży, cena towaru nie zmienia się, zob. np. [4], [5].

Opisany mechanizm zakłada nie tylko antropomorficzne ucieleśnienie rynku konkurencyjnego w postaci „niewidzialnej ręki”, ale także bezwzględne jego podporządkowanie zasadzie, że transakcje kupna-sprzedaży towarów dochodzą do skutku dopiero

[1] Nie jest to najogólniejsza postać równania dynamiki cen w gospodarce Walrasa, zob. np. [2]. W celu zachowania prostoty dalszych wywodów świadomie pozostajemy przy równaniu (1).

po osiągnięciu przez gospodarkę równowagi. Nie można w żadnym razie układu (1) traktować jako opisu codziennych transakcji w gospodarce rynkowej, które są zawierane permanentnie – bez względu na to czy ceny $p(t)$, po których są sprzedawane i/lub kupowane towary, są w chwili t zawierania transakcji cenami równowagi walrasowskiej, czy nie. Dobrze oczywiście, jeżeli są, ale najczęściej tak nie jest i nikt się w praktyce specjalnie nad tym nie zastanawia. Wówczas w (1) $f(p(t)) \neq 0$, a to oznacza, że chwilowo ma miejsce niedobór jednych towarów ($f_i(p(t)) > 0$), prowadzący do wzrostu cen i w konsekwencji do wzrostu ich podaży w przyszłości oraz nadmiar innych ($f_j(p(t)) < 0$), prowadzący do powstawania zapasów, których w systemie Walrasa w ogóle się nie uwzględnia.

W modelu, który prezentujemy poniżej, zapasy nie mają wpływu na ceny towarów. Rosną, gdy na rynku ma miejsce nadwyżka podaży i maleją, gdy zachodzi sytuacja odwrotna. Za gromadzenie i dystrybucję zapasów odpowiada rząd lub powołana przez rząd agencja, która przyjmuje (nieodpłatnie) nadwyżki towarów od producentów po to, aby w sytuacji niedoboru móc je przekazać (również nieodpłatnie) finalnym odbiorcom zbiorowym, reprezentowanym np. przez takie instytucje pożytku publicznego jak opieka społeczna, zdrowotna czy pozarządowe organizacje charytatywne.

Pokażemy, że przy standardowych założeniach również w takiej nietypowej gospodarce istnieje (globalnie stabilny) stan równowagi konkurencyjnej.

2. PROSTY SYSTEM WALRASA Z ZAPASAMI

Niech $f^s(p(t)) = (f_1^s(p(t)), ..., f_n^s(p(t)))$ oznacza wektor podaży towarów w gospodarce w momencie t, który dalej utożsamiamy z ich produkcją w tym momencie. Przez $z(t) = (z_1(t), ..., z_n(t))$ oznaczamy wektor zapasów w momencie t, natomiast przez $\mu \in (0, 1)$ stopę naturalnego ubytku zapasów.

Jeżeli popyt $f_i^d(p(t))$ na towar i-ty przekracza podaż (produkcję) $f_i^s(p(t))$, jego zaspokojenie wymaga sięgnięcia po zapasy, które w rezultacie zmaleją.

Jeżeli $f_i^d(p(t)) = f_i^s(p(t))$, wtedy w momencie t nie ma potrzeby sięgania po zapasy, ale zmieniają się one z tytułu ich naturalnego ubytku (ze stopą μ).

Jeżeli $f_i^d(p(t)) = f_i^s(p(t)) - \mu z_i(t)$, wtedy zapasy pozostają na stałym poziomie.

Jeżeli $f_i^d(p(t)) < f_i^s(p(t)) - \mu z_i(t)$, zapasy towaru i-tego rosną.

W prezentowanym modelu, podobnie jak w jego wersji oryginalnej, ceny towarów na rynku kształtują się zgodnie z równaniem (1). Strumień dochodów konsumentów w momencie t jest równy wartości zrealizowanego popytu $\left\langle p(t), \min\left\{f^s(p(t)), f^d(p(t))\right\}\right\rangle$ czyli produkcji sprzedanej (a nie wytworzonej) przez producentów; symbolem

$$\min\left\{f^s(p(t)), f^d(p(t))\right\} = (\min\{f_1^s(p),\ f_1^d(p)\}, ..., \min\{f_n^s(p),\ f_n^d(p)\})$$

oznaczamy tutaj wektor popytu zrealizowanego przy cenach p, a symbolem $\langle x, y\rangle$ iloczyn skalarny wektorów $x, y \in R^n$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i, y_i$. Wektor towarów, które nie znalazły w momencie t nabywcy na rynku

$$\max\left\{f^s(p(t))-f^d(p(t)),0\right\}=\left(\max\left\{f_1^s(p(t))-f_1^d(p(t)),0\right\},...,\max\left\{f_n^s(p(t))-f_n^d(p(t)),0\right\}\right)$$

zostaje nieodpłatnie gromadzony w postaci zapasów. Tam gdzie zapasy towaru i są dodatnie, $z_i(t)>0$, ich dynamikę opisuje równanie

$$\dot{z}_i(t)=f_i^s(p(t))-f_i^d(p(t))-\mu z_i(t). \tag{2a}$$

Natomiast tam gdzie dochodzi do wyczerpania zapasów, tj. gdy $z_i(t)=0$, przyjmujemy:

$$\dot{z}_i(t)=\max\{f_i^s(p(t))-f_i^d(p(t))-\mu z_i(t),\ 0\}. \tag{2b}$$

Przez system Walrasa z zapasami rozumiemy układ $2n$ równań różniczkowych dynamiki cen towarów i ich zapasów w gospodarce konkurencyjnej:

$$\dot{p}(t)=\sigma[f^d(p(t))-f^s(p(t))], \tag{3}$$

$$\dot{z}_i(t)=\begin{cases} f_i^s(p(t))-f_i^d(p(t))-\mu z_i(t), & gdy \quad z_i(t)>0, \\ \max\{f_i^s(p(t))-f_i^d(p(t))-\mu z_i(t),\quad 0\}, & gdy \quad z_i(t)=0, \end{cases} \tag{4}$$

$$i=1,...,n.$$

Weźmy dowolny wektor cen $p^0>0$ i dowolny wektor $z^0 \geqq 0$.
Δ **Definicja 1.** Określone na półosi czasu $R_+^1=[0,+\infty)$ rozwiązanie $p(t),z(t)$ układu (3)-(4) z dodatnią funkcją $p(t)$ i nieujemną funkcją $z(t)$, spełniające warunek początkowy

$$p(0)=p^0>0,\quad z(0)=z^0\geqq 0 \tag{5}$$

nazywamy (p^0,z^0,∞) – dopuszczalną trajektorią cen i zapasów w gospodarce Walrasa.

▲

Obowiązuje standardowy układ założeń [2]:
(I) $f^d,f^s\in C^1(R_+^n\setminus\{0\}\to R^n)$,
(II) $p_i=0\Rightarrow f_i(p)>0$,
(III) $\forall p\geqq 0\ \forall\lambda>0\left(f^d(\lambda p)=f^d(p)\ \ \&\ \ f^s(\lambda p)=f^s(p)\right)$,
(IV) $\forall p\geqq 0\left(\langle p,f^d(p)\rangle=\langle p,f^s(p)\rangle\right)$ (prawo Walrasa),
(V) $\forall p\in P_+^n(1)=\{p\in R_+^n \,\Big|\, \sum_{i=1}^n p_i=1\}\quad \forall\lambda\in R^n\setminus(R_+^n\cup R_-^n)$

$$\lambda J(p)\lambda^T<0$$

[2] Z ich interpretacją można zapoznać się np. w pracy [4] rozdz. 3

gdzie

$$J(p) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_j}\right)_{(n,n)}, \quad f = f^d - f^s$$

(λ jest wektorem wierszowym, T jest znakiem transpozycji, R^n_+ oznacza nieujemny, a R^n_- niedodatni orthant przestrzeni R^n).

O własnościach (p^0, z^0, ∞)-dopuszczalnych trajektorii cen i zapasów mówi poniższe twierdzenie.

□ **Twierdzenie 1.** Przy założeniach (I) – (IV) :
(i) każde rozwiązanie układu (3) – (4) spełnia warunek:
$\forall t \geqslant 0\ (p(t) > 0\ \ \&\ \ z(t) \geqq 0)$,
(2i) trajektoria cen $p(t)$ leży na powierzchni kuli n-wymiarowej $K^n_r(0)$ o promieniu $r = \left\|p^0\right\|_E$ i środku w 0 (przez $\|x\|_E$ oznaczamy normę Euklidesa wektora $x \in R^n$).

Dowód. (i) Załóżmy, że $\exists(t' > 0)\exists i \in \{1, ..., n\} \quad (p_i(t') = 0)$. Wtedy $p_i(t') > 0$ (zgodnie z warunkiem (II)). Trajektoria cen jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na obszarze określoności zatem $\exists\varepsilon > 0 \forall t \in (t' - \varepsilon, t')\,(p_i(t) < 0)$ i ponieważ $p^0_i > 0$, więc $\exists\ t'' > 0\ \ (p_i(t'') = 0\ \ \&\ \ \dot{p}_i(t'') \leqslant 0)$, co jest sprzeczne z warunkiem (II) i kończy dowód części (i).

(2i) Z prawa Walrasa otrzymujemy:

$$\forall t \geqslant 0\ \left(2\langle p(t), \dot{p}(t)\rangle = 2\sigma\langle p(t), f^d(p(t)) - f^s(p(t))\rangle = 0\right),$$

czyli

$$\forall t \geqslant 0\ (2\int_0^t \langle p(\theta), \dot{p}(\theta)\rangle d\theta = \langle p(t), p(t)\rangle - \langle p^0, p^0\rangle = \|p(t)\|^2_E - \left\|p^0\right\|^2_E = 0),$$

stąd

$$\forall t \geqslant 0\ \left(\sum_{i=1}^n p^2_i(t) = r^2\right), \text{ gdzie } r = \left\|p^0\right\|_E.$$

■

3. RÓWNOWAGA

Δ **Definicja 2.** Mówimy, że system Walrasa z zapasami jest w równowadze (długookresowej), jeżeli ustalą się takie ceny $p(t) \equiv \bar{p}$ oraz takie zapasy $z(t) \equiv \bar{z}$, przy których

$$f^d(\bar{p}) = f^s(\bar{p}). \tag{6}$$

▲

W równowadze spełnione są jednocześnie dwa układy równań:

$$f^d(\bar{p}) - f^s(\bar{p}) = 0 \tag{7a}$$

oraz

$$f^s(\bar{p}) - f^d(\bar{p}) - \mu\bar{z} = 0, \tag{7b}$$

a stąd wynika, że $\bar{z} = 0$. System Walrasa (3) – (4) w równowadze pozbywa się zapasów. Łatwo zauważyć też, że ceny $\bar{p}$ w równowadze są dodatnie. Rzeczywiście, zakładając $\bar{p}_i = 0$ dla pewnego i, z warunku (II) otrzymujemy $f_i(\bar{p}) = f_i^d(\bar{p}) - f_i^s(\bar{p}) > 0$, co przeczy (7a). Z dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji popytu $f^d(p)$ i podaży $f^s(p)$ wnioskujemy, że jeżeli $\bar{p} > 0$ jest wektorem cen równowagi, to jest nim także jego dowolna dodatnia wielokrotność.

Półprostą

$$P = \{\lambda\bar{p} \mid \lambda > 0\}$$

nazywamy tradycyjnie promieniem cen równowagi.

Pokażemy, że w systemie Walrasa z zapasami ceny równowagi istnieją i są określone jednoznacznie z dokładnością do struktury.

□ **Twierdzenie 2.** Przy założeniach (I) – (V) istnieje dokładnie jeden wektor cen równowagi rynkowej (spełniający warunek (6)) określony z dokładnością do struktury.

Dowód. Utwórzmy funkcję

$$w = (w_1, ..., w_n) : P_+^n(1) \to R^n,$$

$$w_i(p) = \max\{p_i + f_i(p), \frac{1}{2}\, p_i\}, \quad i = 1, ..., n. \tag{$*$}$$

Wówczas $w_i \in C^0(P_+^n(1) \to R^n)$ oraz

$$\forall p \in P_+^n(1)\ (w(p) > 0).$$

Rzeczywiście, jeżeli $p_i = 0$, to zgodnie z warunkiem (II) $f_i(p) > 0$, czyli $w_i(p) \geqslant p_i + f_i(p) = f_i(p) > 0$. Jeżeli zaś $p_i > 0$, to $w_i(p) \geqslant \frac{1}{2} p_i > 0$.

Niech

$$\phi(p) = \frac{w(p)}{\|w(p)\|},$$

gdzie $\|x\| = \sum_i |x_i|$ (wszędzie dalej tak samo).

Wówczas $\phi \in C^0(P_+^n(1) \to R_+^n)$ oraz

$$\forall p \in P_+^n(1)\,(\phi(p) > 0\ \ \&\ \ \|\phi(p)\| = \left\| \frac{w(p)}{\|w(p)\|} \right\| = 1),$$

zatem ϕ jest ciągłym odwzorowaniem simpleksu $P^n_+(1)$ w siebie. Z twierdzenia Brouwera (zob. np. [3], rozdz.1, §4) płynie wówczas wniosek, że $\exists \bar{p} \in P^n_+(1)(\phi(\bar{p}) = \bar{p} > 0)$. Zgodnie z definicją odwzorowania $w(p)$,

$$\forall p \in P^n_+(1)\left(w(p) \geqslant \frac{1}{2}p\right),$$

czyli w szczególności $w(\bar{p}) \geqslant \frac{1}{2}\bar{p}$, tzn. $\|w(\bar{p})\| \geqslant \frac{1}{2}\|\bar{p}\| = \frac{1}{2}$. Pokażemy, że $\|w(\bar{p})\| > \frac{1}{2}$. W tym celu załóżmy $\|w(\bar{p})\| = \frac{1}{2}$. Wtedy $w(\bar{p}) = \frac{1}{2}\bar{p}$, tzn. zgodnie z (*) $\frac{1}{2}\bar{p} = w(\bar{p}) \geqslant \bar{p} + f(\bar{p})$, czyli $f(\bar{p}) \leqslant -\frac{1}{2}\bar{p} < 0$. Oznacza to, że $\langle \bar{p}, f(\bar{p})\rangle < 0$, co jest sprzeczne z prawem Walrasa (IV). Zatem

$$\|w(\bar{p})\| > \frac{1}{2}, \text{ tzn. } \bar{p} = \phi(\bar{p}) = \frac{w(\bar{p})}{\|w(\bar{p})\|} < \frac{w(\bar{p})}{\frac{1}{2}}, \tag{$**$}$$

czyli $w(\bar{p}) > \frac{1}{2}\bar{p}$ i wobec (*)

$$w(\bar{p}) = \bar{p} + f(\bar{p}),$$

co zgodnie z (**) prowadzi do warunku:

$$\bar{p} = \frac{\bar{p} + f(\bar{p})}{\|w(\bar{p})\|}. \tag{$***$}$$

Mnożąc obustronnie (***) przez wektor $f(\bar{p})$ otrzymujemy znowu (zgodnie z prawem Walrasa):

$$\langle \bar{p}, f(\bar{p})\rangle = \frac{\langle \bar{p}, f(\bar{p})\rangle + \langle f(\bar{p}), f(\bar{p})\rangle}{\|w(\bar{p})\|} = 0,$$

czyli $\langle f(\bar{p}), f(\bar{p})\rangle = 0$, co oznacza że

$$f(\bar{p}) = f^d(\bar{p}) - f^s(\bar{p}) = 0.$$

Obie funkcje $f^d(p)$, $f^s(p)$ są dodatnio jednorodne stopnia zero (warunek (III)), więc również

$$\forall \lambda > 0\left(f(\lambda\bar{p}) = f^d(\lambda\bar{p}) - f^s(\lambda\bar{p}) = f^d(\bar{p}) - f^s(\bar{p}) = 0\right).$$

Załóżmy, że istnieją dwa wektory cen równowagi $\bar{p}^1, \bar{p}^2$ o różnej strukturze: $\tilde{p}^1 = \frac{\bar{p}^1}{\|\bar{p}^1\|} \neq \tilde{p}^2 = \frac{\bar{p}^2}{\|\bar{p}^2\|}$ i przyjmijmy oznaczenie: $p(\tau) = \tilde{p}^1 + \tau(\tilde{p}^2 - \tilde{p}^1)$, $\tau \in [0, 1]$. Wówczas

$$p(0) = \tilde{p}^1, \quad p(1) = \tilde{p}^2 \text{ oraz } \forall \tau \in [0, 1] \quad (p(\tau) \in P^n_+(1)).$$

Niech $\phi(\tau) = \langle \tilde{p}^2 - \tilde{p}^1, f(p,\tau)) - f(\tilde{p}^1)\rangle$. Wówczas $\phi(0) = 0$, $\phi \in C^1\left([0,1] \to R^1\right)$ oraz

$$\dot{\phi}(\tau) = \lambda J(p(\tau))\lambda^T$$

gdzie $\lambda = \tilde{p}^2 - \tilde{p}^1 \neq 0$, tzn. $\dot{\phi}(\tau) < 0$ na $[0,1]$ (zgodnie z warunkiem (V)), zatem

$$\phi(1) = \langle \tilde{p}^2 - \tilde{p}^1, f(\tilde{p}^2) - f(\tilde{p}^1)\rangle < 0,$$

co jest niemożliwe, gdyż $f(\tilde{p}^1) = f(\tilde{p}^2) = 0$.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód całego twierdzenia.

■

4. STABILNOŚĆ

W standardowej wersji modelu Walrasa stabilność gospodarki oznacza zbieżność jej dowolnej dopuszczalnej trajektorii cen do pewnego wektora cen równowagi z promienia P. Teraz musimy uwzględnić zbieżność zarówno cen, jak i zapasów do ich poziomu w równowadze. W przypadku cen będzie to pewien wektor $\bar{p} \in P$, a w przypadku zapasów wektor $\bar{z} = 0$.

Δ **Definicja 3.** System Walrasa z zapasami nazywamy (globalnie) asymptotycznie stabilnym, jeżeli $\forall p^0 > 0 \forall z^0 \geqq 0$ każda (p^0, z^0, ∞) – dopuszczalna trajektoria cen i zapasów spełnia warunek:

$$(i) \exists\ \bar{p} \in P\left(\lim_t p(t) = \bar{p}\right),$$

$$(2i) \lim_t z(t) = 0.$$

▲

□ **Twierdzenie 3.** Przy założeniach (I) – (V) system Walrasa z zapasami jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Dowód. Pokażemy najpierw, że

$$\forall p^1 \in P \quad \forall p^2 \notin P\,((\ \langle p^1, f(p^2)\rangle > 0\ ))\,.$$

Dowód wzorowany jest na końcowym fragmencie dowodu twierdzenia 2. Weźmy dowolną parę wektorów cen $p^1 \in P$ i $p^2 \notin P$ oraz wprowadźmy oznaczenia:

$$\tilde{p}^1 = \frac{p^1}{\left\|p^1\right\|}\ ,\ \tilde{p}^2 = \frac{p^2}{\left\|p^2\right\|}, \quad p(\tau) = \tilde{p}^1 + \tau(\tilde{p}^2 - \tilde{p}^1), \quad \tau \in [0,1].$$

Mamy wówczas $p(0) = \tilde{p}^1$, $p(1) = \tilde{p}^2$. Niech

$$\phi(\tau) = \langle \tilde{p}^2 - \tilde{p}^1, f(p(\tau)) - f(\tilde{p}^1)\rangle.$$

Wówczas $\phi(0) = 0$, $\phi \in C^1([0,1] \to R^1)$ oraz zgodnie z warunkiem (V)

$$\forall \tau \in [0,1]\left(\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \lambda J(p(\tau))\lambda^T < 0\right),$$

gdzie $\lambda = \tilde{p}^2 - \tilde{p}^1 \neq 0$. Zatem $\phi(1) = \langle \tilde{p}^2 - \tilde{p}^1, f(\tilde{p}^2) - f(\tilde{p}^1)\rangle < 0$.

Ponieważ $\tilde{p}^1 \in P$, więc $f(\tilde{p}^1) = 0$, czyli

$$\phi(1) = \langle \tilde{p}^2, f(\tilde{p}^2)\rangle - \langle \tilde{p}^1, f(\tilde{p}^2)\rangle < 0.$$

W myśl prawa Walrasa (warunek IV) $\langle \tilde{p}^2, f(\tilde{p}^2)\rangle = 0$, zatem $\langle \tilde{p}^1, f(\tilde{p}^2)\rangle > 0$, a stąd (wobec dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji popytu nadwyżkowego):

$$\langle p^1, f(p^2)\rangle > 0. \tag{$*$}$$

Weźmy teraz dowolną (p^0, z^0, ∞) – dopuszczalną trajektorię cen $p(t)$ i zapasów $z(t)$ (rozwiązanie układu (3)-(4) z warunkiem początkowym (5)). Wówczas zgodnie z twierdzeniem 1 (2i) $\forall t \geqslant 0\,(p(t) \in K_r^n(0))$, gdzie $r = \left\|p^0\right\|_E$. Niech $\bar{p}$ będzie punktem, w którym promień cen równowagi P przebija kulę $K_r^n(0)$.

Jeżeli $p^0 = \bar{p}$, to $\forall t \geqslant 0\,(p(t) = \bar{p})$ oraz

$$\dot{z}_i(t) = \begin{cases} -\mu z_i(t) & , \quad gdy \quad z_i^0(t) > 0, \\ 0 & , \quad gdy \quad z_i^0(t) = 0, \end{cases}$$

tzn. $\lim\limits_{t} z(t) = 0$.

Załóżmy teraz, że $p^0 \neq \bar{p}$. Wówczas $\forall t \geqslant 0\,(p(t) \notin P)$. Utwórzmy funkcję

$$V(t) = \frac{1}{2}\langle p(t) - \bar{p}, p(t) - \bar{p}\rangle \geqslant 0.$$

Oczywiście $V \in C^1[0, +\infty)$ oraz $\forall t \geqslant 0$:

$$\dot{V}(t) = \langle p(t) - \bar{p}, \dot{p}(t)\rangle = \sigma\langle p(t), f^d(p(t)) - f^s(p(t))\rangle -$$

$$-\sigma\langle \bar{p}, f^d(p(t)) - f^s(p(t))\rangle = -\sigma\langle \bar{p}, f(p(t))\rangle < 0 \tag{$**$}$$

(zgodnie z (*)). Aby pokazać, że $p(t) \underset{t}{\to} \bar{p}$ wystarczy udowodnić, że $V(t) \underset{t}{\to} 0$. Ponieważ $\dot{V}(t) < 0$ oraz $V(t) \geqslant 0$ na półosi $[0, +\infty)$, zatem $\lim\limits_{t} V(t) = \bar{V} \geqslant 0$. Załóżmy, że $\bar{V} > 0$. Wówczas $\exists \delta > 0 \forall t \geqslant 0\,(\|p(t) - \bar{p}\|_E \geqslant \delta)$.

Niech $F(p(t)) = -\sigma\langle \bar{p}, f(p(t))\rangle$ oraz $\Omega = \{p \in K_r^n(0) \mid \|p - \bar{p}\|_E \geqslant \delta\}$.

Zbiór Ω jest zwarty i zgodnie z (**)

$$\forall t \geqslant 0\left(\dot{V}(t) = F(p(t)) < 0 \;\; \& \;\; F(p) \in C^0(\Omega \to R^1)\right),$$

czyli istnieje

$$\max_{p \in \Omega} F(p) = -\varepsilon < 0.$$

Wówczas

$$\forall t \geqslant 0 \quad \left(\dot{V}(t) \leqslant -\varepsilon < 0\right),$$

tzn.

$$0 \leqslant V(t) \leqslant -\varepsilon t \underset{t}{\rightarrow} -\infty.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\lim V(t) = 0$, czyli $\lim_t p(t) = \bar{p}$.

Rozwiązaniem równania (4) jest funkcja zapasów i – tego towaru

$$z_i(t) = \max\{z_i^0 e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu\theta} f_i(\theta) d\theta,\ 0\}, \tag{8}$$

gdzie

$$z_i^0 e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu\theta} f_i(\theta) d\theta = e^{-\mu t} \left[z_i^0 - \sigma^{-1} \int_0^t e^{\mu\theta} \dot{p}_i(\theta)\, d\theta\right] =$$

$$= e^{-\mu t} \left[z_i^0 - (1-\mu)\sigma^{-1}\ p_i^0\right] - \sigma^{-1}(1-\mu) p_i(t) \underset{t}{\rightarrow}\ -\sigma^{-1}(1-\mu)\bar{p}_i < 0.$$

Zatem zgodnie z (4)

$$\forall i\ (\lim_t z_i(t) = 0),$$

co zamyka dowód twierdzenia.

■

Łatwo pokazać, że w szczególnym przypadku, gdy stopa ubytku zapasów $\mu = 0$, a początkowy zapas towarów $z^0 > 0$, wtedy dodatnim cenom $\bar{p}$ odpowiada w równowadze dodatni wektor zapasów $\bar{z}$. Również taki stan równowagi jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Ekonomii Matematycznej

LITERATURA

[1] McKenzie L.W. (2002), Classical General Equilibrium Theory, The MIT Press, Cambridge.
[2] Morishima M. (1996), Dynamic economic theory, Cambridge University Press.
[3] Nikaido H., (1968), Convex Structures and Economic Theory, Acad. Press, New York and London.
[4] Panek E., (2003), Ekonomia matematyczna, Wydawnictwo AEP, Poznań.
[5] Takayama A., (1997), Mathematical Economics, Cambridge University Press.

SYSTEM WALRASA I ZAPASY

S t r e s z c z e n i e

W literaturze z zakresu równowagi ogólnej L. Walrasa standardowo zakłada się, że o dynamice cen towarów w gospodarce konkurencyjnej decydują relacje między popytem i podażą, co jest oczywiście prawdą. Prawdą jest jednak również to, że różnice między popytem i podażą prowadzą do powstawania zapasów towarów, czego w standardowych modelach równowagi ogólnej najczęściej już się nie uwzględnia.

Artykuł jest skromną próbą wypełnienia tej luki. Przedstawiamy w nim nawiązujący do Walrasa model kształtowania cen, uzupełniony o układ równań dynamiki zapasów w gospodarce konkurencyjnej. Dowodzimy istnienia stanu równowagi konkurencyjnej w takiej gospodarce oraz jego globalnej stabilności.

Słowa kluczowe: system Walrasa, równowaga konkurencyjna, stabilność

WALRASIAN SYSTEM AND STOCKS

A b s t r a c t

In the literature concerning Walrasian general equilibrium it is normally assumed that in the competitive economy the decisive factor influencing the price dynamics is the relation between demand and supply, what is actually true. However it is also true that the differences between demand and supply lead to the creation of stocks of goods, what in standard models of the general equilibrium is usually not taken into consideration.

This article is a modest attempt to fill this gap. We present in it a model of price adjustment, which refers to Walras and is complemented by a system of equations of stocks dynamics in the competitive economy. We prove the existence of competitive equilibrium in this economy and its global stability.

Keywords: Walras System, competitive equilibrium, stability