

JACEK KWIATKOWSKI

## WYBRANE MODELE ZAWIERAJĄCE STOCHASTYCZNY PIERWIĄSTEK JEDNOSTKOWY W ANALIZIE KURSÓW WALUTOWYCH<sup>1</sup>

### 1. WSTĘP

Granger i Swanson [5] wykazali, że finansowe i makroekonomiczne procesy, które wymagają obliczenia pierwszych różnic nie zawsze są procesami zintegrowanymi rzędu pierwszego. Dowodzą oni, że mają one często pierwiastek jednostkowy, który nie jest stały lecz losowy. Zmienny parametr, odpowiedzialny za stopień zintegrowania traktowany jest tu jako odrębny proces stochastyczny, którego realizacje oscylują wokół jedynki. Tego typu proces określa się jako proces zawierający stochastyczny pierwiastek jednostkowy (ang. *Stochastic Unit Root, STUR*).

Celem artykułu jest przedstawienie wybranych modeli zawierających stochastyczny pierwiastek jednostkowy oraz opis badań empirycznych dokonanych na podstawie dziennych realizacji kursu złotego w stosunku do najważniejszych walut europejskich. Prezentowany artykuł bezpośrednio nawiązuje do publikacji dotyczących modeli STUR (zob. [5], [8], [10], [15], [16] i [17]), a także jest ich rozszerzeniem. Po pierwsze, zbadano nieznaną, jak dotąd, moc wyjaśniającą niektórych specyfikacji STUR w stosunku do standardowych modeli zmienności tj. SV (ang. *Stochastic Volatility*) i GARCH (ang. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Po drugie, w modelach STUR przyjęto założenie, że losowy w czasie pierwiastek jest procesem stochastycznej zmienności. Jest to nowe podejście, które nie było dotąd jeszcze przedmiotem rozważań w literaturze przedmiotu. Po trzecie, opracowano metody numeryczne wykorzystywane w schemacie wnioskowania bayesowskiego w kontekście rozważanych tu specyfikacji.

Układ artykułu jest następujący. Część druga przedstawia model STUR w wersji Grangera i Swansona [5]. Część trzecia dotyczy modelu STUR w wersji Leybourne'a ([10] i [11]), natomiast część czwarta opisuje model dwuliniowy, zaproponowany przez Francqa, Makarovą i Zakoïana [3]. Ostatnia, piąta część artykułu zawiera wyniki badań empirycznych. Na końcu pracy zamieszczono najważniejsze wnioski.

---

<sup>1</sup> Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt badawczy numer N N111 431737. Autor dziękuje anonimowemu Recenzentowi za bardzo wnikliwe uwagi i sugestie. Adres elektroniczny: [jkwiat@umk.pl](mailto:jkwiat@umk.pl)

## 2. MODEL STUR W WERSJI GRANGERA I SWANSONA

Oznaczmy przez  $\{y_t, t = 1, \dots, T\}$  proces stochastyczny. Granger i Swanson [5] rozważali następujący proces STUR:

$$y_t = a_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad (1)$$

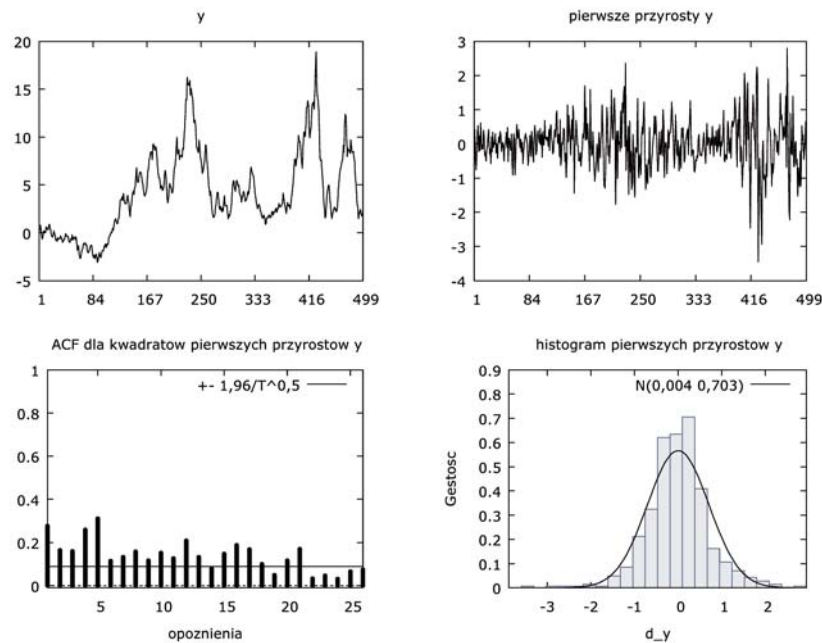
gdzie:

$$a_t = \exp(\delta_t), \quad E(a_t) = 1. \quad (2)$$

Przez  $\{\delta_t, t = 1, \dots, T\}$  oznaczono stacjonarny, nieobserwowalny proces autoregresyjny rzędu pierwszego:

$$\delta_t = \phi_0 + \phi_1 \delta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \omega^2), \quad (3)$$

natomiast przez  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$   $t = 1, \dots, T$  oznaczono niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym z zerową średnią i wariancją  $\sigma^2$  (z ang. *independent and identically distributed; iid*). Dodatkowo zakłada się, że składniki losowe  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  są względem siebie niezależne tj.  $\varepsilon_t \perp \eta_s$  dla  $t, s = 1, \dots, T$ .



Rysunek 1. Charakterystyki procesu STUR, w którym  $\phi_0 = -0,01$ ,  $\phi_1 = 0,4$ ,  $\sigma^2 = 0,1$  i  $\omega^2 = 0,01$ . Lewy, górny panel przedstawia jego realizację, kolejny u góry pokazuje pierwsze przyrosty, dolny, lewy zawiera informacje na temat funkcji autokorelacji kwadratów pierwszych przyrostów, tj.  $(\Delta y_t)^2$ , natomiast prawy, dolny panel przedstawia histogram pierwszych przyrostów oraz funkcję gęstości rozkładu normalnego

Źródło: obliczenia własne.

Gdy  $\delta_t = 0$  dla  $t = 1, \dots, T$ , to model (1)-(3) redukuje się do dobrze znanego w literaturze przedmiotu modelu błędzenia losowego tj.  $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ , którego pierwsze przyrosty tworzą proces zintegrowany w stopniu zerowym.

Niektóre, nieznanne dotąd własności procesu STUR przedstawił kilka lat temu Yoon [21]. Okazuje się, że proces STUR jest procesem ściśle stacjonarnym, natomiast nie jest kowariancyjnie stacjonarny. Dodatkowo nie ma skończonych momentów, w tym nawet średniej oraz ma bardzo grube ogony, co wskazuje na znaczne odstępstwo jego rozkładu od rozkładu normalnego. Również w odróżnieniu od standardowych procesów zawierających pierwiastek jednostkowy, proces STUR nie jest kowariancyjnie stacjonarny dla dowolnej różnicy tj.  $\{\Delta^d y_t\}$ , gdzie  $d = 1, 2, \dots$

Na rysunku 1 przedstawiono przykładową realizację procesu STUR, w którym przyjęto następujące założenia odnośnie parametrów modelu:  $\phi_0 = -0,01$ ,  $\phi_1 = 0,4$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $\omega^2 = 0,01$  oraz  $y_0 = 0$  i  $\delta_0 = 0$ . Oprócz jego realizacji, zamieszczono również pierwsze różnice, obliczone zgodnie ze wzorem  $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ , wartości funkcji autokorelacji dla  $(\Delta y_t)^2$  wraz z górną granicą 95% przedziału ufności, a także histogram pierwszych przyrostów i funkcję gęstości rozkładu normalnego.

Można łatwo zauważyć, że procesy STUR mogą generować szeregi czasowe, których własności zbliżone są do typowych własności szeregów finansowych. W tym przypadku, przebieg pierwszych przyrostów wskazuje wyraźnie na efekt skupiania zmienności (ang. *volatility clustering*), który polega na tym, że zarówno małe, jak i duże zmiany cen instrumentu bazowego następują seriami. Bardzo ciekawie przedstawia się również funkcja autokorelacji kwadratów pierwszych przyrostów, która wykazuje się istotną zależnością aż do 20-ego opóźnienia włącznie. Również histogram, zamieszczony w prawym, dolnym panelu potwierdza większą koncentrację i grubsze ogony niż w rozkładzie normalnym. Wszystkie wymienione cechy są szeroko znane i omawiane w literaturze przedmiotu jako typowe własności szeregów finansowych (zob.[2]).

Rozszerzmy model STUR w wersji Grangera i Swansona, tak aby składniki losowe  $\eta_t$  (dla  $t = 1, \dots, T$ ) tworzyły proces o strukturze SV. Oznacza to, że  $\{\delta_t, t = 1, \dots, T\}$  jest procesem autoregresyjnym rzędu pierwszego:

$$\delta_t = \phi_0 + \phi_1 \delta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \omega_t^2), \quad (4)$$

w którym warunkową wariancję  $\omega_t^2$  można opisać jako:

$$\omega_t^2 = \omega^2 \exp(h_{\text{sygnat},t}^{\text{SV}}),$$

gdzie:

$$h_{\text{sygnat},t}^{\text{SV}} = \rho_{\text{sygnat}} h_{\text{sygnat},t-1}^{\text{SV}} + \zeta_{\text{sygnat},t} \text{ oraz } \rho_{\text{sygnat}} \in (-1, 1), \text{ a także}$$

$$\zeta_{\text{sygnat},t} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \gamma_{\text{sygnat}}^2), \quad t = 1, \dots, T.$$

Model o równaniach (1)-(2) i (4) jest zatem uogólnieniem podstawowego modelu STUR w wersji Grangera i Swansona [5], ponieważ dopuszcza możliwość zmiennej warunkowej wariancji w procesie pierwiastka jednostkowego. Pozostałe założenia

są identyczne jak w standardowym modelu STUR. Model ten oznaczono symbolem STUR-G-SV.

Niech  $\theta = (\phi_0, \phi_1, \sigma^2, \omega^2, \rho_{sygnat}, \gamma_{sygnat}^2)'$  będzie wektorem nieznanymi parametrów w modelu STUR-G-SV (równania (1)-(2) i (4)). Dodatkowo przez  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_T)'$  i  $h_{sygnat}^{SV} = (h_{sygnat,1}^{SV}, \dots, h_{sygnat,T}^{SV})'$  oznaczmy wektory zmiennych ukrytych.

Przy założeniu normalności składników losowych, gęstość wektora obserwacji w modelu STUR-G-SV jest następująca:

$$p(y | \delta, \delta_0, h_{sygnat}^{SV}, h_{sygnat,0}^{SV}, \theta, y_0) = \prod_{t=1}^T f_N(y_t | e^{\delta_t} y_{t-1}, \sigma^2), \quad (5)$$

gdzie:

$y = (y_1, \dots, y_T)'$  jest wektorem obserwacji,  $\delta_0, h_{sygnat,0}^{SV}$  i  $y_0$  są wartościami początkowymi, natomiast symbol  $f_N(\cdot | c, d)$  oznacza gęstość rozkładu normalnego o średniej  $c$  i wariancji  $d$ .

Jako rozkłady *a priori* parametrów  $\theta$  można przyjąć następujące rozkłady właściwe:

$$p(\theta) = p(\phi_0) p(\phi_1) p(\sigma^2) p(\omega^2) p(\rho_{sygnat}) p(\gamma_{sygnat}^2), \quad (6)$$

gdzie:

$$p(\phi_0) = f_N(\phi_0 | 0, \sigma_{\phi_0}^2), \quad p(\phi_1) \propto f_N(\phi_1 | \mu_{\phi_1}, \sigma_{\phi_1}^2) I_{(-1,1)}(\phi_1), \quad p(\sigma^2) = f_{IG}(\sigma^2 | c_\sigma, d_\sigma),$$

$$p(\omega^2) = f_{IG}(\omega^2 | c_\omega, d_\omega), \quad p(\rho_{sygnat}) \propto f_N(\rho_{sygnat} | \mu_\rho, \sigma_\rho^2) I_{(-1,1)}(\rho_{sygnat}),$$

$$p(\gamma_{sygnat}^2) = f_{IG}(\gamma_{sygnat}^2 | c_\gamma, d_\gamma).$$

Symbol  $I_{(-1,1)}(\cdot)$  oznacza funkcję wskaźnikową przedziału  $(-1, 1)$ , natomiast  $f_{IG}(\cdot | c, d)$  jest gęstością odwróconego rozkładu gamma o średniej  $d/(c-1)$  dla  $c > 1$  i wariancji  $d^2/[(c-1)^2(c-2)]$  dla  $c > 2$ , w postaci:

$$f_{IG}(x | c, d) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} x^{-(c+1)} \exp\left(-\frac{d}{x}\right), \quad x > 0, \quad c > 0, \quad d > 0. \quad (7)$$

Warunkowe gęstości rozkładów *a priori* zmiennych ukrytych są iloczynami gęstości rozkładów normalnych:

$$p(\delta | \delta_0, h_{sygnat}^{SV}, h_{sygnat,0}^{SV}, \theta) = \prod_{t=1}^T f_N(\delta_t | \phi_0 + \phi_1 \delta_{t-1}, \omega_t^2), \quad (8)$$

$$p(h_{sygnat}^{SV} | h_{sygnat,0}^{SV}, \theta) = \prod_{t=1}^T f_N(h_{sygnat,t}^{SV} | \rho_{sygnat} h_{sygnat,t-1}^{SV}, \gamma_{sygnat}^2). \quad (9)$$

Poniżej przedstawiono układ warunkowych rozkładów *a posteriori* stosowanych w schemacie Gibbsa. Parametry  $\sigma^2$ ,  $\omega^2$  i  $\gamma_{\text{sygnal}}^2$  mają następujące warunkowe rozkłady *a posteriori*:

$$p(\sigma^2|y, y_0, \delta) = f_{IG}\left(\sigma^2 \mid \frac{T+2c_\sigma}{2}, \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - e^{\delta_t} y_{t-1})^2 + 2d_\sigma}{2}\right), \quad (10)$$

$$p(\omega^2|y, \delta, \delta_0, h_{\text{sygnal}}^{SV}, \phi_0, \phi_1) = f_{IG}\left(\omega^2 \mid \frac{T+2c_\omega}{2}, \sum_{t=1}^T \frac{(\delta_t - \phi_0 - \phi_1 \delta_{t-1})^2}{2 \exp(h_{\text{sygnal}}^{SV})} + d_\omega\right), \quad (11)$$

$$p(\gamma_{\text{sygnal}}^2|y, h_{\text{sygnal}}^{SV}, h_{\text{sygnal},0}^{SV}, \rho_{\text{sygnal}}) = f_{IG}\left(\gamma_{\text{sygnal}}^2 \mid \frac{T+2c_\gamma}{2}, \frac{\sum_{t=1}^T (h_{\text{sygnal},t}^{SV} - \rho_{\text{sygnal}} h_{\text{sygnal},t-1}^{SV})^2 + 2d_\gamma}{2}\right). \quad (12)$$

Wyraz wolny  $\phi_0$  ma warunkowy rozkład normalny, którego gęstość można przedstawić następująco:

$$p(\phi_0|y, \delta, \delta_0, h_{\text{sygnal}}^{SV}, \phi_1, \omega^2) = f_N(g_{\phi_0}, \text{Var}_{\phi_0}) \quad (13)$$

o średniej i wariancji równej odpowiednio:

$$g_{\phi_0} = \frac{\sigma_{\phi_0}^2 \sum_{t=1}^T \frac{(\delta_t - \phi_1 \delta_{t-1})}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV})}}{\sigma_{\phi_0}^2 \sum_{t=1}^T \frac{1}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV})} + \omega^2} \quad \text{i} \quad \text{Var}_{\phi_0} = \frac{\omega^2 \sigma_{\phi_0}^2}{\sigma_{\phi_0}^2 \sum_{t=1}^T \frac{1}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV})} + \omega^2}.$$

Również współczynnik autoregresji ma warunkowy rozkład *a posteriori*, którego gęstość jest proporcjonalna do gęstości rozkładu normalnego:

$$p(\phi_1|y, \delta, \delta_0, \phi_0, \omega^2, h_{\text{sygnal}}^{SV}) \propto f_N(\phi_1 | g_{\phi_1}, \text{Var}_{\phi_1}) \quad (14)$$

o średniej i wariancji równej odpowiednio:

$$g_{\phi_1} = \frac{\sigma_{\phi_1}^2 \sum_{t=1}^T \frac{\delta_{t-1}(\delta_t - \phi_0)}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV})} + \mu_{\phi_1} \omega^2}{\sigma_{\phi_1}^2 \sum_{t=1}^T \frac{\delta_{t-1}^2}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV})} + \omega^2} \quad \text{i} \quad \text{Var}_{\phi_1} = \frac{\omega^2 \sigma_{\phi_1}^2}{\sigma_{\phi_1}^2 \sum_{t=1}^T \frac{\delta_{t-1}^2}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV})} + \omega^2}.$$

Gęstość warunkowego rozkładu *a posteriori* dla współczynnika autokorelacji  $\rho_{\text{sygnal}}$  można wyrazić jako:

$$p(\rho_{\text{sygnal}}|y, h_{\text{sygnal}}^{SV}, h_{\text{sygnal},0}^{SV}, \gamma_{\text{sygnal}}^2) \propto f_N(g_\rho, \text{Var}_\rho) \quad (15)$$

o średniej i wariancji równej odpowiednio:

$$g_\rho = \frac{\sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{\text{sygnal},t-1}^{SV} h_{\text{sygnal},t}^{SV} + \mu_\rho \gamma_{\text{sygnal}}^2}{\sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{\text{sygnal},t-1}^{2,SV} + \gamma_{\text{sygnal}}^2} \quad \text{i} \quad \text{Var}_\rho = \frac{\sigma_\rho^2 \gamma_{\text{sygnal}}^2}{\sigma_\rho^2 \sum_{t=1}^T h_{\text{sygnal},t-1}^{2,SV} + \gamma_{\text{sygnal}}^2}.$$

Warunkowy rozkład *a posteriori* nieobserwowalnej zmiennej  $\delta_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) nie należy do znanej rodziny rozkładów, a jego gęstość wyraża się wzorem:

$$p(\delta_t | y, \delta_{t-1}, \delta_0, h_{\text{sygnal},t}^{SV}, \theta) \propto \exp \left\{ -\frac{y_t^2}{2\sigma^2} \left( e^{\delta_t} - \frac{y_t}{y_{t-1}} \right)^2 - \frac{\vartheta(\delta_t)}{2\omega_t^2} \left( \delta_t - \frac{\tau(\delta_t)}{\vartheta(\delta_t)} \right)^2 \right\}. \quad (16)$$

Wartości  $\vartheta(\delta_t)$  i  $\tau(\delta_t)$  przedstawia tablica 1.

Tablica 1.

Wartości  $\vartheta(\delta_t)$  i  $\tau(\delta_t)$

$t$	$\vartheta(\delta_t)$	$\tau(\delta_t)$
$t = 1, \dots, T-1$	$1 + \phi_1^2$	$\phi_1(\delta_{t-1} + \delta_{t+1}) + \phi_0(1 - \phi_1)$
$t = T$	1	$\phi_1 \delta_{t-1} + \phi_0$

Źródło: Jones i Marriott [8]

Z kolei gęstość warunkowego rozkładu *a posteriori* zmiennych ukrytych  $h_{\text{sygnal},t}^{SV}$  ( $t = 1, \dots, T$ ) ma następującą postać:

$$p(h_{\text{sygnal},t}^{SV} | y, \delta_0, \delta_t, \delta_{t-1}, h_{\text{sygnal},0}^{SV}, h_{\text{sygnal},t-1}^{SV}, h_{\text{sygnal},t+1}^{SV}, \theta) \propto \frac{1}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV}/2)} \exp \left\{ -\frac{(\delta_t - \phi_0 - \phi_1 \delta_{t-1})^2}{2\omega_t^2} \right\} \frac{1}{\exp(h_{\text{sygnal},t}^{SV})} \exp \left\{ -\frac{1}{2\text{Var}_\gamma} (h_{\text{sygnal},t}^{SV} - s_t)^2 \right\}, \quad (17)$$

gdzie  $s_t$  i  $\text{Var}_\gamma$  wyrażają się wzorami:

$$s_t = \rho_{\text{sygnal}} (h_{\text{sygnal},t+1}^{SV} + h_{\text{sygnal},t-1}^{SV}) / (1 + \rho_{\text{sygnal}}^2), \quad \text{Var}_\gamma = \frac{\gamma_{\text{sygnal}}^2}{1 + \rho_{\text{sygnal}}^2}, \quad \text{dla } t = 1, \dots, T-1 \quad (18)$$

oraz:

$$s_t = \rho_{\text{sygnal}} h_{\text{sygnal},t-1}^{SV}, \quad \text{Var}_\gamma = \gamma_{\text{sygnal}}^2, \quad \text{dla } t = T, \text{ por. [18]}. \quad (19)$$

### 3. MODEL STUR W WERSJI LEYBOURNE'A

Kolejną specyfikację STUR zaproponowali Leybourne, McCabe i Mills [10] (zob. również [11] i [19]). Omawiany tu model STUR jest szczególnym przypadkiem modelu autoregresyjnego z losowymi współczynnikami autoregresji (ang. *Random Coefficient*

*Autoregressive; RCA*), który przedstawiono i omówiono w [13], [20] oraz w [6]. W literaturze polskiej, w podejściu klasycznym (teorio-próbkowym), estymację modeli RCA przedstawia Górka [7].

Najprostszy model STUR w wersji Leybourne'a definiowany jest następująco:

$$y_t = \delta_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad (20)$$

$$\delta_t = 1 + \eta_t, \quad \eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \omega^2). \quad (21)$$

Również w tym przypadku składniki losowe  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  są względem siebie niezależne tj.  $\varepsilon_t \perp \eta_s$  dla  $t, s = 1, \dots, T$ .

Dla  $\omega^2 = 0$  proces (20)-(21) redukuje się do procesu błędzenia losowego. Natomiast jeżeli  $\omega^2 > 0$  to mamy do czynienia z procesem STUR, którego średnia zawiera pierwiastek jednostkowy. Proces (20)-(21), podobnie jak proces STUR w wersji Granger'a i Swansona, nie jest stacjonarny kowariancyjnie.

Rozważmy uogólnienie modelu STUR w wersji Leybourne'a tzn. takie, w którym składniki losowe są procesami zmienności stochastycznej:

$$\Delta y_t = \eta_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (22)$$

gdzie:

$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ ,  $\sigma_t^2 = \sigma^2 \exp(h_{szum,t}^{SV})$ ,  $h_{szum,t}^{SV} = \rho_{szum} h_{szum,t-1}^{SV} + \zeta_{szum,t}$  oraz  $\rho_{szum} \in (-1, 1)$ , a także  $\zeta_{szum,t} \sim N(0, \gamma_{szum}^2)$ ,  $t = 1, \dots, T$ .

Zmienny parametr  $\eta_t$  można opisać jako:

$$\eta_t = \phi_1 \eta_{t-1} + \xi_t, \quad \eta_0 = 0, \quad \xi_t \sim N(0, \omega_t^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad (23)$$

gdzie:

$\phi_1 \in (-1, 1)$ ,  $\omega_t^2 = \omega^2 \exp(h_{sygnat,t}^{SV})$ ,  $h_{sygnat,t}^{SV} = \rho_{sygnat} h_{sygnat,t-1}^{SV} + \zeta_{sygnat,t}$  oraz  $\rho_{sygnat} \in (-1, 1)$ , a także  $\zeta_{sygnat,t} \sim N(0, \gamma_{sygnat}^2)$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  oraz  $\varepsilon_t \perp \eta_s$  dla  $t, s = 1, \dots, T$ .

Zmienny parametr  $\eta_t$  podlega tu stacjonarnemu procesowi autoregresyjnemu ze składnikiem losowym o strukturze SV. Model (22)-(23) oznaczono symbolem STUR-L-SV.

Podobnie jak we wcześniejszym przykładzie, jako gęstość rozkładu *a priori* wektora parametrów  $\theta = (\sigma^2, \rho_{szum}, \gamma_{szum}^2, \phi_1, \omega^2, \rho_{sygnat}, \gamma_{sygnat}^2)'$  można przyjąć iloczyn gęstości jego składowych:

$$p(\theta) = p(\sigma^2) p(\rho_{szum}) p(\gamma_{szum}^2) p(\phi_1) p(\omega^2) p(\rho_{sygnat}) p(\gamma_{sygnat}^2), \quad (24)$$

gdzie:

$$p(\sigma^2) = f_{IG}(\sigma^2 | c_\sigma, d_\sigma), \quad p(\rho_{szum}) \propto f_N(\rho_{szum} | \mu_\rho, \sigma_\rho^2) I_{(-1,1)}(\rho_{szum}),$$

$$\begin{aligned}
p(\gamma_{szum}^2) &= f_{IG}(\gamma_{szum}^2 | c_\gamma, d_\gamma), \quad p(\phi_1) \propto f_N(\phi_1 | \mu_{\phi_1}, \sigma_{\phi_1}^2) I_{(-1,1)}(\phi_1), \\
p(\omega^2) &= f_{IG}(\omega^2 | c_\omega, d_\omega), \quad p(\rho_{sygnat}) \propto f_N(\rho_{sygnat} | \mu_\rho, \sigma_\rho^2) I_{(-1,1)}(\rho_{sygnat}), \\
p(\gamma_{sygnat}^2) &= f_{IG}(\gamma_{sygnat}^2 | c_\gamma, d_\gamma).
\end{aligned}$$

Wariancje  $\sigma^2$ ,  $\omega^2$  i  $\gamma_{szum}^2$  mają następujące warunkowe gęstości:

$$p(\sigma^2 | y, y_0, \eta, h_{szum}^{SV}) = f_{IG}\left(\sigma^2 \mid \frac{T + 2c_\sigma}{2}, \sum_{t=1}^T \frac{(\Delta y_t - \eta_t y_{t-1})^2}{2 \exp(h_{szum,t}^{SV})} + d_\sigma\right), \quad (25)$$

$$p(\omega^2 | y, \eta, \eta_0, \phi_1, h_{sygnat}^{SV}) = f_{IG}\left(\omega^2 \mid \frac{T + 2c_\omega}{2}, \sum_{t=1}^T \frac{(\eta_t - \phi_1 \eta_{t-1})^2}{2 \exp(h_{sygnat,t}^{SV})} + d_\omega\right), \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
p(\gamma_{szum}^2 | y, h_{szum}^{SV}, h_{szum,0}^{SV}, \rho_{szum}) &= \\
f_{IG}\left(\gamma_{szum}^2 \mid \frac{T + 2c_\gamma}{2}, \frac{\sum_{t=1}^T (h_{szum,t}^{SV} - \rho_{szum} h_{szum,t-1}^{SV})^2 + 2d_\gamma}{2}\right), & \quad (27)
\end{aligned}$$

gdzie  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_T)'$ .

Warunkowy rozkład *a posteriori* dla współczynnika autoregresji w równaniu stanu  $\phi_1$  ma gęstość:

$$p(\phi_1 | y, \eta, \eta_0, \omega^2, h_{sygnat}^{SV}, h_{sygnat,0}^{SV}) \propto f_N(\phi_1 | g_{\phi_1}, Var_{\phi_1}), \quad (28)$$

o średniej i wariancji równej odpowiednio:

$$g_{\phi_1} = \frac{\sigma_{\phi_1}^2 \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t-1} \eta_t}{\exp(h_{sygnat,t}^{SV})} + \mu_{\phi_1} \omega^2}{\sigma_{\phi_1}^2 \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t-1}^2}{\exp(h_{sygnat,t}^{SV})} + \omega^2} \quad \text{i} \quad Var_{\phi_1} = \frac{\omega^2 \sigma_{\phi_1}^2}{\sigma_{\phi_1}^2 \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t-1}^2}{\exp(h_{sygnat,t}^{SV})} + \omega^2}.$$

Parametry  $\gamma_{szum}^2$ ,  $\rho_{szum}$ ,  $\gamma_{sygnat}^2$ ,  $\rho_{sygnat}$  mają warunkową gęstość *a posteriori* identyczną jak w równaniach (12) i (15), natomiast gęstości warunkowych rozkładów *a posteriori* zmiennych ukrytych  $h_{sygnat,t}^{SV}$  i  $h_{szum,t}^{SV}$  ( $t = 1, \dots, T$ ) mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
p(h_{sygnat,t}^{SV} | y, \eta_t, \eta_{t-1}, \eta_0, h_{sygnat,t-1}^{SV}, h_{sygnat,t+1}^{SV}, h_{sygnat,0}^{SV}, \theta) &\propto \\
\frac{1}{\exp(h_{sygnat,t}^{SV}/2)} \exp\left\{-\frac{(\eta_t - \phi_1 \eta_{t-1})^2}{2\omega_t^2}\right\} &\frac{1}{\exp(h_{sygnat,t}^{SV})} \exp\left\{-\frac{1}{2Var_\gamma} (h_{sygnat,t}^{SV} - s_t)^2\right\}, & \quad (29)
\end{aligned}$$



gdzie  $s_t$  i  $Var_\gamma$  mają identyczną postać jak w równaniach (18) i (19), natomiast warunkowy rozkład dla  $h_{szum,t}^{SV}$  ma gęstość wyrażoną następującym wzorem:

$$p\left(h_{szum,t}^{SV} | y, y_0, \eta_t, h_{szum,t-1}^{SV}, h_{szum,t+1}^{SV}, h_{szum,0}^{SV}, \theta\right) \propto \frac{1}{\exp\left(h_{szum,t}^{SV}/2\right)} \exp\left\{-\frac{(\Delta y_t - \eta_t y_{t-1})^2}{2\sigma_t^2}\right\} \frac{1}{\exp\left(h_{szum,t}^{SV}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2Var_\gamma} \left(h_{szum,t}^{SV} - s_t\right)^2\right\}, \quad (30)$$

gdzie  $s_t$  i  $Var_\gamma$  można przedstawić jako:

$$s_t = \rho_{szum} \left(h_{szum,t+1}^{SV} + h_{szum,t-1}^{SV}\right) / \left(1 + \rho_{szum}^2\right), \quad Var_\gamma = \frac{\gamma_{szum}^2}{1 + \rho_{szum}^2}, \quad \text{dla } t = 1, \dots, T-1$$

$$\text{oraz } s_T = \rho_{szum} h_{szum,t-1}^{SV}, \quad Var_\gamma = \gamma_{szum}^2, \quad \text{dla } t = T.$$

Ze względu na możliwość przedstawienie modelu (22)-(23) za pomocą reprezentacji przestrzeni stanów, charakterystyki *a posteriori* nieobserwowalnej zmiennej  $\eta_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) można obliczyć za pomocą filtru Kalmana lub losując z następującego warunkowego rozkładu *a posteriori*:

$$p\left(\eta_t | \Delta y_t, y_{t-1}, \eta_{t-1}, \eta_{t+1}, h_{sygnat}^{SV}, \theta\right) = f_N\left(\eta_t | g_\eta, Var_\eta\right), \quad \text{dla } t = 1, \dots, T-1, \quad (31)$$

gdzie:

$$g_\eta = \frac{\omega_t^2 y_{t-1} \Delta y_t + \phi_1 \sigma_t^2 (\eta_{t-1} + \eta_{t+1})}{\sigma_t^2 (1 + \phi_1^2) + \omega_t^2 y_{t-1}^2} \quad \text{i} \quad Var_\eta = \frac{\omega_t^2 \sigma_t^2}{\sigma_t^2 (1 + \phi_1^2) + \omega_t^2 y_{t-1}^2}.$$

Dla ostatniej obserwacji  $t = T$  mamy:

$$p\left(\eta_t | \Delta y_t, y_{t-1}, \eta_{t-1}, h_{sygnat}^{SV}, \theta\right) = f_N\left(\eta_t | g_\eta, Var_\eta\right), \quad (32)$$

gdzie:

$$g_\eta = \frac{\omega_t^2 y_{t-1} \Delta y_t + \phi_1 \sigma_t^2 \eta_{t-1}}{\sigma_t^2 + \omega_t^2 y_{t-1}^2} \quad \text{i} \quad Var_\eta = \frac{\omega_t^2 \sigma_t^2}{\sigma_t^2 + \omega_t^2 y_{t-1}^2}.$$

Estymację warunkowej wariancji w modelach stochastycznej zmienności, w literaturze polskiej przedstawia Pajor [18]. Filtr Kalmana w podejściu bayesowskim omawia Koop [9].

#### 4. MODELE DWULINIOWE ZAWIERAJĄCE STOCHASTYCZNY PIERWIASTEK JEDNOSTKOWY

Modele dwuliniowe po raz pierwszy zostały zaproponowane przez Grangera i Andersena [4]. W literaturze polskiej ich własności omówione są m.in. w [1] i [2]. W niniejszej części artykułu omówiono model dwuliniowy zawierający stochastyczny pierwiastek jednostkowy zaproponowany przez Francq, Makarovą i Zakoïana [3]. Model ten oznaczony symbolem ECM( $p$ )-BL( $q$ ) nawiązuje bezpośrednio do znanych wcześniej modeli dwuliniowych ma jednak nieco inną specyfikację i własności:

$$\Delta y_t = \psi_1 y_{t-1} + \varphi_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \varphi_p \Delta y_{t-p} + v_t, \quad (33)$$

$$v_t = (1 + \lambda_1 v_{t-1} + \dots + \lambda_q v_{t-q}) \eta_t, \quad \eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T. \quad (34)$$

Warunek konieczny i dostateczny, aby proces (33)-(34) był stacjonarny kowariancyjnie ma postać:

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i^2 \sigma^2 < 1. \quad (35)$$

Wiadomo, że procesy dwuliniowe można zakwalifikować jako aproksymację liniowych modeli o losowych parametrach, co z kolei oznacza, że są one pewną formą pośrednią między procesami ARMA ze stałymi i losowymi parametrami (por. [1]). W tym przypadku model dwuliniowy (33)-(34) bezpośrednio nawiązuje do modeli, w których parametry strukturalne są losowe. Łatwo można wykazać, że dla  $p = 0$  i  $q = 1$  oraz po przeprowadzeniu elementarnych przekształceń, można go zapisać jako model zawierający stochastyczny pierwiastek jednostkowy:

$$\Delta y_t = \delta_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (36)$$

gdzie losowy parametr jest wyrażony jako:

$$\delta_t = 1 + \psi + \lambda_1 \eta_t, \quad (37)$$

a  $\varepsilon_t$  jest składnikiem losowym nieskorelowanym z  $y_{t-i}$  dla  $i > 0$ , o postaci:

$$\varepsilon_t = (1 - \lambda_1 (1 + \psi) y_{t-2}) \eta_t. \quad (38)$$

Niech  $\Psi_{t-1}$  oznacza zbiór wszystkich informacji o procesie dostępnych do chwili  $t-1$  włącznie. Dla  $p = 0$  i  $q = 1$  warunkowa średnia  $\mu_t = E(\Delta y_t | \Psi_{t-1})$  i warunkowa wariancja  $h_t = Var(\Delta y_t | \Psi_{t-1})$  w modelu (36)-(38) mają postać:  $\mu_t = \psi y_{t-1}$  i  $h_t = (1 + \lambda_1 v_{t-1})^2 \sigma^2$ .

Założmy, że składniki losowe  $\varepsilon_t$  w modelu BL(1) mają rozkład normalny. W tym przypadku gęstość wektora obserwacji jest następująca:

$$p(\Delta y | v, \theta, y_0) = \prod_{t=1}^T f_N(\Delta y_t | \psi y_{t-1}, (1 + \lambda_1 v_{t-1})^2 \sigma^2), \quad (39)$$

gdzie  $\Delta y = (\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_T)'$ ,  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{T-1})'$  oraz  $\theta = (\psi, \lambda_1, \sigma^2)'$ , a także  $\psi \in R$ ,  $\lambda_1 \in R$  i  $\sigma^2 \in R_+$ . Dodatkowo przestrzeń parametrów jest ucięta przez warunek  $\lambda_1^2 \sigma^2 < 1$ .

Jako rozkłady *a priori* dla parametrów  $\psi$  i  $\lambda_1$  przyjęto rozkłady normalne, natomiast dla wariancji  $\sigma^2$  - odwrócony rozkład gamma.

Układ pełnych, warunkowych rozkładów *a posteriori* dla parametrów w modelu BL(1) ma postać:

$$p(\psi | y, \lambda_1, \sigma^2) \propto f_N(g_\psi, Var_\psi), \quad (40)$$

gdzie:

$$g_\psi = \frac{\sigma_\psi^2 \sum_{t=1}^T \frac{\Delta y_t y_{t-1}}{(1+\lambda_1 v_{t-1})^2} + \sigma^2 \mu_\psi}{\sigma_\psi^2 \sum_{t=1}^T \frac{y_{t-1}^2}{(1+\lambda_1 v_{t-1})^2} + \sigma^2} \quad \text{i} \quad \text{Var}_\psi = \frac{\sigma^2 \sigma_\psi^2}{\sigma_\psi^2 \sum_{t=1}^T \frac{y_{t-1}^2}{(1+\lambda_1 v_{t-1})^2} + \sigma^2},$$

$$p(\sigma^2 | y, \lambda_1, \sigma^2, v, y_0) = f_{IG} \left( \sigma^2 \mid \frac{T + 2c_\sigma}{2}, \sum_{t=1}^T \frac{(\Delta y_t - \psi y_{t-1})^2}{2(1 + \lambda_1 v_{t-1})^2} + d_\sigma \right), \quad (41)$$

$$p(\lambda_1 | y, \psi, \sigma^2) \propto \prod_{t=1}^T f_N(\Delta y_t | \psi y_{t-1}, (1 + \lambda_1 v_{t-1})^2 \sigma^2) \times f_N(\lambda_1 | \mu_\lambda, \sigma_\lambda^2). \quad (42)$$

Dla  $\psi$  i  $\sigma^2$  warunkowe gęstości *a posteriori* należą do standardowej rodziny rozkładów. Z kolei losowania z warunkowego rozkładu *a posteriori* dla parametru  $\lambda_1$  wymagają stosowania dodatkowej metody, wewnątrz procedury Gibbsa.

##### 5. ESTYMACJA I TESTOWANIE MODELI STUR DLA WYBRANYCH KURSÓW WALUTOWYCH

W niniejszej części artykułu przedstawiono wyniki estymacji wybranych specyfikacji STUR, uzyskane na podstawie analizy dziennych kursów walutowych. Są to: model STUR w wersji Grangera i Swansona (równania (1)-(2) i (4)) – STUR-G-SV –  $M_1$ , model STUR w wersji Leybourne'a (równania (22)-(23)) – STUR-L-SV- $M_2$  oraz model dwuliniowy (równania (36)-(38))-BL(1)- $M_3$ . Dodatkowo, w celach porównawczych obliczono charakterystyki *a posteriori* dwóch standardowych modeli zmienności. Są to: model zmienności stochastycznej ( $M_4$ ):

$$\Delta y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad (43)$$

gdzie:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \sigma^2 \exp(h_{szum,t}^{SV}), \quad h_{szum,t}^{SV} = \rho_{szum} h_{szum,t-1}^{SV} + \zeta_t, \quad \rho_{szum} \in (-1, 1), \quad \text{a także } \zeta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \gamma_{szum}^2), \quad \varepsilon_t \perp \zeta_s \text{ dla } t, s = 1, 2, \dots, T$$

oraz najprostszy model GARCH (symbol  $M_5$ ):

$$\Delta y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (44)$$

$$h_t = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 h_{t-1}, \quad (45)$$

gdzie:  $a_0 > 0$ ,  $a_1 \geq 0$ ,  $b_1 \geq 0$  oraz  $a_1 + b_1 < 1$ .

Badane szeregi składają się z 1013 obserwacji i obejmują okres od 2 stycznia 2006 do 31 grudnia 2009 roku. Analiza dotyczy następujących walut europejskich wyrażonych w złotych: franka szwajcarskiego (CHF), euro (EUR) i funta szterlinga

(GBP). Przed przystąpieniem do badań oryginalne szeregi czasowe poddano transformacji zgodnie z następującym wzorem  $y_t = 100 \ln(P_t)$ , gdzie  $P_t$  oznacza cenę zamknięcia.

Moc wyjaśniającą poszczególnych specyfikacji obliczono metodą Newtona i Raftery'ego [12].

Dla wszystkich wariacji jako rozkład *a priori* przyjęto odwrócony rozkład gamma z parametrami  $c = 0,01$  i  $d = 0,01$ . Rozkład *a priori* współczynnika autoregresji jest uciętym rozkładem normalnym o średniej zero i odchyleniu standardowym równym jeden. Również stała  $\phi_0$  ma rozkład *a priori* będący rozkładem normalnym o średniej równej zero i wariancji równej jeden.

Dla początkowych stanów, tj.  $\delta_0$  i  $\eta_0$  przyjęto wartość równą zero. Podobnie wartości początkowe w modelu SV ( $h_{szum, (sygnał), 0}^{SV}$ ) są również traktowane jako ustalone i równe zero.

Tablica 2 przedstawia logarytmy dziesiętne czynników Bayesa obliczone pomiędzy wybranymi modelami STUR i GARCH a modelem SV. Uzyskane wyniki pokazują, że dla wszystkich szeregów czasowych model STUR w wersji Grangera i Swansona (STUR-GR-SV) uzyskał zdecydowanie największe szanse *a posteriori*. Przy założeniu jednakowych prawdopodobieństw *a priori*, model STUR-G-SV uzyskał prawdopodobieństwo *a posteriori* od 154 do 199 rzędów wielkości większe niż standardowy model SV i od 11 do 65 rzędów wielkości większe niż drugi w rankingu model STUR-L-SV. Różnice w logarytmach czynników Bayesa obliczone między modelami STUR (STUR-G-SV oraz STUR-L-SV) a modelem stochastycznej zmienności są zatem bardzo duże. Przeprowadzone badania empiryczne wyraźnie więc potwierdziły istnienie stochastycznego pierwiastka jednostkowego dla dziennych kursów walutowych.

Tablica 2.  
Logarytmy dziesiętne czynników Bayesa obliczone między poszczególnymi modelami i modelem stochastycznej zmienności (SV,  $M_4$ )

	Model			
	$M_1$ STUR-GR-SV	$M_2$ STUR-L-SV	$M_3$ BL	$M_5$ GARCH
	CHF			
$\log_{10}(B_{M_i, M_4})$	154,0050	97,8153	-175,7827	-16,1337
	EUR			
$\log_{10}(B_{M_i, M_4})$	159,0340	147,3740	-191,2360	-14,1240
	GBP			
$\log_{10}(B_{M_i, M_4})$	199,3030	134,2846	-143,0070	-11,4630

Źródło: obliczenia własne

Model dwuliniowy we wszystkich przypadkach ma najniższą moc wyjaśniającą, skutkiem czego zajmuje piąte, ostatnie miejsce w rankingach. Model stochastycznej

zmienności zajął trzecie miejsce w rankingach, za modelami STUR i przed modelem GARCH, który miał przedostatnie miejsce w rankingach. Większa moc wyjaśniająca modeli SV w stosunku do modeli GARCH jest typowa dla tych specyfikacji (zob. [14])

T a b l i c a 3.

Informacje *a posteriori* o parametrach w modelu stochastycznej zmienności uzyskane na podstawie analizy kursu walutowego w okresie od 2.01.2006 do 31.12.2009

Waluta	Parametr		
	$\sigma^2$	$\rho_{szum}$	$\gamma_{szum}^2$
CHF	0,39380 (0,10890)	0,99220 (0,00426)	0,01810 (0,00616)
EUR	0,32950 (0,09440)	0,99350 (0,00349)	0,01574 (0,00521)
GBP	0,47670 (0,12920)	0,99350 (0,00367)	0,01314 (0,00496)

W pierwszej linii umieszczono wartość oczekiwaną rozkładu *a posteriori*, natomiast w drugiej linii w nawiasach okrągłych podano odchylenie standardowe Źródło: obliczenia własne

W tabelicy 3 zamieszczono punktowe oceny *a posteriori* parametrów w standardowym modelu stochastycznej zmienności (równanie 43). Uzyskane wyniki są typowe dla dziennych szeregów finansowych. Wartości oczekiwane *a posteriori* współczynnika autokorelacji  $\rho_{szum}$  są bardzo bliskie wartości jeden, co przy względnie małym rozproszeniu wskazuje na dużą persystencję zmienności kursów walutowych. Podobnie oceny *a posteriori* parametrów w modelu GARCH (równania (44)-(45)) są typowe dla tego typu danych (zob. tablica 4), a suma parametrów  $a_1$  i  $b_1$  ma wartość oczekiwaną *a posteriori* bliską wartości jeden, co również wskazuje na dużą persystencję zmienności badanych szeregów.

T a b l i c a 4.

Informacje *a posteriori* o parametrach w modelu GARCH uzyskane na podstawie analizy kursu walutowego w okresie od 2.01.2006 do 31.12.2009

Waluta	Parametr			
	$a_0$	$a_1$	$b_1$	$a_1 + b_1$
CHF	0,00851 (0,00284)	0,08956 (0,01904)	0,89990 (0,02001)	0,98941 (0,00552)
EUR	0,00452 (0,00123)	0,09202 (0,01581)	0,89743 (0,01564)	0,98945 (0,00546)
GBP	0,00532 (0,00164)	0,07667 (0,01454)	0,91570 (0,01443)	0,99237 (0,00388)

W pierwszej linii umieszczono wartość oczekiwaną rozkładu *a posteriori*, natomiast w drugiej linii w nawiasach okrągłych podano odchylenie standardowe Źródło: obliczenia własne

Kolejna tablica, z numerem 5, zawiera informacje *a posteriori* na temat parametrów w modelu dwuliniowym. Jak wiadomo z części czwartej artykułu, model ten można również interpretować jako model ze stochastycznym pierwiastkiem jednostkowym.

T a b l i c a 5.

Informacje *a posteriori* o parametrach w modelu dwuliniowym uzyskane na podstawie analizy kursu walutowego w okresie od 2.01.2006 do 31.12.2009

Waluta	Parametr		
	$\psi$	$\sigma^2$	$\lambda_1$
CHF	0,00009 (0,00035)	1,01400 (0,04520)	0,01931 (0,01251)
EUR	0,00003 (0,00018)	0,63000 (0,02808)	-0,00336 (0,01433)
GBP	-0,00013 (0,00017)	0,81520 (0,03635)	0,00779 (0,01375)

W pierwszej linii umieszczono wartość oczekiwaną rozkładu *a posteriori*, natomiast w drugiej linii w nawiasach okrągłych podano odchylenie standardowe Źródło: obliczenia własne

Uzyskane wyniki nie potwierdzają jednak przydatności tej specyfikacji dla badanych szeregów czasowych. W żadnym z trzech przypadków parametr  $\lambda_1$ , odpowiedzialny za zmienność warunkowej wariancji, nie jest położony w rejonach odległych od zera. Wartość oczekiwana *a posteriori* jest zbliżona do wartości odchylenia standardowego *a posteriori* lub jest o jeden rząd wielkości mniejsza i w związku z tym rozkład *a posteriori* ma bardzo duże względne rozproszenie. Powyższe wnioski potwierdza uzyskany ranking modeli (por. tablica 2), w którym model BL(1) we wszystkich trzech przypadkach zajął ostatnie miejsce.

T a b l i c a 6.

Informacje *a posteriori* o parametrach modelu STUR-G-SV uzyskane na podstawie analizy kursu walutowego w okresie od 2.01.2006 do 31.12.2009

Parametr	Waluta					
	$\omega^2$	$\sigma^2$	$\phi_0$	$\phi_1$	$\rho_{sygnal}$	$\gamma_{sygnal}^2$
CHF	0,00231 (0,00101)	0,22800 (0,02279)	0,00012 (0,00037)	-0,06131 (0,03451)	0,99740 (0,00132)	0,14150 (0,04520)
EUR	0,00220 (0,00108)	0,12400 (0,01082)	0,00005 (0,00023)	-0,04054 (0,04071)	0,99780 (0,00097)	0,14080 (0,04369)
GBP	0,00175 (0,00062)	0,14710 (0,02217)	-0,00014 (0,00023)	-0,06760 (0,04134)	0,99760 (0,00109)	0,09777 (0,02955)

W pierwszej linii umieszczono wartość oczekiwaną rozkładu *a posteriori*, natomiast w drugiej linii w nawiasach okrągłych podano odchylenie standardowe Źródło: obliczenia własne

W tablicy 6 zamieszczono wyniki estymacji parametrów w modelu STUR w wersji Grangera i Swansona (model STUR-G-SV). W pierwszej linii znajdują się wartości oczekiwane rozkładów *a posteriori*, a w nawiasach okrągłych podano wartości odchyleń standardowych. Dla wszystkich szeregów czasowych, współczynnik autokorelacji  $\phi_1$  ma wartość oczekiwaną zlokalizowaną blisko wartości zero, co przy dużym względnym rozproszeniu wskazuje, że zmienny parametr nie wykazuje zależności autoregresyjnej. Zupełnie inaczej przedstawia się rozkład *a posteriori* parametru  $\rho_{sygnal}$ , który odpowiedzialny jest za persystencję zmienności stochastycznego pierwiastka jednostkowego.

Jego wartość oczekiwana *a posteriori* jest bliska wartości jeden, co oznacza, że losowy parametr jest procesem zmienności stochastycznej.

Tablica 7.  
Informacje *a posteriori* o parametrach w modelu STUR-L-SV uzyskane na podstawie analizy dziennych stóp zmian kursu walutowego w okresie od 2.01.2006 do 31.12.2009

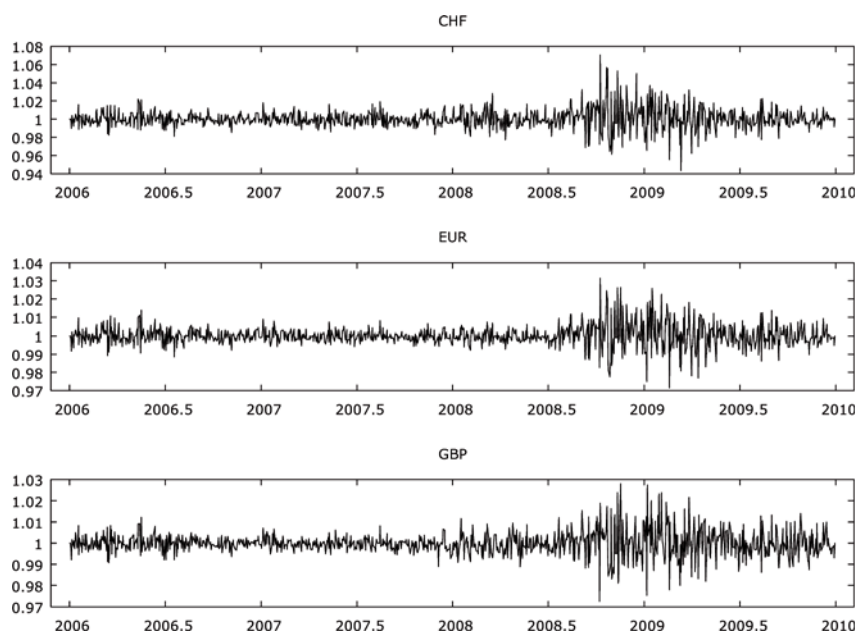
Waluta	Parametr						
	$\omega^2$	$\sigma^2$	$\rho_{szum}$	$\gamma_{szum}^2$	$\phi_1$	$\rho_{sygnal}$	$\gamma_{sygnal}^2$
CHF	0,0020 (0,0010)	0,2047 (0,0416)	0,2311 (0,5388)	0,0674 (0,0861)	-0,0892 (0,0441)	0,9972 (0,0014)	0,1256 (0,0470)
EUR	0,0016 (0,0007)	0,1418 (0,0337)	-0,0327 (0,5144)	0,1119 (0,1335)	-0,0506 (0,0564)	0,9977 (0,0010)	0,0972 (0,0341)
GBP	0,0016 (0,0007)	0,1418 (0,0337)	-0,0327 (0,5144)	0,1119 (0,1335)	-0,0425 (0,0524)	0,9977 (0,0010)	0,0972 (0,0341)

W pierwszej linii umieszczono wartość oczekiwaną rozkładu *a posteriori*, natomiast w drugiej linii w nawiasach okrągłych podano odchylenie standardowe. Źródło: obliczenia własne

W tablicy 7 przedstawiono informacje *a posteriori* dotyczące ocen parametrów w modelu STUR-L-SV. Dla wszystkich szeregów czasowych wartość oczekiwana *a posteriori* współczynnika autoregresji  $\rho_{sygnal}$  jest bliska wartości jeden, co potwierdza zasadność traktowania  $\{\eta_t, t = 1, \dots, T\}$  jako procesu zmienności stochastycznej. Możemy zaobserwować istotny współczynnik autokorelacji w strukturze SV dla zmiennego parametru, ale już nie dla składnika losowego w równaniu obserwacji. Wydaje się zatem, że tylko jeden z nich jest procesem o strukturze SV. Oznacza to, że tylko stochastyczny pierwiastek jednostkowy ma zmienną w czasie warunkową wariancję. Drugi składnik losowy ma wariancję, która jest homoskedastyczna. Powyższe wnioski potwierdza również czynnik Bayesa obliczony pomiędzy modelami STUR-L-SV i SV. Okazuje się bowiem, że bardziej prawdopodobny jest model, w którym losowa, warunkowa średnia traktowana jest jako proces SV niż model, w którym odchylenia od warunkowej, deterministycznej średniej opisane są jako proces zmienności stochastycznej. Zmienność stochastycznego pierwiastka jednostkowego łatwo zauważyć na rysunku 2, na którym przedstawiono mediany *a posteriori* parametru  $a_t = \exp(\delta_t)$  ( $t = 1, \dots, 1013$ ). Przedstawione realizacje obliczone zostały na podstawie najbardziej prawdopodobnego modelu, czyli modelu STUR w wersji Grangera i Swansona (STUR-G-SV).

Ponieważ rozpiętości przedziałów o najwyższej gęstości *a posteriori* (ang. *Highest Posterior Density intervals; HPD*), we wszystkich przypadkach, były bardzo niewielkie, co potwierdza statystyczną istotność pierwiastka stochastycznego, w celu większej przejrzystości wykresów zrezygnowano z ich prezentacji. Jak widać na rysunku 2 pierwiastek jednostkowy w modelu STUR-G-SV oscyluje wokół wartości jeden i charakteryzuje się wyraźnym, okresowym nasileniem zmienności.

Szczególnie wyraźnie uwidacznia się to w drugiej połowie 2008 i w pierwszym kwartale 2009, kiedy to miało miejsce załamanie się głównych światowych indeksów giełdowych oraz bardzo silne osłabienie złotego.



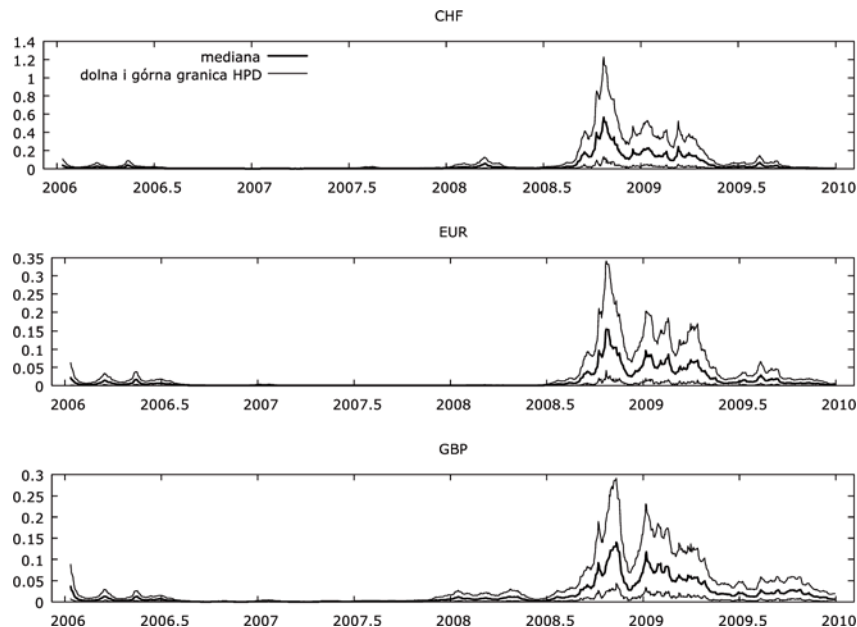
Rysunek 2. Mediany rozkładu *a posteriori* parametru  $a_t = \exp(\delta_t)$  dla  $t = 1, \dots, 1013$  obliczone na podstawie realizacji kursu franka szwajcarskiego (CHF), euro (EUR) i funta szterlinga (GBP) względem złotego Źródło: obliczenia własne

Na rysunku 3 przedstawiono mediany *a posteriori* warunkowej wariancji  $\omega_t^2$  ( $t = 1, \dots, T$ ) wraz z 95% przedziałami o najwyższej gęstości *a posteriori*, obliczone na podstawie modelu STUR w wersji Grangera i Swansona.

Na podstawie wyników zamieszczonych na rysunku 3 łatwo można zauważyć, że od września 2008 nastąpił gwałtowny wzrost zmienności pierwiastka jednostkowego. Okresowe nasilenia zmienności losowego parametru mają swoje uzasadnienie w zaistniałych czynnikach rynkowych, ponieważ zgodnie z informacjami publikowanymi przez NBP, w okresie od września 2008 do maja 2009 roku nastąpiło znaczne osłabienie nominalnego kursu złotego względem innych walut ze względu na czynniki globalne i oczekiwania wskazujące na głębsze niż wcześniej zakładano spowolnienie wzrostu gospodarczego w 2009 roku. Kolejną przyczyną były informacje o pogarszaniu się salda na rachunku obrotów bieżących<sup>2</sup>. Znaczny wzrost niepewności można również zauważyć poprzez zwiększenie się rozpiętości przedziałów *a posteriori*.

<sup>2</sup> Raport o inflacji – luty 2009 r., [www.nbp.pl](http://www.nbp.pl) (14.12.2009).





Rysunek 3. Warunkowa wariancja  $\omega_t^2$  dla  $t = 1, \dots, 1013$  w modelu STUR w wersji Grangera i Swansona, w którym losowy parametr jest procesem o strukturze SV (model STUR-G-SV), obliczona dla realizacji kursu franka szwajcarskiego (CHF), euro (EUR) i funta szterlinga (GBP) względem złotego. Pogrubiona linia przedstawia mediany *a posteriori* warunkowej wariancji, z kolei zwykłe linie oznaczają dolny i górny kraniec 95% przedziałów o najwyższej gęstości *a posteriori* (HPD)

Źródło: obliczenia własne

## 6. ZAKOŃCZENIE

Zasadniczym celem tego artykułu było przedstawienie i analiza empirycznych własności wybranych modeli zawierających stochastyczny pierwiastek jednostkowy. Wprowadzono i omówiono również układy rozkładów *a posteriori*, które są niezbędne w podejściu bayesowskim. Badania empiryczne dotyczyły dziennych obserwacji najważniejszych walut europejskich wyrażonych w złotych w okresie od stycznia 2006 do grudnia 2009 roku.

W artykule dokonano przeglądu wybranych specyfikacji STUR. Są to niektóre już znane od dawna modele takie jak: model Grangera i Swansona [5], tzw. model Leybourne'a [10] oraz model dwuliniowy opracowany niedawno przez Francq, Makarovą i Zakoïana [3]. Przeprowadzone badania empiryczne wyraźnie wykazały, że modele STUR, a zwłaszcza model Grangera i Swansona, uzyskały znacznie większe prawdopodobieństwo *a posteriori* niż standardowe modele zmienności tj. SV i GARCH.

W modelach STUR w wersji Grangera i Swansona oraz Leybourne'a zaproponowano, aby stochastyczny pierwiastek jednostkowy był procesem zmienności stochastycznej. Podejście to wydaje się zasadne, ponieważ badania empiryczne potwierdziły,

że stochastyczny pierwiastek jednostkowy nie ma stałej, lecz zmienną wariancję warunkową, a jego zmienność nasila się wraz z występowaniem czynników rynkowych.

Przeprowadzone badania nie potwierdziły przydatności modeli dwuliniowych dla dziennych kursów walutowych.

*Katedra Ekonometrii i Statystyki  
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

#### LITERATURA

- [1] Bruzda J. (2003), *Procesy dwuliniowe i procesy GARCH w modelowaniu finansowych szeregów czasowych*, Przegląd Statystyczny, 2, 73-95.
- [2] Doman M., Doman R. (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań.
- [3] Francq Ch., Makarova S., Zakořan J.M. (2008), *A class of stochastic unit-root bilinear processes: Mixing properties and unit-root test*, Journal of Econometrics, 142, 312-326.
- [4] Granger W.J.C., Andersen A. P. (1978), *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- [5] Granger C.W.J., Swanson N.R. (1997), *An Introduction to stochastic unit-root process*, Journal of Econometrics, 80, 35-62.
- [6] Granger W.J.C., Teräsvirta T. (1993), *Modeling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press, Oxford.
- [7] Górka J. (2007), *Modele autoregresyjne z losowymi parametrami*, Procesy STUR. Modelowanie i zastosowanie do finansowych szeregów czasowych, red. Osińska, M., Wyd. TNOiK, Toruń, 13-34.
- [8] Jones C.R., Marriott J.M. (1999), *A Bayesian analysis of stochastic unit root models*, Bayesian Statistics, 6, 785-794.
- [9] Koop G. (2003), *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons.
- [10] Leybourne S.J., McCabe B.P.M., Mills T.C. (1996), *Randomized unit root processes for modelling and forecasting financial time series: theory and applications*, Journal of Forecasting, 15, 253-270.
- [11] Leybourne S.J., McCabe B.P.M., Tremayne A.R. (1996), *Can economic time series be differenced to stationarity?* Journal of Business and Economic Statistics, 14, 435-446.
- [12] Newton M.A., Raftery A.E. (1994), *Approximate Bayesian inference by the weighted likelihood bootstrap (with discussion)*, Journal of the Royal Statistical Society, B, 56, 3-48.
- [13] Nicholls D.F., Quinn B.G. (1982), *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, Springer-Verlag, New York.
- [14] Osiewalski J., Pajor A., Pipien M. (2004), *Bayesowskie modelowanie i prognozowanie indeksu WIG z wykorzystaniem procesów GARCH i SV*, XX Seminarium Ekonometryczne im. Profesora Zbigniewa Pawłowskiego, red. Zelas, A., Wyd. AE w Krakowie, Kraków, 17-39.
- [15] Osińska M. (red) (2007), *Procesy STUR. Modelowanie i zastosowanie do finansowych szeregów czasowych*, Wyd. TNOiK, Toruń.
- [16] Osińska M. (2004), *Stochastic unit roots process – properties and application*, 30-rd International Conference MACROMODELS'04, red. Welfe A., Welfe W., Wyd. UŁ w Łodzi, Łódź, 169-179.
- [17] Osińska M., Górka J. (2005), *Identyfikacja nieliniowości w ekonomicznych szeregach czasowych. Analiza symulacyjna, Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń, 35-44.
- [18] Pajor A. (2003), *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków.

- [19] Sollis R., Leybourne S.J., Newbold P. (2000), *Stochastic unit roots modelling of stock price indices*, Applied Financial Economics, 10, 311-315.
- [20] Tsay R.S. (2005), *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, John and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [21] Yoon G. (2006), *A note on some properties of STUR processes*, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 68, 2, 253-260.

## WYBRANE MODELE ZAWIERAJACE STOCHASTYCZNY PIERWIASTEK JEDNOSTKOWY W ANALIZIE KURSÓW WALUTOWYCH

### Streszczenie

W artykule omówiono wybrane specyfikacje i własności modeli zawierających stochastyczny pierwiastek jednostkowy (STUR). Celem artykułu było dokonanie przeglądu różnych modeli STUR, opracowanie metod numerycznych wykorzystywanych w schemacie wnioskowania bayesowskiego w kontekście rozważanych modeli oraz porównanie ich mocy wyjaśniającej. Przykład empiryczny, zawarty w artykule, dotyczył dziennych notowań kursu walut obcych wyrażonych w złotych. Uzyskane wyniki wskazują, że najbardziej prawdopodobny okazał się model STUR w wersji Grangera i Swansona, który uzyskał znaczną przewagę nad standardowym modelem stochastycznej zmienności.

## STOCHASTIC UNIT ROOT MODELS WITH APPLICATION TO DAILY EXCHANGE RATES

### Summary

The paper presents the three different stochastic unit root models (STUR), proposed by Granger and Swanson (1997), by Leybourne, McCabe and Mills (1996) and finally by Francq, Makarova, Zakoïan (2008). The main purpose is to develop an MCMC algorithm for Bayesian estimation. We are also interested how the different specifications of the stochastic unit root affect the explanatory power of a set of competing models. We apply that these computational methods to daily exchange rates of foreign currencies in zlotys, namely Swiss franc, Pound sterling and Euro. The model selection and posterior estimates provide strong evidence in favor of the STUR models.