PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LVIII – ZESZYT 3-4 – 2011

JADWIGA KOSTRZEWSKA

INTERPRETACJA W MODELACXCH TOBITOWYCH

1. WPROWADZENIE

Model tobitowy został wprowadzony w 1958 roku przez Jamesa Tobina (por. [24]) i służy do opisu zmiennej zależnej cenzurowanej. Model ten można traktować jako ciągłe uogólnienie modelu probitowego przez włączenie analizy regresji do opisu obserwowalnej części zmiennej zależnej. W kolejnych latach po pojawieniu się artykułu Jamesa Tobina w literaturze przedmiotu powstało wiele modeli wywodzących się od modelu tobitowego, w tym modele selekcji wprowadzone przez Jamesa Heckmana (por. [6], [7], [8]). W 1984 r. Takeshi Amemiya (por. [1]) dokonał klasyfikacji modeli występujących w literaturze przedmiotu wyodrębniając pięć głównych typów modeli opisujących zmienną zależną cenzurowaną[1]. Kryterium podziału była postać funkcji wiarygodności. T. Amemiya klasyfikowane modele ogólnie nazwał modelami tobitowymi. Model wprowadzony przez Jamesa Tobina określił mianem standardowego modelu tobitowego lub modelu tobitowego typu I. Model selekcji oryginalnie rozważany przez J. Heckmana to model tobitowy typu III.

Standardowy model tobitowy stosowany był przez Jamesa Tobina do opisu wydatków na dobra luksusowe (por. [24]). Modele zmiennej zależnej cenzurowanej, a w szczególności modele selekcji, rozwijały się m.in. w analizie zagadnień związanych z rynkiem pracy – co zawdzięczamy w dużej mierze Jamesowi Heckmanowi[2]. Znane są takie zastosowania modeli zmiennej cenzurowanej jak: badanie (rocznej) liczby godzin pracy zamężnych kobiet z uwzględnieniem samoselekcji do grupy pracujących, analiza wysokości wynagrodzeń z uwzględnieniem samoselekcji do próby pracujących, modele stosowane w ocenie: lokalnych i rządowych programów doskonalenia zawodowego bezrobotnych, programów pomocy w poszukiwaniu pracy i programów zasiłków dla bezrobotnych. Na uwagę zasługują także analizy wynagrodzeń w zależności od przynależności do związku zawodowego czy w zależności od liczby lat edukacji. Modele selekcji stosowane były także do oceny występowania dyskryminacji płacowej.

---

[1] Opis modeli zob. także [5] oraz [17]. W pracy [14] zaprezentowano model tobitowy typu I, w [15] – model tobitowy typu II. Zastosowanie wybranych modeli tobitowych (typu II lub V) zob. [16] oraz [18].

[2] W 2000 r. James Heckman za rozwój teorii i metod analizy zagadnień związanych z selekcją próby otrzymał nagrodę im. Alfreda Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych (wraz z Danielem McFaddenem, który został wyróżniony za rozwój teorii i metod analizy dyskretnego wyboru).

Obecnie modele tobitowe są często wykorzystywane, także w polskiej literaturze przedmiotu. Stosując je trzeba zwrócić uwagę na poprawną interpretację otrzymanych wyników, w szczególności na fakt, że interpretacji podlegają wpływy krańcowe, które w ogólnym przypadku nie są równe poszczególnym parametrom modelu. W literaturze przedmiotu zwracali na to uwagę m.in. W. Greene [3], J.F. McDonald i R.A. Moffitt [22], D.W. Roneck [23]. Ponadto wpływy krańcowe zmiennych binarnych mogą być inne niż zmiennych ciągłych, tzn. przy ich wyznaczaniu należy skorzystać z innych wzorów.

Celem artykułu jest przedstawienie matematycznych podstaw poprawnej interpretacji oraz wnioskowania w oparciu o modele z rodziny tobitowych. Część z zaprezentowanych w artykule wzorów na wpływy krańcowe zmiennych objaśniających w modelach tobitowych jest wyprowadzeniem własnym autorki, przy czym ogólne zasady ich wyznaczania są znane w literaturze od dawna.

2. MODELE TOBITOWE[3]

Modele tobitowe służą do opisu zmiennej zależnej podlegającej cenzurowaniu lub nieprzypadkowej selekcji z cenzurowaniem[4], będącej pewnego rodzaju uogólnieniem cenzurowania (por. np. [20]). Niektóre modele występują także w wersji dla zmiennej uciętej. Poniżej krótko omówiono wybrane modele tobitowe.

Niech Y^* będzie zmienną ukrytą (*latent variable*), tzn. taką zmienną, której wartości zazwyczaj nie są obserwowalne lub są obserwowalne w zależności od pewnych warunków (kryterium obserwowalności). Symbolem Y oznaczono zmienną uciętą, cenzurowaną lub podlegającą nieprzypadkowej selekcji, która przyjmuje wartości takie, jak zmienna Y^*, o ile są one obserwowane, tzn. o ile spełnione są określone warunki. W przeciwnym wypadku zmiennej Y zostaje nadana pewna umowna wartość progowa (a lub c) lub jej wartości nie są obserwowalne (albo umyślnie ignorowane). Przez n oznaczono liczbę elementów w próbie, przy czym dla wygody zapisu przyjęto, że pierwszych n_1 elementów ($i = 1, \ldots, n_1$) w próbie odnosi się do dokładnie zaobserwowanych wartości, natomiast następne $(n - n_1)$ elementów ($i = (n_1 + 1), \ldots, n$) – do przypisanych wartości umownych (o ile istnieją).

Niech ponadto Z^* oznacza zmienną, od której zależy obserwowalność zmiennej Y^* (Y). Zmienna Z^* nie musi być bezpośrednio obserwowalna. Przyjmuje się, że zmienna utworzona na bazie zmiennej ukrytej Z^* może być zmienną dychotomiczną, uciętą, cenzurowaną lub zmienną nie będącą zmienną ograniczoną (jej wartości są zwyczajnie dostępne). Przyjmuje się oznaczenie I dla zmiennej binarnej, w przeciwnym wypadku

[3] Przy opisie modeli tobitowych w tym oraz następnym punkcie artykułu korzystano z prac [14], [15], [16], [17], [18].

[4] Szerzej definicje zmiennej uciętej, cenzurowanej oraz podlegającej nieprzypadkowej selekcji omówiono np. w pracach [16], [17].

stosuje się oznaczenie Z:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } z_i^* > a \\ 0 & \text{gdy } z_i^* \leqslant a \end{cases} \quad \text{lub } z_i = \begin{cases} z_i^* & \text{gdy } z_i^* > a \\ a \textit{ lub } \text{brak} & \text{gdy } z_i^* \leqslant a \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie a – wartość progowa dla zmiennej Z^*.

Model tobitowy typu I (krócej: model tobitowy[5]) służy do opisu zmiennej zależnej cenzurowanej. Po ewentualnym przenumerowaniu obserwacji można go zapisać w postaci (por. np. [1], [4], [21], a także [5], [17]):

$$y_i = \begin{cases} y_i^* & \text{gdy } y_i^* > c, \quad i = 1, \ldots, n_1 \\ c & \text{gdy } y_i^* \leqslant c, \quad i = (n_1 + 1), \ldots, n, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie:

$y_i^* = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + u_i$ – równanie regresji,

$\mathbf{X}_i$ – $(k+1)$-elementowy wektor (poziomy) wartości zmiennych objaśniających ze zbioru $X = \{X_1, \ldots, X_k\}$, odnotowanych dla i–tej obserwacji (jednostki), przy czym pierwszy element wektora $\mathbf{X}_i$ jest równy jedności,

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)'$ – wektor (pionowy) parametrów równania regresji,

u_i – składniki losowe równania, niezależne i pochodzące z tego samego rozkładu o wartości oczekiwanej równej 0 oraz stałej wariancji σ_u. Najczęściej zakłada się, że składniki losowe podlegają rozkładowi normalnemu i tak przyjęto w artykule.

Model tobitowy dla cenzurowania lewostronnego, z wartością progową $c = 0$ oraz przy założeniu rozkładu normalnego składników losowych nosi nazwę standardowego modelu tobitowego[6].

W standardowym modelu tobitowym zarówno prawdopodobieństwo osiągnięcia przez zmienną wartości powyżej progu, $P(y_i > 0|\mathbf{X}_i)$, jak i warunkowa wartość oczekiwana zmiennej uciętej, $E(y_i|y_i > 0, \mathbf{X}_i)$, zależą od tego samego zbioru zmiennych X. Naturalnym uogólnieniem jest dopuszczenie innego zbioru zmiennych (W) wpływającego na prawdopodobieństwo osiągnięcia przez zmienną zależną wartości powyżej progu oraz innego (X) – na warunkową wartość oczekiwaną $E(y_i|y_i > 0, \mathbf{X}_i)$. To pozwala na rozważenie modeli tobitowych opisujących zmienną zależną podlegającą nieprzypadkowej selekcji z cenzurowaniem lub ucięciem. Modele te należą do szerokiej rodziny tzw.

---

[5] W literaturze przedmiotu na ogół stosuje się nazwę „*model tobitowy*" na określenie modelu tobitowego typu I. Pojęcie „*modele tobitowe*" (w liczbie mnogiej) na ogół odnosi się do rodziny modeli tobitowych obejmujących modele tobitowe typu I–V zgodnie z klasyfikacją zaproponowaną przez T. Amemiyę [1] oraz inne modele wywodzące się od nich.

[6] W artykule rozważono tylko modele opisujące zmienną zależną cenzurowana lewostronnie. Nie wiąże się to ze startą ogólności: jeśli bowiem zmienna Y jest cenzurowana prawostronnie, to $-Y$ jest cenzurowana lewostronnie. Ponadto w dalszej części artykułu również bez straty ogólności przyjęto c=0 (wystarczy dokonać przesunięcia zmiennej tzn. Y–c). W dalszej części, także bez straty ogólności, przyjęto wartość progową a=0.

modeli selekcji[7]. Rodzina ta w szczególności zawiera modele nazwane przez T. Amemiyę modelami tobitowymi typu II i III (por. [1]) wraz z modyfikacjami oraz modele tobitowe typu IV i V – ich dwuwymiarowe odpowiedniki. Ogólnie można powiedzieć, że modele selekcji to modele opisujące zmienną zależną, której obserwowalność jest uzależniona od pewnych warunków opisanych przez inną zmienną (lub inne zmienne). Zagadnienie można rozważać nie tylko w kontekście modeli tobitowych, ale także w powiązaniu z modelami zmiennej zależnej jakościowej opisującej wiele kategorii (uporządkowanych lub nie) czy modelami zmiennej zależnej liczącej.

Modele tobitowe typu II–V znajdują zastosowanie, gdy pewna – zazwyczaj duża – część wartości zmiennej zależnej (zmiennych zależnych) gromadzi się (skupia) w zerze, lub innej wartości progowej c, nie ze względu na cenzurowanie, lecz w wyniku selekcji według pewnego nielosowego kryterium tzn. w wyniku cenzurowania zmiennej zależnej przez wartości innej, skorelowanej z nią zmiennej binarnej I (w modelach typu II i V) lub cenzurowanej Z (w modelach typu III i IV). Mechanizm selekcji, opisywany przez zmienną I lub Z, może zależeć od cech badanych jednostek lub otoczenia, a w szczególności może być związany z niekoniecznie świadomym podejmowaniem indywidualnych decyzji i dokonywaniem wyborów przez badane jednostki.

Model tobitowy typu II definiuje się w następujący sposób (por. np. [1], a także [17]):

$$y_i = \begin{cases} \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + u_i & \text{gdy} \quad I_i = 1, \quad i = 1, \ldots, n_1 \\ 0 \text{ lub brak} & \text{gdy} \quad I_i = 0, \quad i = (n_1 + 1), \ldots, n, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie:

$I_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } z_i^* > 0 \\ 0 & \text{gdy } z_i^* \leqslant 0 \end{cases}$ – zmienna binarna opisująca kryterium obserwowalności,

$z_i^* = \mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma} + v_i$ – równanie selekcji,

$\mathbf{W}_i$ – $(m$+$1)$-elementowy wektor (poziomy) wartości zmiennych objaśniających ze zbioru $W = \{W_1, \ldots, W_m\}$, odnotowanych dla i–tej obserwacji (jednostki), przy czym pierwszy element wektora $\mathbf{W}_i$ jest równy jedności,

$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m)'$ – wektor (pionowy) parametrów równania selekcji,

v_i – składniki losowe równania selekcji,

$\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i, \boldsymbol{\beta}, u_i,$ – określone jak wcześniej, przy czym najczęściej zakłada się, że: $(u_i, v_i) \sim N\left(0,\ 0; \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & \rho\sigma_u\sigma_v \\ \rho\sigma_u\sigma_v & \sigma_v^2 \end{bmatrix}\right)$, gdzie ρ – współczynnik korelacji między u_i i v_i.

W modelu tobitowym typu II kryterium obserwowalności opisane jest przez zmienną binarną I. Z tego względu przyjmuje się $\sigma_v = 1$, podobnie jak w modelu probitowym.

---

[7] Opis zagadnienia nieprzypadkowej selekcji oraz odpowiednich modeli można znaleźć np. w pracach J. Heckmana ([6], [7], [8], [9], [10], [11]).

Model tobitowy z selekcją (*tobit model with sample selection*, *double-hurdle model*) jest połączeniem modelu tobitowego i zagadnienia selekcji. Model ten można nazwać zmodyfikowanym modelem tobitowym typu II (modelem tobitowym typu II o zmodyfikowanym kryterium obserwowalności). Modyfikacja polega na tym, że obecnie muszą być spełnione dwa warunki, aby wartości zmiennej zależnej były obserwowalne. Pierwszy warunek, tak jak w modelu tobitowym typu II, nałożony jest na zmienną binarną I, drugi – na zmienną zależną: jej wartości muszą być większe od zera (lub innej wartości progowej), aby można je było zaobserwować. Zmodyfikowany model tobitowy typu II (model tobitowy z selekcją) można zapisać w postaci (por. np. [2] s. 4, [12], [13]):

$$y_i = \begin{cases} \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + u_i & \text{gdy } \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + u_i > 0 \wedge I_i = 1 \\ 0 \text{ lub brak} & \text{gdy } \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + u_i \leqslant 0 \vee I_i = 0 \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

przy oznaczeniach jak przy wzorze (3).

Model tobitowy typu III definiuje się w podobny sposób jak model typu II (por. np. [1], a także [17]):

$$y_i = \begin{cases} \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + u_i & \text{gdy} \quad z_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n_1 \\ 0 \text{ lub brak} & \text{gdy} \quad z_i = 0, \quad i = (n_1 + 1), \ldots, n, \end{cases} \tag{5}$$

gdzie tym razem zmienna opisująca kryterium obserwowalności jest postaci:

$$z_i = \begin{cases} z_i^* & \text{gdy} \quad z_i^* > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad z_i^* \leqslant 0 \end{cases} ,$$

przy pozostałych oznaczeniach jak wcześniej.

Model tobitowy typu III jest jednym z pierwszych modeli selekcji. W literaturze przedmiotu nazywany jest także modelem selekcji, modelem doboru próby lub modelem heckitowym (*selectivity models, sample selection models, self-selection models, heckit model*).

W zależności od tego, czy i kiedy wartości zmiennej I (lub Z) oraz zmiennych ze zbiorów X i W są dostępne, można wyróżnić ucięty lub cenzurowany model tobitowy typu II (lub III). Jeśli dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$ dostępne są wartości zmiennej I (lub Z) oraz zmiennych ze zbioru W, wówczas model jest cenzurowanym modelem tobitowym typu II (lub III) lub, ogólniej, cenzurowanym modelem selekcji. Wartości zmiennych ze zbioru X mogą być dostępne albo dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$ albo tylko dla $i : I_i = 1$ (tzn. $i = 1, \ldots, n_1$). Jeżeli wartości zmiennej I (lub Z) oraz zmiennych ze zbioru W są dostępne tylko dla $i = 1, \ldots, n_1$, model (3) lub (5) jest uciętym modelem tobitowym typu II lub III odpowiednio.

Modele tobitowe typu II lub III dopuszczają ujemne wartości dla zmiennej Y, co jest charakterystyczne dla uciętych i cenzurowanych modeli selekcji. Ponadto w modelach tych zakłada się występowanie korelacji ρ między składnikami losowymi równania regresji (u_i) i równania selekcji (v_i). Korelacja istotnie różna od zera oznacza występowanie związku między prawdopodobieństwem, że wartość zmiennej zależnej jest obserwowana, i warunkową wartością oczekiwaną zmiennej przy warunku, że jest ona obserwowana.

Modele tobitowe typu IV lub V powstają z modelu tobitowego typu III lub II, odpowiednio, dla zmiennej Y_1, przez uwzględnienie dodatkowej zmiennej cenzurowanej Y_2. Kryterium obserwowalności jest wspólne dla zmiennych Y_1 i Y_2, lecz wartości obu zmiennych nie mogą być obserwowalne równocześnie. W modelu tobitowym typu IV kryterium obserwowalności jest opisane przez zmienną cenzurowaną Z, natomiast w modelu tobitowym typu V – przez zmienną binarną I. Z konstrukcji wymagane jest, aby wartości zmiennej Z lub I oraz zmiennych objaśniających ze zbioru W były dostępne dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$.

Model tobitowy typu IV jest postaci (por. [1], a także [5], [17]):

$$y_{1i} = \begin{cases} \mathbf{X}_i^{(1)}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + u_{1i} & \text{gdy} \quad z_i > 0 \\ \text{brak} & \text{gdy} \quad z_i = 0 \end{cases}, \qquad y_{2i} = \begin{cases} \mathbf{X}_i^{(2)}\boldsymbol{\beta}^{(2)} + u_{2i} & \text{gdy} \quad z_i = 0 \\ \text{brak} & \text{gdy} \quad z_i > 0 \end{cases}, \tag{6}$$

gdzie:

$\mathbf{X}_i^{(1)}$, $\mathbf{X}_i^{(2)}$ – wektory (poziome) wartości zmiennych objaśniających ze zbioru $X^{(1)} = \{X_1^{(1)}, \ldots, X_{k_1}^{(1)}\}$ lub $X^{(2)} = \{X_1^{(2)}, \ldots, X_{k_2}^{(2)}\}$ odnotowanych dla i–tej obserwacji (jednostki), przy czym pierwszy element tych wektorów jest równy jedności,

$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = (\beta_0^{(1)}, \beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_{k_1}^{(1)})'$ lub $\boldsymbol{\beta}^{(2)} = (\beta_0^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_{k_2}^{(2)})'$ – wektory (pionowe) parametrów równania regresji dla Y_1 lub równania regresji dla Y_2,

$z_i = \begin{cases} z_i^* & \text{gdy} \quad z_i^* > 0, \quad i = 1, \ldots, n_1 \\ 0 & \text{gdy} \quad z_i^* \leqslant 0, \quad i = (n_1 + 1), \ldots, n \end{cases}$ – kryterium obserwowalności wspólne dla zmiennych Y_1 i Y_2,

$z_i^*, \mathbf{W}_i, \gamma$ – jak wcześniej,

u_{1i}, u_{2i}, v_i – składniki losowe: równania regresji dla Y_1, dla Y_2 oraz równania selekcji; niezależne, pochodzące z trójwymiarowego rozkładu normalnego[8]:

$$(u_{1i}, u_{2i}, v_i) \sim N\left(0, 0, 0; \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \rho_1\sigma_1\sigma_v \\ 0 & \sigma_2^2 & \rho_2\sigma_2\sigma_v \\ \rho_1\sigma_1\sigma_v & \rho_2\sigma_2\sigma_v & \sigma_v^2 \end{bmatrix}\right), \text{ przy czym:}$$

σ_1 (σ_2) – odchylenie standardowe składnika losowego u_{1i} (odpowiednio u_{2i}),

ρ_1 – współczynnik korelacji między składnikami losowymi v_i oraz u_{1i},

ρ_2 – współczynnik korelacji między składnikami losowymi v_i oraz u_{2i}.

[8] Równania opisujące zmienne Y_1 oraz Y_2 są niezależne, gdyż są to równania dla dwóch wykluczających się warunków (nie ma możliwości, aby oba warunki były spełnione jednocześnie), stąd zera w macierzy wariancji-kowariancji.

W podobny sposób definiuje się model tobitowy typu V (por. [1], a także [5], [17]):

$$y_{1i} = \begin{cases} \mathbf{X}_i^{(1)}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + u_{1i} & \text{gdy} \quad I_i = 1 \\ \text{brak} & \text{gdy} \quad I_i = 0 \end{cases}, \qquad y_{2i} = \begin{cases} \mathbf{X}_i^{(2)}\boldsymbol{\beta}^{(2)} + u_{2i} & \text{gdy} \quad I_i = 0 \\ \text{brak} & \text{gdy} \quad I_i = 1, \end{cases} \tag{7}$$

przy czym kryterium obserwowalności dla zmiennych Y_1 i Y_2 opisuje zmienna binarna:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad z_i^* > 0, \quad i = 1, \ldots, n_1 \\ 0 & \text{gdy} \quad z_i^* \leqslant 0, \quad i = (n_1 + 1), \ldots, n, \end{cases}$$

przy oznaczeniach jak wcześniej.

Podobnie jak w przypadku modelu tobitowego typu II można rozważyć modyfikację modelu typu V przez dołożenie dodatkowych warunków na zmienne zależne Y_1 oraz Y_2. Postać zmodyfikowanego modelu tobitowego typu V można znaleźć w pracy [17].

Dotychczas w artykule zaprezentowano modele tobitowe przy założeniu homoskedastyczności składnika losowego. W praktyce stosuje się także modele tobitowe przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego równania regresji. Można rozważyć heteroskedastyczność o multiplikatywnej postaci tzn.:

$$\sigma_i = \sigma_u \exp(\mathbf{H}_i \boldsymbol{\alpha}), \tag{8}$$

gdzie:

$\mathbf{H}_i$ – J-elementowy wektor (poziomy) wartości zmiennych objaśniających ze zbioru $H = \{H_1, \ldots, H_J\}$ w równaniu heteroskedastyczności,

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_J)'$ – J-elementowy wektor (pionowy) parametrów równania heteroskedastyczności.

Definicja heteroskedastyczności sprawia, że przy $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, dla wszystkich i zachodzi $\sigma_i = \sigma_u$, czyli występuje homoskedastyczność.

Prezentacja metod estymacji w modelach tobitowych wykracza poza ramy niniejszego artykułu. W tym miejscu warto wspomnieć jedynie, że na ogół stosuje się metodę największej wiarygodności (por. np. [1], [4]), która zdaje egzamin także w wypadku heteroskedastyczności składnika losowego (po odpowiedniej modyfikacji funkcji wiarygodności). Metoda największej wiarygodności wymaga założenia o normalności rozkładu składników losowych. Przy skomplikowanych modelach o funkcji wiarygodności posiadającej więcej niż jedno ekstremum stosuje się dwustopniową metodę Heckmana (por. np. [1]). W literaturze przedmiotu można odnaleźć także metody semiparametryczne i nieparametryczne. Metody te jednak nie są pozbawione pewnych wad.

3. WARUNKOWE WARTOŚCI OCZEKIWANE

W modelach tobitowych można rozważyć różne wartości oczekiwane zmiennej zależnej: $E(Y^*)$, $E(Y)$, a także wartość oczekiwaną zmiennej Y pod warunkiem, że jej wartości są obserwowalne (np. $E(Y|Y > 0)$ w modelu tobitowym typu I). We wszystkich modelach tobitowych wartość oczekiwana zmiennej wejściowej Y^* jest postaci[9]:

$$E(y_i^*|\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} \ \ (\text{lub} \ \ E(y_i^*|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}) \tag{9}$$

Z modelem tobitowym (typu I) związane są:

— wartość oczekiwana „niezerowych” wartości zmiennej zależnej:

$$E(y_i\,|y_i > 0, \mathbf{X}_i\,) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \sigma_u\lambda(-\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}), \tag{10}$$

gdzie, w wypadku ograniczenia lewostronnego:

$$\lambda(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{1 - \Phi(\alpha)} \tag{11}$$

nazywane jest lambdą Heckmana[10];

— wartość oczekiwana wszystkich wartości zmiennej zależnej:

$$E(y_i|\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} \cdot \Phi(\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}) + \sigma_u\varphi(\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}). \tag{12}$$

Między wartościami oczekiwanymi (10) i (12) zachodzi następujący związek:

$$E(y_i|\mathbf{X}_i) = E(y_i|y_i > 0, \mathbf{X}_i) \cdot \Phi(\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}). \tag{13}$$

Wartości oczekiwane (10) oraz (12) różnią się od wartości oczekiwanej zmiennej wejściowej $E(y_i^*|\mathbf{X}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}$. Różnice te są tym większe, im większy jest procent obserwacji ocenzurowanych (tzn. takich, że $y_i = 0$).

W modelach tobitowych w zależności od celu prowadzanego badania można wyznaczyć różne (warunkowe) wartości oczekiwane zmiennej zależnej. W modelu tobitowym typu II danym wzorem (3) wartość oczekiwana zmiennej zależnej pod warunkiem, że jej wartości są obserwowalne jest postaci:

$$E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = E(y_i|z_i^* > 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \rho\sigma_u\lambda(-\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}). \tag{14}$$

Można ponadto wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej zależnej zgodnie z formułą:

$$E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = (\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \rho\sigma_u\lambda(-\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})) \cdot \Phi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}). \tag{15}$$

[9] Z tego względu, że modele zmiennej zależnej cenzurowanej, służą do opisu mikrodanych (danych indywidualnych, jednostkowych), wyrażenie $E(y_i)$ rozumiane jest jako wartość oczekiwana zmiennej Y dla i-tej badanej jednostki (osoby, przedsiębiorstwa itp.). W artykule przyjęto taką notację wzorując się na literaturze przedmiotu (por. np. [21], a także [5]).

[10] Dla ograniczenia prawostronnego lambdę Heckmana definiuje się jako: $\lambda(\alpha) = -\dfrac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)}$.

Stosownie do celu badania do wyznaczenia wartości teoretycznych zmiennej zależnej na podstawie otrzymanego modelu wykorzystuje się wartość oczekiwaną (14) lub (15). Jeżeli przedmiotem zainteresowania jest opis badanego zjawiska w wybranej na podstawie kryterium selekcji próbie, wówczas należy skorzystać ze wzoru (14).

W modelu tobitowym typu II o zmodyfikowanym kryterium obserwowalności (por. (4)) warunkowe wartości oczekiwane odnoszące się do zmiennej zależnej Y są postaci:

$$E(y_i|y_i > 0, I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) =$$

$$= \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \frac{\sigma_u \cdot \left(\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u})\Phi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma} - \rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \rho\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u} - \rho\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)}{\Phi_2(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}, \mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}; \rho)} \tag{16}$$

oraz

$$E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = E(y_i|y_i > 0, I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) \cdot \Phi_2(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}, \mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}; \rho), \tag{17}$$

gdzie $\Phi_2(\cdot, \cdot; \rho)$ jest dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu normalnego o średnich równych zeru, odchyleniach standardowych równych jedności i współczynniku korelacji ρ.

Można również rozważyć następującą wartość oczekiwaną:

$$E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)/\Phi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}). \tag{18}$$

W modelu tobitowym typu III (por. (5)) można wyznaczyć następujące wartości oczekiwane:

$$E(y_i|z_i > 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \rho\sigma_u\lambda(-\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}), \tag{19}$$

$$E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = \left(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \rho\sigma_u\lambda(-\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v})\right) \cdot \Phi(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}). \tag{20}$$

Podstawiając $\sigma_v = 1$ w powyższych formułach, otrzymuje się wzory na wartości oczekiwane w modelu tobitowym typu II (por. wzory (14) i (15)).

Wzory na warunkowe wartości oczekiwane zmiennych zależnych Y_1 oraz Y_2 w modelu tobitowym typu IV (por. (6)) wynikają ze wzorów na odpowiednie wartości oczekiwane w modelu tobitowym typu III i są postaci[11]:

— dla zmiennej Y_1:

$$E(y_{1i}|z_i > 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = \mathbf{X}_i^{(1)}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \rho_1\sigma_1\lambda(-\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}), \tag{21}$$

$$E(y_{1i}|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = \left(\mathbf{X}_i^{(1)}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \rho_1\sigma_1\lambda(-\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v})\right) \cdot \Phi(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}), \tag{22}$$

[11] Dla wygody we wzorach poniżej przyjęto oznaczenie $\mathbf{X}_i = (\mathbf{X}_i^{(1)}, \mathbf{X}_i^{(2)})$.

— dla zmiennej Y_2:

$$E(y_{2i}|z_i = 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = E(y_{2i}|z_i^* \leqslant 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = \mathbf{X}_i^{(2)}\boldsymbol{\beta}^{(2)} - \rho_2\sigma_2\lambda(\tfrac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}), \tag{23}$$

$$E(y_{2i}|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) = E(y_{2i}|z_i = 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) \cdot P(z_i^* \leqslant 0|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i) =$$

$$= \left(\mathbf{X}_i^{(2)}\boldsymbol{\beta}^{(2)} - \rho_2\sigma_2\lambda(\tfrac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v})\right) \cdot \Phi(-\tfrac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}). \tag{24}$$

Wartości oczekiwane zmiennych zależnych w modelu tobitowym typu V danym wzorem (7) wyznacza się zgodnie ze wzorami (21)–(24) dla modelu typu IV, z podstawieniem $\sigma_v = 1$.

4. WPŁYWY KRAŃCOWE ZMIENNYCH OBJAŚNIAJĄCYCH W MODELACH TOBITOWYCH

Stosując modele tobitowe należy pamiętać, że interpretacja parametrów modelu jest inna niż w zwykłym modelu regresji (por. np. [3], [22], [23]). Wynika to z faktu, że każda z (warunkowych) wartości oczekiwanych (10), (12), (14)–(24) jest różna od wartości oczekiwanej (9). W rezultacie pochodna cząstkowa (warunkowej) wartości oczekiwanej zmiennej zależnej w ogólnym przypadku nie jest równa parametrowi stojącemu przy odpowiedniej zmiennej objaśniającej. W artykule wpływy krańcowe dla kolejnych modeli tobitowych wyznaczono obliczając pochodne cząstkowe z odpowiedniej wartości oczekiwanej zmiennej zależnej. W literaturze przedmiotu można odnaleźć postać niektórych spośród nich, lecz na ogół dla bardziej skomplikowanych modeli nie są one podawane.

Ponieważ wartości oczekiwane (10) i (12) w standardowym modelu tobitowym różnią się od wartości oczekiwanej zmiennej wejściowej Y^* danej wzorem (9), w celu wyznaczenia wpływu zmiennej objaśniającej na zamienną zależną Y należy obliczyć wpływy krańcowe (pochodne cząstkowe). Prawe strony wyrażeń (10) i (12) w sposób nieliniowy zależą od zmiennej, której wpływ na zmienną zależną jest badany, zatem również pochodna cząstkowa zależy od tej zmiennej. Przydatne jest oznaczenie symbolem δ pochodnej z funkcji λ:

$$\delta(\alpha) := \frac{\partial\lambda(\alpha)}{\partial\alpha} = \lambda^2(\alpha) - \alpha\lambda(\alpha). \tag{25}$$

Odpowiednie pochodne cząstkowe są postaci:

$$\frac{\partial E(y_i\,|y_i > 0, \mathbf{X}_i)}{\partial x_{ji}} = \beta_j\left(1 - \tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u} \cdot \lambda\left(-\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}\right) - \lambda^2\left(-\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}\right)\right) = \beta_j\left(1 - \delta\left(-\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}\right)\right), \tag{26}$$

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i)}{\partial x_{ji}} = \beta_j\Phi\left(\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}\right). \tag{27}$$

Gdy zmienna objaśniająca X_j jest zmienną binarną, jej wpływ wyznacza się jako różnicę:

$$\frac{\Delta E(y_i|\mathbf{X}_i)}{\Delta x_{ji}} = E(y_i|\mathbf{X}_i, x_{ji} = 1) - E(y_i|\mathbf{X}_i, x_{ji} = 0). \tag{28}$$

Otrzymane wyniki są cenne ze względu na możliwość ich rzeczywistej interpretacji. Równanie (26) informuje, jaki wpływ wywierają zmiany wartości zmiennej objaśniającej X_j na zmiany w niezerowych wartościach zmiennej Y. Wpływ ten jest iloczynem parametru β_j oraz wyrażenia w nawiasie, które jest zawsze dodatnie (por. [7]), a jego wartość wzrasta wraz ze wzrostem wartości $\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}/\sigma_u$. Zatem dla wyższych wartości $\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}/\sigma_u$ zmiany w wartości oczekiwanej $E(y_i\,|y_i > 0, \mathbf{X}_i)$ są większe.

Równanie (27) wyznacza wpływ zmiennej X_j na zmienną Y. Im mniej w próbie jest wartości ocenzurowanych (tzn. im większe jest prawdopodobieństwo $P(y_i^* > 0) = \Phi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u})$), tym zmiany w wartościach zmiennej zależnej generowane przez zmiany zmiennej objaśniającej X_j są bliższe β_j. Jeżeli prawdopodobieństwo $\Phi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u})$ jest bliskie jedności, tzn. w badanej próbie jest bardzo mały odsetek danych ocenzurowanych, wówczas wpływ zmiennej X_j na zmienną Y może być nieistotnie różny od β_j. Zatem wyznaczanie wpływów krańcowych w modelu tobitowym jest ważne szczególnie wtedy, gdy w próbie jest duży odsetek obserwacji „zerowych" (ocenzurowanych).

Ponadto na bazie wzoru (27) można wnioskować, że stosunek wpływów krańcowych j–tej i l–tej zmiennej objaśniającej na zmienną Y jest ilorazem parametrów stojących przy tych zmiennych, tzn. wynosi $\beta_j\big/\beta_l$.

Przydatne jest wyznaczenie pochodnej cząstkowej z prawdopodobieństwa $\Phi\left(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}\right)$:

$$\frac{\partial \Phi\left(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}\right)}{\partial x_{ji}} = \frac{\beta_j}{\sigma_u}\varphi\left(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}\right). \tag{29}$$

Równanie (29) określa, jak zmiany zmiennej objaśniającej X_j wpływają na zmiany prawdopodobieństwa $P(y_i > 0|\mathbf{X}_i)$, tzn. jak wpływają na prawdopodobieństwo „przejścia" wartości zmiennej zależnej z przedziału poniżej poziomu zera, do przedziału powyżej zera (z nieobserwowalnego do obserwowalnego).

Znak wpływów krańcowych (26)–(29) jest taki sam, jak znak parametru przy zmiennej X_j. Wielkości wpływów krańcowych zależą nie tylko od wielkości zmian zmiennej X_j, ale także od wartości wszystkich zmiennych objaśniających.

W praktyce interpretację wpływów krańcowych podaje się np. wyliczając odpowiednie wartości dla średniej arytmetycznej, mediany, modalnej lub innej wartości zmiennych $X_1, \ldots, X_k$. Można również dla wyznaczonego estymatora wektora parametrów $\boldsymbol{\beta}$ dla każdego i wyznaczyć wartości pochodnych cząstkowych zadanych wzorami podanymi powyżej, a następnie wyliczyć z nich średnią i dopiero te wartości zinterpretować jako wpływ zmiennej objaśniającej X_j na wartość oczekiwaną zmiennej zależnej cenzurowanej lub uciętej, albo na wspomniane wyżej prawdopodobieństwo. Wartość parametru β_j interpretuje się jako wpływ zmiennej objaśniającej X_j na ukrytą zmienną Y^* (np. skłonność lub użyteczność[12], której nie można zaobserwować).

W modelu tobitowym typu II punktem wyjścia do interpretacji są wartości oczekiwane (14) oraz (15) zmiennej zależnej Y podlegającej nieprzypadkowej selekcji. W modelach tobitowych typu II–V zmienną objaśniającą, której wpływ na zmienną zależną jest badany, dla wygody oznaczono przez ξ_j, gdyż będzie to zmienna objaśniająca ze zbioru X lub ze zbioru W, albo zmienna należąca do części wspólnej tych zbiorów. Aby określić wpływ $j-$tej zmiennej objaśniającej ξ_j na zmienną zależną Y trzeba wziąć pod uwagę, do którego ze zbiorów ta zmienna należy. Wyróżnia się następujące wpływy krańcowe:

- *wpływ pośredni* zmiennej ξ_j występującej tylko wśród zmiennych objaśniających równania selekcji ($\xi_j = W\backslash X$). Wpływ ten następuje pośrednio przez $\varphi(.)$ i/lub $\Phi(.)$, co oznacza, że na ogół wielkość wpływu pośredniego zależy od wartości zmiennej ξ_j. Wpływ pośredni wynika z faktu, że zmienna zależna jest zmienną podlegającą nieprzypadkowej selekcji;
- *wpływ bezpośredni* zmiennej ξ_j występującej tylko wśród zmiennych objaśniających równania regresji ($\xi_j \in X\backslash W$). Wpływ bezpośredni w większości przypadków nie zależy od wartości zmiennej ξ_j;
- *wpływ łączny* zmiennej ξ_j występującej zarówno w równaniu regresji i równaniu selekcji ($\xi_j \in X \cap W$). Dla wygody zapisu przyjęto ten sam numer (j) zmiennej, gdy występuje ona w zbiorze X i ten sam, gdy występuje w zbiorze W. Wpływ łączny zmiennej $\xi_j \in X \cap W$ na zmienną zależną na ogół jest sumą wpływu pośredniego i bezpośredniego tej zmiennej. W takim wypadku we wzorach zamieszczonych poniżej wpisano słowo „suma" (suma wpływów cząstkowych $\xi_j \in X\backslash W$ oraz $\xi_j = W\backslash X$).

Wzory opisujące wielkość wpływu krańcowego pośredniego, bezpośredniego oraz łącznego zmiennej ξ_j na zmienną zależną w modelu tobitowym typu II są postaci:

$$\frac{\partial E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \begin{cases} -\gamma_j \rho \sigma_u \delta(-\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash X \\ \beta_j & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j \in X \cap W, \end{cases} \tag{30}$$

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \begin{cases} \gamma_j \varphi(\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma})(\mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} - \rho \sigma_u \mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash X \\ \beta_j \Phi(\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j \in X \cap W. \end{cases} \tag{31}$$

Wartość $\sigma_u \delta(-\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma})$ jest zawsze dodatnia. Stąd, jeżeli $\rho > 0$, znak parametru stojącego przy zmiennej objaśniającej w równaniu selekcji jest przeciwny niż znak pośredniego

[12] Por. także [5], s. 16-17, o interpretacji zmiennych jakościowych w świetle użyteczności lub skłonności. Interpretacje te w analogiczny sposób przekładają się na zmienne cenzurowane.

wpływu krańcowego tej zmiennej na zmienną zależną Y wyznaczonego zgodnie z (30). Jeżeli $\rho < 0$, to znaki te są takie same.

Gdy $j-$ta zmienna objaśniająca jest zmienną binarną, jej wpływ wyznacza się jako różnicę:

$$\frac{\Delta E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\Delta \xi_{ji}} = E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i, \xi_{ji} = 1) - E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i, \xi_{ji} = 0) \quad (32)$$

lub, odpowiednio,

$$\frac{\Delta E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\Delta \xi_{ji}} = E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i, \xi_{ji} = 1) - E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i, \xi_{ji} = 0), \quad (33)$$

gdzie ξ_j może być zmienną ze zbioru X lub W. Przy tym zachodzi:

$$\frac{\Delta E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\Delta \xi_{ji}} = \begin{cases} \rho\sigma_u \left(\lambda(-\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \lambda(-\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash X \\ \beta_j & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j \in X \cap W, \end{cases} \quad (34)$$

gdzie $\mathbf{W}_i^{(1)}$ i $\mathbf{W}_i^{(0)}$ – wektory wartości zmiennych ze zbioru W z podstawieniem w miejsce $j-$tej zmiennej wartości 1 lub 0, odpowiednio. Podobnie w wypadku wpływu zmiennej binarnej wyznaczonego wzorem (33):

$$\frac{\Delta E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\Delta \xi_{ji}} =$$
$$= \begin{cases} \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}\left(\Phi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \Phi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) + \rho\sigma_u\left(\varphi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \varphi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash X \\ \beta_j\Phi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash W \\ \mathbf{X}_i^{(1)}\boldsymbol{\beta} \cdot \Phi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{X}_i^{(0)}\beta \cdot \Phi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma}) + \rho\sigma_u\left(\varphi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \varphi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) & \text{gdy } \xi_j \in X \cap W, \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{X}_i^{(1)}$ i $\mathbf{X}_i^{(0)}$ – wektory wartości zmiennych ze zbioru X z podstawieniem w miejsce $j-$tej zmiennej wartości 1 lub 0, odpowiednio.

W szczególności interesujący jest wynik, że wpływy krańcowe zmiennej $\xi_j \in X\backslash W$ są takie same, gdy zmienna ta jest ciągła lub gdy jest zmienną binarną.

W modelu tobitowym typu II przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego o multiplikatywnej postaci, zgodnie ze wzorem (8), odpowiednie wpływy krańcowe mają postać[13]:

[13] Wartości oczekiwane $E(y_i|I_i = 1, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i, \mathbf{H}_i)$ oraz $E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i, \mathbf{H}_i)$w modelu tobitowym typu II przy założeniu multiplikatywnej heteroskedastyczności składnika losowego są postaci (14) oraz (15), odpowiednio, z podstawieniem $\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})$ w miejsce σ_u.

$$\frac{\partial E(y_i|I_i=1,\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \\ = \begin{cases} -\gamma_j \rho\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\delta(-\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash(X\cup H) \\ \beta_j & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash(W\cup H) \\ \alpha_j\rho\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\lambda(-\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in H\backslash(X\cup W), \end{cases} \tag{35}$$

a gdy $\xi_j \in (X\cap H)\backslash W$, $\xi_j \in (W\cap H)\backslash X$, $\xi_j \in (X\cap W)\backslash H$ lub $\xi_j \in X\cap W\cap H$, wpływy krańcowe są równe odpowiedniej sumie,

oraz:

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \\ = \begin{cases} \gamma_j\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} - \rho\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash(X\cup H) \\ \beta_j\Phi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash(W\cup H) \\ \alpha_j\rho\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in H\backslash(X\cup W), \end{cases} \tag{36}$$

a gdy $\xi_j \in (X\cap H)\backslash W$, $\xi_j \in (W\cap H)\backslash X$, $\xi_j \in (X\cap W)\backslash H$ lub $\xi_j \in X\cap W\cap H$, wpływy krańcowe są równe odpowiedniej sumie.

Podobnie jak w modelu tobitowym typu II przy założeniu homoskedastyczności składnika losowego także tutaj, gdy j–ta zmienna objaśniająca jest zmienną binarną, jej wpływ wyznacza się jako odpowiednią różnicę, analogicznie jak we wzorach (32) i (33), lecz tym razem ξ_j może być zmienną ze zbioru X, W lub H. Zachodzi:

$$\frac{\Delta E(y_i|I_i=1,\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\Delta \xi_{ji}} = \\ = \begin{cases} \rho\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})[\lambda(-\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \lambda(-\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})] & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash(X\cup H) \\ \beta_j & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash(W\cup H) \\ \rho\sigma_u\lambda(-\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})[\exp(\mathbf{H}_i^{(1)}\boldsymbol{\alpha}) - \exp(\mathbf{H}_i^{(0)}\boldsymbol{\alpha})] & \text{gdy } \xi_j \in H\backslash(X\cup W) \\ \rho\sigma_u[\exp(\mathbf{H}_i^{(1)}\boldsymbol{\alpha})\lambda(-\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \exp(\mathbf{H}_i^{(0)}\boldsymbol{\alpha})\lambda(-\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})] & \text{gdy } \xi_j \in (W\cap H)\backslash X \\ \beta_j + \rho\sigma_u[\exp(\mathbf{H}_i^{(1)}\boldsymbol{\alpha})\lambda(-\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \exp(\mathbf{H}_i^{(0)}\boldsymbol{\alpha})\lambda(-\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})] & \text{gdy } \xi_j \in X\cap W\cap H \end{cases} \tag{37}$$

a gdy $\xi_j \in (X\cap H)\backslash W$ lub $\xi_j \in (X\cap W)\backslash H$, wpływy krańcowe są równe odpowiedniej sumie. Przyjęto oznaczenia: $\mathbf{W}_i^{(1)}$ i $\mathbf{W}_i^{(0)}$ ($\mathbf{H}_i^{(1)}$ i $\mathbf{H}_i^{(0)}$) – wektor wartości zmiennych ze zbioru W (H) z podstawieniem w miejsce j–tej zmiennej wartości 1 lub 0, odpowiednio.

Wpływy krańcowe zmiennej binarnej w modelu tobitowym typu II przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego wyznaczone w oparciu o wartość oczekiwaną $E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)$ są postaci:

$$\frac{\Delta E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\Delta\xi_{ji}} =$$
$$= \begin{cases} \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}\left(\Phi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \Phi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) + \\ \quad +\rho\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\left(\varphi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \varphi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash(X\cup H) \\ \beta_j\Phi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash(W\cup H) \\ \rho\sigma_u\lambda(-\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})(\exp(\mathbf{H}_i^{(1)}\boldsymbol{\alpha}) - \exp(\mathbf{H}_i^{(0)}\boldsymbol{\alpha})) & \text{gdy } \xi_j \in H\backslash(X\cup W) \\ \mathbf{X}_i^{(1)}\boldsymbol{\beta}\cdot\Phi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{X}_i^{(0)}\boldsymbol{\beta}\cdot\Phi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma}) + \\ \quad +\rho\sigma_u \exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\left(\varphi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \varphi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) & \text{gdy } \xi_j \in (X\cap W)\backslash H \\ \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}\left(\Phi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \Phi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) + \\ \quad +\rho\sigma_u\left(\exp(\mathbf{H}_i^{(1)}\boldsymbol{\alpha})\varphi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) - \exp(\mathbf{H}_i^{(0)}\boldsymbol{\alpha})\varphi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right) & \text{gdy } \xi_j \in (W\cap H)\backslash X \\ \left(\mathbf{X}_i^{(1)}\boldsymbol{\beta} + \rho\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i^{(1)}\boldsymbol{\alpha})\lambda(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma})\right)\cdot\Phi(\mathbf{W}_i^{(1)}\boldsymbol{\gamma}) + \\ \quad -\left(\mathbf{X}_i^{(0)}\boldsymbol{\beta} + \rho\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i^{(0)}\boldsymbol{\alpha})\lambda(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma})\right)\cdot\Phi(\mathbf{W}_i^{(0)}\boldsymbol{\gamma}) & \text{gdy } \xi_j \in X\cap W\cap H \end{cases} \tag{38}$$

przy oznaczeniach analogicznych jak wcześniej, przy czym wpływ krańcowy zmiennej $\xi_j \in (X\cap H)\backslash W$ jest sumą wpływów krańcowych $\xi_j \in X\backslash(W\cup H)$ i $\xi_j \in H\backslash(X\cup W)$.

W modelu tobitowym typu II o zmodyfikowanym kryterium obserwowalności (tobitowym z selekcją) wpływy krańcowe wyznaczone jako odpowiednie pochodne cząstkowe z wartości oczekiwanej zadanej wzorem (16) lub (17) są następującej postaci:

$$\frac{\partial E(y_i|y_i>0, I_i=1,\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i)}{\partial\xi_{ji}} = \\ = \frac{1}{\Phi_2^2}\left(\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i)}{\partial\xi_{ji}}\cdot\Phi_2 - E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i)\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_{ji}}\right), \tag{39}$$

gdzie[14]:

$$\Phi_2 = \Phi_2(\tfrac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}, \mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma};\rho),$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_{ji}} = \begin{cases} \gamma_j\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u} - \rho\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) & \text{gdy } \xi_j \in W\backslash X \\ \frac{1}{\sigma_u}\beta_j\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u})\Phi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma} - \rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) & \text{gdy } \xi_j \in X\backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j \in X\cap W \end{cases}$$

[14] Pochodne cząstkowe z dystrybuanty dwuwymiarowego rozkładu normalnego o średnich równych zeru, odchyleniach standardowych równych jedności oraz współczynniku korelacji ρ wynoszą: $\frac{d}{dx}\Phi_2(x,y,\rho) = \varphi(x)\Phi\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$ oraz $\frac{d}{dy}\Phi_2(x,y,\rho) = \varphi(y)\Phi\left(\frac{x-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$.

oraz

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}} =$$

$$= \begin{cases} \gamma_j\left(\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}-\rho\sigma_u\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})+\right. \\ \left.\quad +\frac{\sigma_u}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u})\varphi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)-\rho^2\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\varphi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)\right) & \text{gdy } \xi_j\in W\backslash X \\ \beta_j\left(\Phi_2+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\varphi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)-\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u})\varphi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)\right) & \text{gdy } \xi_j\in X\backslash W \end{cases}$$

a gdy $\xi_j \in X \cap W$, wpływy krańcowe są odpowiednią sumą.

W modelu tobitowym typu II o zmodyfikowanym kryterium przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego o multiplikatywnej postaci odpowiednie wpływy krańcowe mają postać[15]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E(y_i|y_i>0, I_i=1,\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \\ &= \frac{1}{\Phi_2^2}\left(\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}}\cdot\Phi_2 - E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_{ji}}\right), \end{aligned} \tag{40}$$

gdzie:

$$\Phi_2 = \Phi_2(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}, \mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma};\rho),$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_{ji}} = \begin{cases} \gamma_j\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) & \text{gdy } \xi_j\in W\backslash(X\cup H) \\ \frac{\beta_j}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})})\Phi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) & \text{gdy } \xi_j\in X\backslash(W\cup H) \\ \frac{-\alpha_j\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})})\Phi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) & \text{gdy } \xi_j\in H\backslash(X\cup W) \end{cases}$$

oraz $\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_{ji}}$ jest równe odpowiedniej sumie, gdy $\xi_j \in (X\cap H)\backslash W$, $\xi_j \in (W\cap H)\backslash X$, $\xi_j \in (X\cap W)\backslash H$ lub $\xi_j \in X\cap W\cap H$. A ponadto:

- dla $\xi_j \in W\backslash(X\cup H)$:

[15] Warunkowa wartość oczekiwana $E(y_i|y_i>0, I_i=1,\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)$ w zmodyfikowanym modelu tobitowym typu II przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego jest postaci (16) z podstawieniem $\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})$ w miejsce σ_u.

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \gamma_j\left(\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)(\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}-\rho\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})+\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})})\varphi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)-\rho^2\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\varphi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)\right)$$

- dla $\xi_j \in X\backslash(W\cup H)$:

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}} =$$
$$=\beta_j\left(\Phi_2+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\varphi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)-\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})})\varphi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)\right)$$

- dla $\xi_j \in H\backslash(X\cup W)$:

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}} =$$
$$=\alpha_j\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})\left(\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})})\Phi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)+\rho\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\Phi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right)+$$
$$+\alpha_j\cdot\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\varphi(\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})})\varphi\left(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}-\rho\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)-\varphi(\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma})\varphi\left(\frac{\frac{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma_u\exp(\mathbf{H}_i\boldsymbol{\alpha})}-\rho\,\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right),$$

a gdy $\xi_j \in (X\cap H)\backslash W$, $\xi_j \in (W\cap H)\backslash X$, $\xi_j \in (X\cap W)\backslash H$ lub $\xi_j \in (X\cap W\cap H)$, wyrażenie $\dfrac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i,\mathbf{H}_i)}{\partial \xi_{ji}}$ jest równe odpowiedniej sumie.

W modelu tobitowym typu II o zmodyfikowanym kryterium obserwowalności przy założeniu homo- lub heteroskedastyczności dla binarnej $j-$tej zmiennej objaśniającej wpływy krańcowe wyznacza się analogicznie jak w modelu tobitowym typu II, tzn. jako różnicę odpowiednich wartości oczekiwanych (por. wzory (32) i (33)), przy czym przy założeniu heteroskedastyczności ξ_j może być zmienną ze zbioru X, W lub H. Wzory te redukują się tylko do nieznacznie prostszej postaci, stąd nie zostały tutaj przytoczone.

W modelu tobitowym typu III wzory służące do oceny wpływu krańcowego $j-$tej zmiennej niezależnej na zmienną Y są analogiczne, jak w modelu tobitowym typu II, z tym, że obecnie σ_v jest dowolne, niekoniecznie równe 1. Tak jak poprzednio należy rozważyć trzy przypadki: $\xi_j \in W\backslash X$ – aby wyznaczyć wpływ pośredni, $\xi_j \in X\backslash W$ –

aby wyznaczyć wpływ bezpośredni, oraz $\xi_j \in X \cap W$ – aby wyznaczyć łączny wpływ j–tej zmiennej objaśniającej. Wpływy krańcowe oblicza się zgodnie z formułami:

$$\frac{\partial E(y_i|z_i > 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \begin{cases} -\gamma_j \rho \dfrac{\sigma_u}{\sigma_v} \delta(-\frac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) & \text{gdy } \xi_j \in W \backslash X \\ \beta_j & \text{gdy } \xi_j \in X \backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j \in X \cap W, \end{cases} \tag{41}$$

$$\frac{\partial E(y_i|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}} = \begin{cases} \gamma_j \dfrac{\sigma_u}{\sigma_v} \varphi(\frac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) \left(\dfrac{\mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma_u} - \rho \dfrac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v} \right) & \text{gdy } \xi_j \in W \backslash X \\ \beta_j \Phi(\frac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) & \text{gdy } \xi_j \in X \backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j \in X \cap W. \end{cases} \tag{42}$$

Jeżeli j–ta zmienna objaśniająca jest zmienną binarną jej wpływ wyznacza się, analogicznie jak w modelu tobitowym typu II, jako odpowiednią różnicę (por. wzory (32) i (33).

Wzory służące do oceny wpływu j–tej zmiennej objaśniającej na zmienne Y_1 i Y_2 w modelu tobitowym typu IV są podobne jak w poprzednich modelach. Odpowiednie wartości oczekiwane oraz ich pochodne cząstkowe względem j–tej zmiennej zapisano poniżej. Analogicznie jak poprzednio $\xi_j^{(1)}$ to zmienna, której wpływ na zmienną Y_1 jest badany; $\xi_j^{(2)}$ to zmienna, której wpływ na zmienną Y_2 jest badany. Rozważono wpływy krańcowe pośrednie, bezpośrednie i łączne.

- Wpływy krańcowe zmiennej $\xi_j^{(1)}$ na zmienną Y_1 wynoszą:

$$\frac{\partial E(y_{1i}|z_i > 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}^{(1)}} = \begin{cases} -\gamma_j \rho_1 \dfrac{\sigma_1}{\sigma_v} \delta(-\frac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) & \text{gdy } \xi_j^{(1)} \in W \backslash X^{(1)} \\ \beta_j^{(1)} & \text{gdy } \xi_j^{(1)} \in X^{(1)} \backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j^{(1)} \in X^{(1)} \cap W, \end{cases} \tag{43}$$

$$\frac{\partial E(y_{1i}|\mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}^{(1)}} = \begin{cases} \gamma_j \dfrac{\sigma_1}{\sigma_v} \varphi(\frac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) \left(\dfrac{\mathbf{X}_i^{(1)} \boldsymbol{\beta}^{(1)}}{\sigma_1} - \rho_1 \dfrac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v} \right) & \text{gdy } \xi_j^{(1)} \in W \backslash X^{(1)} \\ \beta_j^{(1)} \Phi(\frac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) & \text{gdy } \xi_j^{(1)} \in X^{(1)} \backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j^{(1)} \in W \cap X^{(1)}. \end{cases} \tag{44}$$

- Wpływy krańcowe zmiennej $\xi_j^{(2)}$ na zmienną Y_2 wynoszą:

$$\frac{\partial E(y_{2i}|z_i = 0, \mathbf{X}_i, \mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}^{(2)}} = \begin{cases} -\gamma_j \rho_2 \dfrac{\sigma_2}{\sigma_v} \delta(\frac{\mathbf{W}_i \boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) & \text{gdy } \xi_j^{(2)} \in W \backslash X^{(2)} \\ \beta_j^{(2)} & \text{gdy } \xi_j^{(2)} \in X^{(2)} \backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j^{(2)} \in X^{(2)} \cap W, \end{cases} \tag{45}$$

$$\frac{\partial E(y_{2i}|\mathbf{X}_i,\mathbf{W}_i)}{\partial \xi_{ji}^{(2)}} =$$
$$= \begin{cases} -\gamma_j \dfrac{\sigma_2}{\sigma_v}\varphi(\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v})\left(\dfrac{\mathbf{X}_i^{(2)}\boldsymbol{\beta}^{(2)}}{\sigma_2} - \rho_2\dfrac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}\right) & \text{gdy } \xi_j^{(2)} \in W\backslash X^{(2)} \\ \beta_j^{(2)}\Phi(-\frac{\mathbf{W}_i\boldsymbol{\gamma}}{\sigma_v}) & \text{gdy } \xi_j^{(2)} \in X^{(2)}\backslash W \\ \text{suma} & \text{gdy } \xi_j^{(2)} \in X^{(2)} \cap W. \end{cases} \tag{46}$$

Jeśli j−ta zmienna objaśniająca jest zmienną binarną, wpływy krańcowe wyznacza się jako odpowiednie różnice, analogicznie jak przy zaprezentowanych wcześniejszych modelach.

W modelu tobitowym typu V oraz zmodyfikowanym modelu tobitowym typu V wzory służące do oceny wpływu zmiennych objaśniających $\xi_j^{(1)}$ lub $\xi_j^{(2)}$ na zmienne Y_1 lub Y_2, odpowiednio, są takie same, jak w modelu tobitowym typu IV (por. wzory (43)–(46)), z podstawieniem $\sigma_v = 1$.

Odpowiednie wzory dla modelu tobitowego typu V o zmodyfikowanym kryterium obserwowalności można uzyskać na podstawie wzoru (39) dla zmodyfikowanego modelu tobitowego typu II, uwzględniając cenzurowanie prawostronne przy wyznaczaniu wpływów krańcowych na zmienną Y_2, tzn. zmieniając znak przy parametrach $\boldsymbol{\gamma}$ oraz współczynniku korelacji ρ_2 na przeciwny.

Podobnie w modelu tobitowym typu V (oraz jego zmodyfikowanej wersji) przy założeniu heteroskedastyczności[16] składników losowych w równaniach regresji dla zmiennych Y_1 oraz zmiennej Y_2 należy postępować, jak w modelu tobitowym typu II (oraz jego modyfikacji) przy założeniu heteroskedastyczności. W modelu tobitowym typu V z heteroskedastycznym składnikiem losowym w celu wyznaczania wpływów krańcowych zmiennych objaśniających na zmienną Y_1 należy zastosować bezpośrednio wzory (35)–(38) (w zmodyfikowanym modelu – wzór (40)), zaś na zmienną Y_2 – przed zastosowaniem wzorów należy zmienić znak parametrów $\boldsymbol{\gamma}$ oraz współczynnika korelacji ρ_2 na przeciwny.

5. PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

W celu ilustracji dotychczasowych rozważań, poniżej zaprezentowano przykład zastosowania jednego z omawianych modeli, przedstawiono porównanie oszacowanych parametrów i wyliczonych wpływów krańcowych zmiennych objaśniających.

Analizę zwrócono w kierunku poszukiwania modelu poprawnie opisującego tygodniową liczbę godzin pracy zamężnych kobiet (zmienna zależna) z uwzględnieniem czynników wpływających na decyzję o podjęciu zatrudnienia. Podstawą badania były dane indywidualne pochodzące z BAEL prowadzonego co kwartał przez GUS. Analizowana próba obejmowała 5183 zamężnych kobiet w Polsce w I kwartale 2009 r.

[16] Postać heteroskedastycznego modelu tobitowego typu V można znaleźć np. w pracy [18].

Tygodniowy czas pracy zamężnych kobiet, zgodnie z definicją BAEL, jest dodatni tylko dla kobiet pracujących, natomiast dla kobiet bezrobotnych lub biernych zawodowo wynosi zero godzin. W próbie zamężnych kobiet dla 50,138% obserwacji w I kwartale 2009 roku wartości omawianej zmiennej były dodatnie. Dla pozostałych obserwacji odnotowano wartość zero. Tak duża reprezentacja wartości zerowych nie pozwala na ich odrzucenie i zastosowanie np. modelu regresji wielorakiej bez konsekwencji w postaci błędnie oszacowanych parametrów modelu. Ponadto to czy zamężne kobiety posiadały pracę czy jej nie posiadały nie jest losowe – było zależne od pewnych cech (zmiennych) opisujących te kobiety. Zmienna odzwierciedlająca tygodniową liczbę godzin pracy zamężnych kobiet pracujących jest zatem zmienną podlegającą selekcji (tutaj cenzurowanej). Przy jej opisie trzeba uwzględnić czynniki determinujące wybór przynależności do grupy pracujących lub do grupy nie posiadających pracy. Do opisu takiej zmiennej zależnej sięgnięto po model tobitowy typu II dany wzorem (3) przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego w multiplikatywnej postaci opisanej wzorem (8). Parametry modelu oszacowano metodą największej wiarygodności. Obliczenia wykonano w środowisku NLogit 9.0, przy czym korzystano z samodzielnie napisanych procedur wyznaczających wpływy krańcowe.

Poniżej zamieszczono wybrane fragmenty analizy tygodniowego czasu pracy zamężnych kobiet w Polsce przeprowadzonego przez autorkę artykułu w rozprawie doktorskiej (por. [19]). Omówiono wpływ na tygodniowy czas pracy zamężnych kobiet w badanym okresie następujących (wybranych) zmiennych objaśniających odzwierciedlających:

– wiek respondentki ze względu na ekonomiczne grupy wieku (produkcyjny mobilny lub młodszy: do 44 lat, produkcyjny niemobilny: 45–59 lat, poprodukcyjny: 60+ lat);

– poziom wykształcenia respondentki;

– sektor ekonomiczny instytucji będącej głównym miejscem pracy respondentki (rolniczy, przemysłowy, usługowy);

– wymiar czasu pracy (niepełny/pełny);

– wykonywanie pracy dodatkowej poza głównym miejscem pracy;

– rodzaj wykonywanej pracy (pracujący najemnie, na własny rachunek, jako pomagający nieodpłatnie członek rodziny).

Jak wspomniano w analizie uwzględniono także inne zmienne, jednak ze względu na ograniczone miejsce nie omówiono ich w niniejszym artykule (por. [19]).

W tabeli 1 zestawiono oszacowane parametry modelu tobitowego typu II przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego oraz wyznaczone wpływy krańcowe wybranych zmiennych objaśniających korzystając ze wzorów (35) oraz (37). Zastosowany model tobitowy typu II przy założeniu heteroskedastyczności składnika losowego składa się z trzech równań: równania selekcji (uczestnictwa), równania regresji oraz równania wariancji. W każdym z równań oszacowano parametry oraz wpływy krańcowe zmiennych objaśniających. W poszczególnych równaniach nie muszą występować te same zmienne i niekoniecznie te same zmienne będą statystycznie istotne.

Tabela 1.

Oszacowane parametry (w nawiasach podano błędy szacunku) oraz wpływy krańcowe pośrednie, bezpośrednie i łączne w modelu tobitowym typu II z heteroskedastycznym składnikiem losowym dla I kwartału 2009 r. – wybrane zmienne

Zmienna:	Równanie selekcji		Eównanie regresji		Równanie wariancji		Wpływ łączny
	Oszac. parametr	Wpływ pośredni	Oszac. parametr	Wpływ bezpośredni	Oszac. parametr	Wpływ pośredni	
sektor przemysłowy	×	×	7,400 (0,747)	7,400	×	×	7,400
sektor usługowy	×	×	7,663 (1,775)	7,663	×	×	7,663
pełny wymiar czasu pracy	×	×	17,211 (1,840)	17,211	×	×	17,211
rodzaj wyk. pracy: własny rachunek	×	×	4,404 (0,732)	4,404	×	×	4,404
rodzaj wyk. pracy: pomagający członek rodziny	×	×	4,377 (0,774)	4,377	×	×	4,377
wiek 45–59 lat	-0,117 (0,041)	-0,773	×	×	×	×	-0,773
wiek 60+ lat	-0,397 (0,062)	-2,689	2,798 (1,008)	2,798	×	×	0,109
wykształcenie wyższe[17]	0,344 (0,054)	2,178	-5,644 (0,869)	-5,644	0,152 (0,022)	-0,284	-5,008
praca dodatkowa	×	×	8,195 (0,747)	8,195	0,198 (0,027)	-0,386	7,809

Uwaga: znakiem × oznaczono zmienne statystycznie nieistotne lub nieujęte w danym równaniu modelu.

Źródło: obliczenia własne na podstawie danych BAEL (GUS) dla I kwartału 2009 roku.

Warto przyjrzeć się otrzymanym wynikom. Po pierwsze niekiedy oszacowania wpływów krańcowych są takie same jak parametrów (zob. pięć pierwszych zmiennych w tab. 1). Uwaga ta dotyczy tych zmiennych objaśniających, które występują tylko w równaniu regresji zastosowanego modelu i jest zgodna ze wzorami (35) oraz (37). Zatem wpływ zmiennych odzwierciedlających rodzaj sektora ekonomicznego, wymiar czasu pracy oraz reprezentujących rodzaj wykonywanej pracy na tygodniową liczbę godzin pracy zamężnych kobiet wyznaczony jest za pomocą oszacowanego parametru modelu. W I kwartale 2009 r. zmiana głównego miejsca pracy z sektora rolniczego (kategoria przyjęta jako bazowa) na sektor przemysłowy lub usługowy przeciętnie wiązała się ze zwiększeniem tygodniowego czasu pracy zamężnych kobiet o około 7,5 godz. (7,400 godz. oraz 7,663 godz., odpowiednio). Przejście z niepełnego na pełen wymiar

[17] Rozważono wykształcenie w następujących kategoriach: wykształcenie wyższe (licencjat, inżynier, magister i wyższe); policealne lub średnie zawodowe; średnie ogólnokształcące; zasadnicze zawodowe; gimnazjum, podstawowe, niepełne podstawowe i bez wykształcenia. Wykształcenie na poziomie gimnazjum lub niższym przyjęto jako kategorię bazową. W tab. 1 ujęto tylko wykształcenie wyższe. Pozostałe warianty zmiennej były statystycznie nieistotne, stąd nie przytoczono ich w tabeli.

czasu pracy skutkowało przeciętnie wydłużeniem czasu pracy o około 17 godz. (17,211 godz.). Wykonywanie pracy na własny rachunek lub w charakterze nieodpłatnie pomagającego członka rodziny, w porównaniu do pracujących najemnie (kategoria przyjęta jako bazowa), powodowało przeciętnie zwiększenie liczby godzin pracy o około 4,5 godz. (4,404 godz. oraz 4,337 godz., odpowiednio).

Jednakże, jeśli zmienna objaśniająca występuje także w równaniu selekcji lub równaniu wariancji, wówczas oszacowany łączny wpływ krańcowy tej zmiennej na ogół nie jest równy oszacowanemu parametrowi. Przykładowo zmiana wykształcenia z podstawowego (przyjętego jako kategoria bazowa) na wykształcenie na poziomie wyższym powodowała przeciętnie zmniejszenie tygodniowej liczby godzin pracy zamężnych kobiet o około 5 godz. (-5,008 godz.). Przy czym trzeba zauważyć, że za pośrednictwem równania selekcji zmienna ta wpływała na czas pracy dodatnio (2,178 godz.). Fakt ten można interpretować w następujący sposób: podniesienie wykształcenia do wykształcenia na poziomie wyższym wpływało na zwiększenie długości tygodniowego czasu pracy kobiet poprzez zwiększenie prawdopodobieństwa podjęcia pracy (przynależności do grupy pracujących), o czym mówi dodatni znak oszacowanego parametru w równaniu selekcji. W równaniu regresji oszacowany parametr i bezpośredni wpływ krańcowy tej zmiennej był taki sam (-5,644 godz.), lecz łączny wpływ zmiany na wykształcenie na poziomie wyższym na długość tygodniowego czasu pracy został skorygowany przez uwzględnienie równania selekcji oraz równania wariancji. Należy także zwrócić uwagę na znaczne różnice w oszacowaniach parametrów w tych równaniach oraz wpływów krańcowych za ich pośrednictwem (0,334 i 2,178 w równaniu selekcji, 0,152 i -0,284 w równaniu wariancji, por. tab. 1). Różnice te wskazują na skalę błędów w wypadku interpretacji bezpośrednio parametrów modelu, zamiast wpływów krańcowych.

Pozostałe zmienne wpływały na tygodniowy czas pracy kobiet w następujący sposób. Zmienna reprezentująca kobiety w wieku produkcyjnym niemobilnym (45–59 lat) była statystycznie istotna tylko w równaniu selekcji i jej wpływ na tygodniowy czas pracy był ujemny, niewielki. Ujemny znak oszacowanego parametru wskazuje na ujemny wpływ tej zmiennej na prawdopodobieństwo przynależności do grupy pracujących w porównaniu do kobiet w wieku produkcyjnym mobilnym (do 44 lat, kategoria przyjęta za bazową).

Podobnie sytuacja przedstawiała się w grupie kobiet w wieku poprodukcyjnym (60+ lat), przy czym ujemny wpływ tej zmiennej na tygodniowy czas pracy zamężnych kobiet za pośrednictwem równania selekcji był większy (-2,689 godz.). Wpływ ten był równoważony dodatnim wpływem tej zmiennej wynikającym z równania regresji (2,798 godz.) i w rezultacie łączny jej wpływ na czas pracy był niewielki (0,109 godz.).

Podjęcie dodatkowej pracy poza głównym miejscem pracy przyczyniało się przeciętnie do zwiększenia tygodniowego czasu pracy zamężnych kobiet o około 8 godz. (7,809 godz.). Zmienna ta występowała w równaniach regresji i wariancji.

W modelach zmiennej zależnej cenzurowanej oprócz parametrów modelu estymuje się także odchylenie standardowe składnika resztowego modelu regresji oraz współczynnik korelacji między składnikami losowymi równania selekcji i równania regresji. W zastosowanym modelu tobitowym typu II przy założonej heteroskedastyczności składnika losowego estymator stałej multiplikatywnej w równaniu wariancji wynosił 11,175, natomiast estymator współczynnika korelacji: -0,778. Ponieważ współczynnik korelacji był ujemny, znak oszacowanych wpływów krańcowych i parametrów w równaniu selekcji był taki sam, zaś w równaniu wariancji – przeciwny (por. wzory (30) i (35)). Statystyczna istotność współczynnika korelacji wskazała na konieczność stosowania modelu tobitowego typu II (statystyczna nieistotność współczynnika korelacji oznaczałaby, że wystarczy zastosować model regresji wielorakiej do opisu zagadnienia).

6. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono wzory umożliwiające poprawną interpretację wyników otrzymanych za pomocą wybranych modeli tobitowych. Niektóre z modeli rozważono w wersji o zmodyfikowanym kryterium obserwowalności lub przy dopuszczeniu heteroskedastyczności składnika losowego. W omawianych modelach wpływ krańcowy na ogół nie jest równy parametrowi odpowiadającemu zmiennej objaśniającej, której wpływ na badane zjawisko (zmienną zależną) jest analizowany. Ponadto należy uwzględnić czy zmienna objaśniająca, której wpływ na analizowane zjawisko jest badany, jest zmienną binarną (ogólnie dyskretną) czy ciągłą.

Przedstawiony przykład zastosowania modelu tobitowego typu II jako jednego z rodziny modeli zmiennej zależnej cenzurowanej ilustruje, w jaki sposób interpretuje się oszacowane wpływy krańcowe zmiennych objaśniających w omawianych modelach. Wskazuje także na różnice w wartościach oszacowanych parametrów i łącznych wpływów krańcowych poszczególnych zmiennych objaśniających.

Stosując modele z rodziny tobitowych należy posłużyć się odpowiednim oprogramowaniem. Trzeba zwrócić uwagę, czy wykorzystywany program wyznacza tylko parametry modelu czy także potrzebne do interpretacji wpływy krańcowe. Dobrym rozwiązaniem jest sięgnięcie po programy, które pozwalają na samodzielne zapisanie procedur zgodnie z zaprezentowanymi w artykule wzorami na wpływy krańcowe w poszczególnych modelach z rodziny tobitowych (np. NLogit, Gauss, R). Wówczas można mieć pewność, że otrzymane wyniki pozwolą na poprawną interpretację analizowanego zagadnienia.

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

LITERATURA

[1] Amemiya T. (1984), *Tobit Models: A survey*, Journal of Econometrics, vol. 24, s. 3-61.

[2] Flood L., Gråsjö U. (1998), *Regression Analysis and Time Use Data: A Comparison of Microeconometric Approaches with Data from the Swedish Time Use Survey (HUS)*, Working Papers in Economics, nr 5, School of Economics and Commercial Law, Göteborg University.

[3] Greene W. (1999), *Marginal Effects in the Censored Regression Model*, Econometrics Letters, nr 1(64).

[4] Greene W. (2003), *Econometric Analysis*, 5th ed., Prentice-Hall, Inc, New Jersey.

[5] Gruszczyński M. (2002), *Modele i prognozy zmiennych jakościowych w finansach i bankowości*, wyd. 2, Monografie i Opracowania 490, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.

[6] Heckman J. (1974), *Shadow Prices, Market Wages, and Labor Supply*, Econommertica, vol. 42, nr 4, s. 679–694.

[7] Heckman J. (1976), *The Common Structure of Statistical Models of Truncation, Sample Selection and Limited Dependent Variables and a Simple Estimator for Such Models*, Annals of Economic and Social Measurement, nr 5/4, 1976, s. 475–492.

[8] Heckman J. (1979), *Sample Selection Bias as a Specification Error*, Econometrica, vol. 47, nr 1, s. 153-161.

[9] Heckman J. (1987), *Selection Bias and Self-Selection* [w:] *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, vol. 1-4, pod red. J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, Macmillan Press, London, s. 287-297.

[10] Heckman J. (1990), *Varieties of Selection Bias*, American Economic Review, 80, s. 313-318.

[11] Heckman J. (2003), *Microdata, Heterogeneity and the Evaluation of Public Policy* [w:] *Nobel Lectures in Economic Sciences 1996 – 2000*, T. Persson (ed.), World Scientific Publishing Co., Singapore, s. 255-322.

[12] Jones A.M. (1989), *A Double-Hurdle Model of Cigarette Consumption*, Journal of Applied Econometrics, vol. 4, s. 23-39.

[13] Jones A.M. (1992), *A Note on Computation of the Double-Hurdle Model with Dependence with an Application to Tobaco Expenditure*, Bulletin of Economic Research, vol. 44, nr 1, s. 67-74.

[14] Kostrzewska J. (2003), *Model tobitowy jako szczególny przypadek cenzurowanego modelu regresji* [w:] *Przestrzenno–czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, pod red. A. Zeliasia, Wyd. AE w Krakowie, Kraków, s. 397-404.

[15] Kostrzewska J. (2004), *Model regresji dla danych dobieranych do próby według nielosowego kryterium*, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie, nr 666, Prace z zakresu prognozowania, Kraków, s. 111-117.

[16] Kostrzewska J. (2008), *Zastosowanie wybranych modeli tobitowych do opisu tygodniowej liczby godzin pracy* [w:] *Taksonomia 15. Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*, pod red. K. Jajugi i M. Walesiaka, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław.

[17] Kostrzewska J. (2009), *Truncated and Censored Dependent Variables and Their Models* [w:] *Statistical Analysis of the Economic and Social Consequences of Transition Processes in Central-East European Countries*, ed. by J. Pociecha, Studia i Prace UEK, nr 6, UEK, Kraków.

[18] Kostrzewska J. (2011), *Analiza porównawcza tygodniowego czasu pracy zamężnych kobiet pracujących na własny rachunek lub najemnie*, [w:] *Osiągnięcia i perspektywy modelowania i prognozowania zjawisk społeczno-gospodarczych*, pod red. B. Pawełek, Wyd. UEK, Kraków.

[19] Kostrzewska J. (2011), *Modele regresji zmiennych cenzurowanych w analizie rynku pracy w Polsce*, manuskrypt, UEK, Kraków.

[20] Maddala G.S. (1987), *Censored Data Models* [w:] *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, ed. by J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, Macmillan Press, London, vol. 1, s. 384-385.

[21] Maddala G.S. (1994), *Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge (pierwsze wyd. w 1983 roku).

[22] McDonald J.F., Moffitt R.A. (1980), *The Uses of Tobit Analysis*, Review of Economics and Statistics, vol. LXII, s. 318-321.

[23] Roneck D.W. (1992), *Learning More from Tobit Coefficients: Extending a Comparative Analysis of Political Protests*, American Sociological Review, vol. 57, nr 4, s. 503-507.

[24] Tobin J. (1958), *Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables*, Econometrica, vol. 26, s. 24-36.

INTERPRETACJA W MODELACH TOBITOWYCH

S t r e s z c z e n i e

W artykule krótko scharakteryzowano wybrane modele tobitowe zgodnie z klasyfikacja zaproponowaną przez T. Amemiyę ([1]), następnie zaprezentowano postaci wartości oczekiwanych dla poszczególnych modeli oraz wyznaczono wpływy krańcowe. Ze względu na specyfikę omawianych modeli wpływy krańcowe w ogólnym przypadku nie są równe odpowiednim parametrom. Zatem w celu uzyskania poprawnej interpretacji należy wyznaczyć pochodne cząstkowe z odpowiednich (warunkowych) wartości oczekiwanych zmiennej zależnej. Ponadto w artykule zwrócono uwagę na fakt, że wpływy krańcowe binarnych zmiennych objaśniających są inne niż ciągłych.

AN INTERPRETATION IN THE TOBIT MODELS

S u m m a r y

At first the tobit models according to T. Amemiya's classification ([1]) are presented in the paper. Next, expected values and marginal effects in these models are obtained. In the tobit models marginal effects are not equal to coefficients of the model in general. To get a proper interpretation in the considered models, it is necessary to obtain marginal effects as a partial deviation of the expected values. Moreover, marginal effects are different for binary and continuous variables.