

Zdzisław W. Trzaska

O konsekwencjach prymatu matematyki w procesach poznawania i kreowania rzeczywistości

Autor przedstawia pewne aspekty kwestii granicy między twórczym i destrukcyjnym wpływem matematyki na współczesny stan nauk przyrodniczych oraz technologii, a także na inne dziedziny aktywności człowieka, np. zarządzanie, ekonomię, psychologię, klimatologię. Biorąc pod uwagę rozwój nauki w dziejach ludzkości i różnorodność metod stosowanych do poznania świata rzeczywistego, wypukła dominującą rolę matematyki w procesie doskonalenia narzędzi poznawczych oraz w interpretacji uzyskiwanych wyników eksperymentalnych. Wskazuje na penetrację coraz to nowszych dziedzin wiedzy i obszarów aktywności człowieka przez matematykę oraz podejmuje próbę wyjaśnienia tego stanu rzeczy. Poddaje szczegółowej analizie wpływ intensywnego sprzężenia zwrotnego w układzie matematyka–technologia, które nastąpiło w drugiej połowie XX wieku w wyniku postępu w technologiach półprzewodnikowych oraz inżynierii materiałowej. Analizuje związki matematyki z wieloma dziedzinami nauki oraz formuluje tezę o potrzebie podjęcia wnikliwych badań w celu wyjaśnienia dostrzegalnego obecnie coraz szybszego „marszu matematyki” na niwy naukowe dotąd całkowicie na nią odporne. Ów „marsz matematyki” uważany jest za irracjonalny i wciąż stanowi ogromną tajemnicę naukową. W artykule przedstawione są też zagadnienia związane z procesami chaotycznymi oraz strukturami fraktalnymi, które matematycy próbują od kilku dziesięcioleci wprowadzać do opisu układów rzeczywistych. Integralną część przedstawionych analiz stanowią problemy związane ze sztuczną inteligencją oraz tendencją do istotnych przemian w podejściu współczesnej nauki do celowości prowadzenia dalszych badań nad tymi zagadnieniami. Nacisk został położony na słaby stosunkowo postęp w tej dziedzinie mimo poważnych nakładów finansowych poniesionych dotychczas na jej rozwój. Autor podejmuje również próbę oceny alternatywnej metody poznania świata rzeczywistego bez intensywnego stosowania matematyki, a także sygnalizuje problem tzw. bomby I.

*I hear and I forget.
I see and I remember.
I do and I understand.
(Słyszę i zapominam.
Widzę i pamiętam.
Robię i rozumiem)*

Konfucjusz

Wprowadzenie

Początek XXI wieku, a zarazem próg nowego tysiąclecia, stanowi dobrą okazję do retrospekcji oraz zadumy nad czynnikami wpływającymi decydująco na dzieje świata i ludzkości, a zwłaszcza na rozwój kultury i nauki. W niniejszym artykule podejmę próbę opisu pewnego stanu faktycznego, z którym ludzkość weszła w obecne tysiąclecie – irracjonalnego wpływu matematyki na poznawanie i kreowanie rzeczywistości. Przedstawienie tych problemów nie ma znamion pracy o charakterze filozoficznym i nie zawiera zagadnień dotyczących *sensu stricto* poglądu na świat i miejsce człowieka na świecie. Główną uwagę skupię na istotnych przyczynach, które spowodowały taki a nie inny stan rzeczy, na ocenie sytuacji obecnej oraz na pewnych przewidywaniach tendencji możliwego rozwoju przedmiotowego zagadnienia. Zamiast wnikać w ścisłe definicje, twierdzenia i dowody, będę się starał „prześledzić” rozwój i miejsce oraz skutki tej nauki tajemnej, jaką jest matematyka dla niematematyków, biorąc pod uwagę możliwie długi przedział czasu w dziejach aktywności człowieka.

Dodatkową inspiracją do przygotowania tego artykułu była pewna osobista refleksja – jakkolwiek byłaby ona niedoskonała – i niepokój związany z coraz większą dominacją matematyki w wielu dziedzinach nauki, w tym także w naukach technicznych, które tradycyjnie wywodzą się z fizyki i dotąd były mocno powiązane z eksperymentami oraz odpowiednimi konstrukcjami praktycznymi. Uwidacznia się to również bardzo wyraźnie w wielu dyscyplinach w obszarze nauk przyrodniczych, i to zarówno w publikacjach, jak i w realizacji procesu kształcenia w szkołach wyższych (dyskusja nad profilem kształcenia na poziomie wyższym, którą prowadzono przez kilka ubiegłych lat, w wielu uczelniach technicznych została zredukowana głównie do odpowiedzi na pytanie: jedno- czy wielostopniowe studia wyższe?). Wymienione wyżej problemy można obecnie oceniać już jako klasyczne w świetle tego, że są one podejmowane niemal przez każde pokolenie, z różnym nasileniem oraz zróżnicowaną głębią zakresu dyskusji, a także proponowanych rozwiązań. Zazwyczaj taka dyskusja osiąga apogeum wkrótce po przesileniach społeczno-ustrojowych w państwie lub w układzie stowarzyszeniowym, a następnie – po przyjęciu programu w lepszej lub gorszej formie – jest on realizowany bez większych zmian przez wiele lat, a nawet dziesięcioleci. Jednak badając przedmiotowe zagadnienie wieloaspektowo, dochodzimy w efekcie do potrzeby odpowiedzenia sobie na wiele pytań podnoszących szersze, a zarazem pogłębione jego usytuowanie na tle działalności człowieka na przestrzeni dziejów (por. Bell 1945; Bochner 1966; Brown, Porter 1990).

Znaczenie nauki

Jednym z najbardziej zdumiewających przejawów nauki jest to, że potrafi ona udzielać powszechnie akceptowalnych odpowiedzi na wiele zadawanych przez siebie pytań. Aby działać mądrze i wystrzegać się wyrządzenia krzywdy szeroko rozumianemu środowisku naturalnemu, naukowcy są wyposażeni przez naturę w systemy wewnętrzne sterujące ich aktywność w uczestniczeniu we właściwym człowiekowi poszukiwaniu porządku świata i pragnienie do zrozumienia świata materialnego, ale ich odkrycia dają coraz większą możliwość czynienia nie tylko dobra, ale także zła.

Nauka wyposażała ludzkość w ogromne możliwości działania, ale ponieważ jednocześnie nie dała jej mądrości, to świat stoi obecnie w obliczu katastrof ekologicznych i potencjalnej zagłady militarnej, znacznej degradacji środowiska społecznego, kulturowego i duchowego, dla których katalizatorem stał się rozwój techniki. Aczkolwiek odkrycia naukowe z jednej strony przedstawiają częstokroć bezcenne wartości i wywołują cudowne uczucia olśnienia, to z drugiej strony cała nauka nie jest w stanie zaspokoić głodu zrozumienia wszechświata, które stanowi naturalne pragnienie każdego naukowca. Dzieje się tak dlatego, że dogłębny opis świata musi być wystarczająco bogaty, a to oznacza, że musi mieć odpowiednio zwartą strukturę i być dostatecznie racjonalny, aby mógł obejmować całą złożoność ludzkiego kontaktu z rzeczywistością. Sama istota nauki – która jest wynikiem działania człowieka, poszczególnych naukowców lub zespołów naukowych, obdarzonych trudnymi do sprecyzowania zdolnościami, określanymi mianem wyobraźni twórczej – sprawia, że ludzie postrzegają naukę jako prawdziwe poznanie, a często też jako jedyną rzeczywistą wiedzę. Takiej jednoznaczności nie można przypisać zarówno teraz, jak i w najbliższej przyszłości, innym dziedzinom ludzkiej aktywności, takim jak religia, etyka i polityka. Dlatego też doświadcza się powszechnie bezkrytycznej idealizacji nauki, czyli przeświadczenia, że jest ona jedynym i niekwestionowanym źródłem tego, co w ogóle możemy wiedzieć o naturze rzeczywistości. Dlatego też ludzie, którzy dążą do tego, by ich przekonania o tym, co dzieje się w świecie opierały się na solidnych podstawach, tzn. na faktach, powinni zaufać wyłącznie nauce, natomiast wystrzegać się wszelkich zdradliwych obszarów czystych spekulacji, które ją otaczają. Takie postawy narażone są często na krytykę, która opiera się na tym, że nauce jak dotąd nie udało się doprowadzić do zaspokojenia podstawowych potrzeb (zarówno materialnych, jak i kulturowych) całej ludzkości oraz ochronić jej przed głodem powodowanym brakiem żywności, miejscowymi kataklizmami i dolegliwymi, a częstokroć wyniszczającymi chorobami. Odrzucenie – skądinąd uważanego przez wielu za słuszne – twierdzenia, że nauka jest wszystkim, czyli tzw. scjentyzmu, dostarczającego bardzo zubożonego opisu rzeczywistości, narażone jest na pokusę zakwestionowania samej nauki. Jednak w obszarze działań, których granice są dostatecznie ściśle respektowane, nauka ma wiele do powiedzenia i powinno to być powszechnie przyjmowane z najwyższą powagą.

Na ogół nauka ogranicza się do zjawisk powtarzalnych, które mogą być sprawdzane na drodze eksperymentalnej. Nawet takie dziedziny nauki jak kosmologia czy ewolucja biologiczna, których przedmiotem jest zjawisko jednorazowe, pojedyncze, a zatem których metoda ma bardziej charakter obserwacji niż eksperymentu, w swych możliwościach wyjaśniania zależą w bardzo dużym stopniu od wyników i pojęć nauk eksperymentalnych (jak fizyka czy genetyka), pozostających z nimi w związku.

W opisie świata i dowodzeniu praw nim rządzących nauka posługuje się bardzo skutecznym narzędziem – rozumem, formalizmem logiczno-matematycznym. Interesuje się ona wszystkim, co daje się zweryfikować; formułuje hipotezy, a następnie je weryfikuje, potwierdzając lub obalając. Nauka postępuje drogą kolejnych przybliżeń, zgadzając się zawsze na zakwestionowanie prawd zarazem cząstkowych i przemijających. Wysiłki naukowe objaśniają nam, co można uczynić, jakimi środkami dysponujemy, o co toczy się gra i z jakim ryzykiem.

Czasy, w których żyjemy, charakteryzują wielkie wyzwania: rewolucja w nauce i w stosunkach społecznych, relatywizacja norm moralnych i zasad etycznych powodują rozpad starych form i poszerzenie świadomości, włączanie bardziej wszechstronnego kontekstu egzystencjalnego, a jednocześnie ujawniają się coraz silniejsze tendencje w kierunku bardziej twórczego życia nie tylko przez poszczególne jednostki, ale też całe społeczności ludzkie. Coraz częściej i wyraźniej postuluje się potrzebę zbliżenia nauki i sztuki, interdyscyplinarnych działań, integrujących widzenie świata i człowieka, a także celowość położenia nacisku na rozwijanie potencjału ludzkiego. Zwracana jest też uwaga na konieczność budowania solidnych łączników między doświadczeniem wewnętrznym i potrzebami duchowymi człowieka, w celu poszukiwania doskonalszych wartości oraz większej harmonii z otaczającym go środowiskiem.

W końcu XX wieku ukształtował się powszechnie akceptowany pogląd, że zarówno metody stosowane w nauce, jak i jej osiągnięcia są czymś znacznie bardziej skomplikowanym, niż to się na pozór wydaje. Niestychnym uproszczeniem jest zwłaszcza przekonanie, że poprzez precyzyjne przewidywanie teoretyczne, które następnie uzyskuje niepodważalne potwierdzenie doświadczalne, dochodzi się do prawdy. Na takiej drodze napotyka się bowiem wiele ograniczeń, które zazwyczaj komplikują interpretację uzyskanych wyników. Jedną z przyczyn takich okoliczności jest niemożliwość wyraźnego rozgraniczenia między teorią a doświadczeniem, co powoduje, że w rzeczywistości nie daje się porównać jednego z drugim. Jest to uwarunkowane tym, że w procesie naukowego zdobywania interpretacji wyników doświadczenia, teoria i eksperyment są ze sobą nierozzerwalnie splecione. Drugą przyczyną wynika z faktu, że choć teoria jest w nauce niezbędna, to jednak dane określają ją zawsze niedostatecznie. Zauważmy, że w eksperymentalnym badaniu zdarzeń naturalnych spotykamy się z danym zjawiskiem ze zrozumiałych względów tylko w ograniczonym stopniu, podczas gdy teorie powinny obejmować w kategoriach ogólnych to wszystko, co się dzieje zawsze i wszędzie. Następną przyczyną wynika z braku klarowności naszego postrzegania danego środowiska i niejednoznaczności kontaktów człowieka ze światem fizycznym. Biorąc pod uwagę realistyczny, pozbawiony upiększeń portret nauki, coraz trudniej przychodzi przyznawanie jej wyjątkowego statusu jedynej i do końca wiarygodnego źródła ludzkiej wiedzy. Każdy realistyczny obraz świata musi być znacznie bardziej zróżnicowany, niż to wynika z wniosków naukowych. Stąd też nasuwają się doniosłe pytania: Czy i jak można należycie ocenić osiągnięcia nauki? Czy w postępowaniu, jakie stosuje nauka w celu dokonania tych osiągnięć można dostrzec jakieś szczególnie istotne cechy i prawidłowości? Co nauka odkrywa i jak dochodzi do swoich odkryć?

Matematyka jako pośrednik między duchem i materią

Prawdziwy opis świata powinien przedstawiać treść dostatecznie bogatą, by człowiek mógł odnaleźć w nim samego siebie. Z pewnością jest rzeczą godną uwagi i znamioną, że istnieje możliwość zrozumienia świata oraz że to właśnie matematyka – najbardziej oszczędny i najbardziej abstrakcyjny twór ludzkiego umysłu – dostarcza klucza, który otwiera drzwi do tajemnic świata materialnego. Fizycy wielokrotnie stwierdzali, że teoria o największej zwięzłości i elegancji z matematycznego punktu widzenia – jednym słowem najbardziej estetyczna matematycznie – okazuje się w końcu najbardziej odpowiadać faktom. Dzięki matematyce powiększamy obszar naszej wiedzy, lepiej rozumiemy świat oraz to, w jakim stosunku pozostajemy do świata. Istnieje głęboka harmonia między strukturą naszego matematycznego myślenia a strukturą otaczającego nas świata. Niemniej prawdziwy badacz – częstokroć z trudem, a zawsze z niepokojem – stara się mieć racjonalne, ściśle i jasne podejście naukowe, w połączeniu z jak największą uczciwością intelektualną.

W obecnych czasach niemal każdy człowiek jest świadom tego, że chcąc zostać fizykiem, inżynierem, ekonomistą lub menedżerem, musi być dobry nie tylko w wybranej przez siebie specjalności zawodowej, ale także musi być dobrym matematykiem. Matematyka wkracza intensywnie do biologii, medycyny, towaroznawstwa, agrotechniki, handlu, klimatologii i lotnictwa. Jest także stosowana w naukach nazywanych tradycyjnie humanistycznymi (np. w psychologii czy językoznawstwie), czego dowodem są wydawane od wielu już lat czasopisma o tytułach „Mathematical Social Sciences” czy „Journal of Mathematical Psychology”. Za pomocą matematyki próbuje się opisywać różne stosunki międzyludzkie. Pod nazwą *kliometria* matematyka weszła już do takiej dziedziny wiedzy jaką jest historia, co stało się przyczyną pewnego szoku w dotychczasowym myśleniu tradycjonalistów. To sprawia, że rodzi się wiele pytań związanych z owym „marszem matematyki” na coraz to szersze, a często zupełnie nowe obszary wiedzy i poczynić człowieka. Wymieńmy tylko kilka z nich.

Dlaczego matematyka w swoim oddziaływaniu jest tak potężna? Czym ona się zajmuje? Co wnosi? Jaka jest jej natura? Jak jest tworzona i stosowana? Jaka jest jej metodologia? Jakie jest jej znaczenie dla poznania i kreowania rzeczywistości otaczającej człowieka? Są to przykładowe, a zarazem ważne pytania, które od wieków nurtują twórców z różnych dziedzin aktywności człowieka i wielu z nich starało się z dobrym skutkiem odpowiedzieć na niektóre z wymienionych i nie wymienionych tutaj pytań. Należy podkreślić, że odpowiedzi udzielali nie tylko najwybitniejsi filozofowie, lecz również sami przedni twórcy matematyki. Istotny wkład w tym zakresie poczyniło wielu światowej sławy matematyków, a wśród nich np. Salomon Bochner, Richard Courant, Johannes Kepler, Felix Klein, André Lichnerowicz, Marcel-Paul Schützenberger, Hermann Weyl, Eugene Paul Wigner czy Hugo Steinhaus (por. Courant, Robins 1998). Przedstawiają oni – uznając za fakt osobistą fascynację uprawianą przez siebie dyscypliną naukową – często intrygujący punkt widzenia na matematykę oraz na złożoność czynników, które określają jej strukturę i zastosowania. Ponadto wyjątkowej roli matematyki w działalności człowieka poświęcili wiele uwagi, jeszcze w czasach starożytnych, powszechnie znani wybitni filozofowie greccy (m.in. Pitagoras z Samos, Arystoteles ze Stagiry, Tales z Miletu), a w czasach nowożytnych m.in. Galileo Galilei (Galileusz), René Descartes (Kartezjusz), Baruch Spinoza, Gottfried Wilhelm Leibniz, Bertrand Russell, Martin Heidegger, Mieczysław Krąpiec. Podkreślenia wymaga to, że wykaz ten jest tylko przykładowy, gdyż

ze względu na ograniczone ramy tej publikacji nie jest możliwe w miarę ściśle wyszczególnienie wszystkich osiągnięć i wybitnych postaci, których udziałem jest doniosły wkład w badanie omawianego zagadnienia (por. Dyson 1964; Hilton 1973; Kline 1980).

Wraz z wynalezieniem komputera i nieoczekiwanym odkryciem, że matematyka ma wiele zastosowań w medycynie, biologii, klimatologii, ekonomii, muzyce, sporcie, logistyce, wojskowości oraz w innych dziedzinach wiedzy, a także w sztuce, napór matematyki na wiele nowych, a dotąd mało przez nią penetrowanych, obszarów aktywności człowieka systematycznie wzrasta. Jedną z przykładowych dziedzin, w których ten proces wyraźnie się uwidoczniła, jest tzw. sztuczna inteligencja. W porównywalnym czasie, dzięki rozwojowi informatyki i komputeryzacji, wyłoniona została również dynamicznie rozwijająca się dziedzina, w której podejmuje się badania zjawisk chaotycznych oraz układów fraktalnych. Coraz powszechniejszy staje się pogląd, że wszechświat został zniewolony przez matematykę. Ze względu na ten sukces matematyki ujawnia się obecnie tendencja do powszechnego matematyzowania każdej dziedziny wiedzy. Jest to cel do osiągnięcia jeśli nie teraz, to w najbliższej przyszłości.

Czym jest matematyka?

Odpowiedź na tak sformułowane pytanie nie jest ani łatwa, ani prosta. Nawet w słownikach specjalistycznych nie podaje się jednoznacznych określeń, a często uwypukla trudności definicyjne i w konsekwencji przytaczane są zazwyczaj opisy obszarów wiedzy, które obejmuje swym zakresem matematyka. Odchodząc nieznacznie od rygorystycznej ścisłości, można stwierdzić, że matematyka jest nauką o umiejętnościach przy użyciu pojęć i reguł ustalonych na jej potrzeby. Główny nacisk jest położony na definiowanie sensownych pojęć i posługiwanie się metodą dedukcyjną, która wymaga abstrahowania od większości cech indywidualnych rozważanych obiektów rzeczywistych, a dotyczące ich twierdzenia są prawdziwe zawsze i wszędzie. Nie jest ważne, czym są obiekty w matematyce, bo liczy się tylko to, co mogą one zrobić. Poprawność określeń stanowiących podstawę wprowadzanych pojęć jest następnie weryfikowana za pomocą umiejętności ich stosowania. Pewniki przyjmowane w matematyce są efektem procesu wyłącznie rozumowego lub też są sugerowane przez doświadczenie matematyka. Wówczas, raz ustalone, tworzą one podstawę, z której cała matematyka może być rozwijana samodzielnie, bez odwoływania się do eksperymentu fizycznego. Trudności definicyjne zazwyczaj znikają, gdy odniesiemy się do poszczególnych teorii matematycznych rozważanych jako zbiory tez (zwanych twierdzeniami), które dadzą się wydedukować za pomocą reguł wnioskowania i przyjętego układu aksjomatów. Ważnym czynnikiem postępu w matematyce jest tworzenie nowych pojęć, gdyż od trafnego ich sformułowania zależy w istotnej mierze dalszy jej rozwój. Duże znaczenie ma także interpretowanie jednej teorii matematycznej za pomocą drugiej, polegające na tłumaczeniu pojęć jednej z nich na język stosowany w drugiej, co wiąże rozmaite działy matematyki w jednolity twór i wielokrotnie efekty nowych odkryć, a wybór właściwej interpretacji przyczynia się często w znaczący sposób do rozwiązywania trudnych zagadnień. Obecnie proces wprowadzania i akceptowania nowych teorii, opartych na rachunku i fragmentach ścisłego rozumowania, przebiega bardzo szybko dzięki zwiększonemu krytycyzmowi, bogatszemu doświadczeniu naukowemu, a zwłaszcza wyraźnie dostrzeganemu działaniu w zakresie tworzenia nowych pojęć abstrakcyjnych.

Z tego względu można rozpatrywać matematykę jako samodzielną, a zarazem pełnowartościową wiedzę, bez odwoływania się do tego, co się dzieje w świecie rzeczywistym. Została ona stworzona przez człowieka i dlatego jest podatna na ciągłe ubogacanie jej przez niego. Często też przyjmuje się, że matematyka powstała ze względu na naturalną konieczność zaspokojenia estetycznych potrzeb człowieka (por. Pólya 1963).

Rola matematyki w fizyce i technologii

Chociaż, jak to zostało stwierdzone powyżej, matematyka może się rozwijać samoistnie, bez interesowania się tym, co się dzieje w świecie fizycznym, to podkreślenia wymaga jej znaczący rozwój powodowany naciskiem potrzeb zarówno fizyków, jak i technologów oraz inżynierów. Współczesny stan matematyki w niemałym stopniu jest efektem sprzężenia zwrotnego, które w naturalny sposób zostało wytworzone między nią a naukami stosowanymi. Tam, gdzie są dobre kontakty z matematykami, zazwyczaj pojawiają się sukcesy nie tylko w badaniu rzeczywistości, ale także w jej wykorzystywaniu do zaspokojenia różnorodnych potrzeb człowieka, i to zarówno intelektualnych, jak i materialnych. Mimo że teoretyczne i aksjomatyczne tendencje w matematyce jawią się jako jej najistotniejsze cechy charakterystyczne i wywierają ogromny wpływ na jej rozwój, to jednak należy wyraźnie podkreślić, że zastosowania i związki z rzeczywistością fizyczną odgrywają równie ważną rolę. Wyobrażenie sobie niektórych pojęć matematycznych jako czegoś istniejącego w rzeczywistości fizycznej na ogół pomaga zrozumieć te pojęcia. Osiągnięta spójność wewnętrzna, a przede wszystkim ogromne uproszczenie wyników z lepszego rozumienia matematyki, umożliwiła dzisiaj łatwiejsze opanowanie teorii bez stracenia z oczu jej zastosowań (por. Krąpiec 1995).

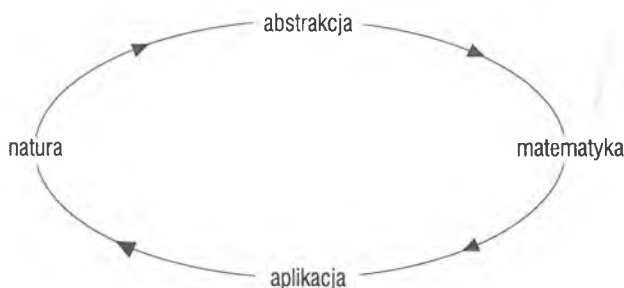
Świat otaczający człowieka jest nieskończenie złożony i jedną z zasadniczych reguł, która nim rządzi jest brak możliwości przewidzenia przyszłych zdarzeń oraz kierunków jego rozwoju. Wyraża się to w zasadzie: globalna przyszłość nie jest przewidywalna (por. Germinet 1999). Mimo tej przeogromnej złożoności wszechświata człowiekowi udaje się, od czasu do czasu, ustalić pewne regularne zjawiska, które w nim występują. Regularność odnosi się do tego, że ustalone kiedyś, nawet w odległej przeszłości, prawa rządzące danym zjawiskiem obowiązują nadal, i to niezależnie od miejsca na Ziemi. Wyraża to jedną z podstawowych własności zjawisk, zwaną inwariancją, bez której prawidłowy opis świata w ogóle nie byłby możliwy. Drugą istotną własnością regularności jest to, że na dane zjawisko nie ma wpływu wiele równocześnie występujących oddziaływań, lecz jedynie pewne i ściśle określone z nich. Ich identyfikacja najczęściej zależy od umiejętności i geniuszu oraz doświadczenia samego badacza danego zjawiska. Różnorodność zjawisk fizycznych może być wyjaśniana przy zastosowaniu skąpej stosunkowo liczby pojęć fizycznych. Należy jednak podkreślić, że istotnym problemem jest to, iż wszystkie prawa fizyczne, nawet łącznie wzięte, stanowią tylko małą część wiedzy ludzkości o nieograniczonym świecie. Ujmując zagadnienie historycznie, trzeba stwierdzić, że cały wszechświat, łącznie z człowiekiem, stale skupia na sobie uwagę ludzkości. Człowiek wciąż dąży do coraz lepszego poznania otaczającej go rzeczywistości oraz samego siebie. Proces poznawania nie jest jednak czymś jednorodnym, lecz przybiera najrozmaitsze modyfikacje w zależności od przedmiotu i metody poznania. Na przestrzeni dziejów zmieniały się poglądy na wiele zjawisk występujących we wszechświecie, a prostymi tego dowodami są odkrycia Galileusza, Mikołaja Kopernika, Izaaka Newtona, Marii Skłodowskiej-Cu-

rie i wielu innych wybitnych badaczy rzeczywistości. Niektóre spośród największych osiągnięć w fizyce przyszły jako nagroda za śmiałe dążenie do zrozumienia „rzeczy w sobie”, do poznania „ostatecznej prawdy”, do rozwikłania zasadniczej istoty świata. Jedność natury jest ujawniana poprzez jej matematyczną ekspresję. Koncepcje matematyczne uwidoczniają się w zupełnie nieoczekiwanych sytuacjach. Ponadto pozwalają one niezwykle ściśle i dokładnie opisać zjawiska w danym kontekście (por. Scott 1999).

Postęp w poznaniu świata fizycznego jest wynikiem realizacji badań podstawowych, które nieraz były podejmowane wyłącznie dla zaspokojenia ciekawości, będącej podstawową właściwością natury ludzkiej. Wiedza uzyskana dzięki takim badaniom jest często wykorzystywana do wytwarzania określonych dóbr, narzędzi, rzeczy oraz tych wszystkich skomplikowanych urządzeń, które pozwalają człowiekowi polepszyć swój los, ułatwić życie i poznanie świata oraz osiągnąć znaczący rozwój. Z drugiej strony prowadzi to do postępu samej nauki poprzez wytwarzanie nowych rodzajów aparatury badawczej i pomiarowej, a także nowych materiałów. Tego rodzaju działalność klasyfikowana jest jako technologia, która opiera się na współdziałaniu wielu uczestników realizujących jej zadania, wykorzystujących jednocześnie wiele wyników naukowych i stosujących różne techniki. Należy podkreślić, że wyniki badań naukowych odgrywają kluczową rolę w osiągnięciach technologicznych. Jest to niekiedy przyczyną zaliczania technologii do nauki. Lepszym rozwiązaniem jest jednak rozróżnienie tych dwóch sfer aktywności człowieka, zwłaszcza wówczas, gdy występuje potrzeba ustalenia szczegółowych relacji między nauką a społeczeństwem (por. Davis, Hersch 1981).

Od kilku dziesięcioleci można dostrzec systematyczne tworzenie się i rozkwit potężnych, często międzynarodowych, przedsiębiorstw, których szczególnym celem jest bycie coraz lepszymi, coraz bardziej efektywnymi i coraz bardziej atrakcyjnymi. Dzięki takim instytucjom następuje postęp i ekspansja technologii, które na obecnym etapie odgrywają główną rolę w rozwoju wielu społeczeństw na świecie. Zagadnienie to ilustruje schemat przedstawiony na rysunku 1. Z drugiej strony, te czynniki bardzo często wpływają negatywnie na środowisko i są przyczyną katastrof technologicznych. Ich udziałem jest też powodowanie różnic w rozwoju poszczególnych regionów świata, co z kolei rodzi napięcia w stosunkach międzynarodowych, które mogą się przekształcać w rewolty brzemiennie tragicznymi skutkami. Bardzo często odpowiedzialność za taki stan rzeczy przerzuca się na naukę (por. Polkinghorne 1998). Do intensyfikacji wpływu matematyki na inne dziedziny nauki i na technologię przyczyniły się w znaczący sposób osiągnięcia informatyki i techniki komputerowej, co jest wyraźnie widoczne w obecnych czasach.

Rysunek 1
Podstawowe etapy w stosowaniu matematyki



Przez wiele stuleci, nawet jeszcze kilka wieków temu, czynnikiem hamującym matematykę przed podbojem prawie wszystkich dziedzin aktywności człowieka był brak efektywnych środków do realizacji dużej liczby obliczeń w krótkim czasie. Jednym z przykładów tego stanu rzeczy jest praca badawcza Johanna Keplera nad trajektoriami planet, których wyznaczenie zabrało mu aż kilka dziesięcioleci intensywnych obliczeń. Problem ten zajmował uwagę badaczy od ponad dwóch tysiącleci, ale wyraźny postęp zaznaczył się dopiero w połowie XVII w., kiedy to Blaise Pascal wynalazł pierwszą prawdziwą maszynę liczącą, która mogła dodać ciąg liczb z uprzednio ustawionymi cyframi za jednym przedstawieniem dźwigni. Rewolucja rozpoczęła się jednak od momentu pojawienia się technik półprzewodnikowych, choć trzeba przyznać, że pęd w kierunku doskonalenia środków obliczeniowych potęguje się niemal z dnia na dzień. Od kilku lat prowadzone są zaawansowane prace badawcze nad wykorzystaniem fotonów jako nośników informacji.

Sukcesy oraz niepowodzenia matematyki inżynierskiej i fizycznej

Wyjątkowy sukces matematyki – a zwłaszcza pewnych dziedzin, które z niej się wydzieliły jeszcze nie tak dawno – w intensyfikacji rozwoju wielu dziedzin nauki, w tym nauk przyrodniczych, ekonomicznych i społecznych oraz całych gałęzi współczesnej technologii, stanowi zagadkę dotąd nie rozwiązaną. Wydaje się jednak paradoksalne, że wraz z nastaniem komputerów osobistych oraz Internetu współczesny przemysł komputerowy oraz sieci telekomunikacyjne stały się najbardziej widocznym i najszerzej stosowanym produktem matematycznym. Co więcej, łatwość wykorzystywania rozwiązań technologicznych doprowadziła do uformowania takich konsumentów tych produktów, którzy nie są przeciążeni matematyką i zachowują się podobnie do wielu kierowców samochodów, którzy się nimi skutecznie poruszają bez znajomości termodynamiki czy kinetyki wewnętrznego spalania. Nieomal z dnia na dzień przybiera coraz więcej urządzeń, które umiemy obsługiwać, nie mając pojęcia o ich naturze.

Należy zaznaczyć, że od kilku dziesięcioleci matematyka stała się językiem wspólnym dla wszystkich naukowców i inżynierów. Powoli jednak to, co było jedynie narzędziem, aparatem badawczym i pomocą stało się celem samym w sobie. Stopniowo matematyka stawała się narzędziem selekcji na wszelkich egzaminach konkursowych (nie tylko wstępnych na studia) oraz w całym procesie kształcenia i kontroli jego efektów. Ta wyłączność zaciążyła na kulturze i mentalności dużych grup społecznych, a nawet całych narodów, ponieważ matematyka nie pozostawia dostatecznego miejsca na obserwację, na brak uporządkowania, na nieoczekiwanie, czyli na życie. Matematyka, wkraczając do danej dziedziny, spowija ją jakimś kokonem intelektualnym oraz wprowadza masę twierdzeń niosących prawdy harmonijne i dobrze uporządkowane. Efektem jest postępowanie w warunkach pewności i wyłączne korzystanie z wyrażen abstrakcyjnych przy braku troski o konfrontację z rzeczywistością. Powszechne staje się wymaganie stawiane większości pracowników wielu instytucji, aby mieli wycucie rzeczywistości. Jest to jeden z paradoksów współczesnej technologii. Na skutek ciągłego nasycania nią wszystkich sfer działalności człowieka, doprowadza ona do pobudzenia reakcji odrzucenia technologii przez społeczeństwo. Pomysłodawcy wyrobów wieloczynnościowych, które są coraz bardziej nasycone informatyką i elektroniką, zapominają o ich użytkownikach, czyli zwykłych ludziach. Jako ilustracja mogą posłużyć współcześnie produkowane samochody o zaawansowanej technologii, których użytkownicy nie umieją się posługiwać skarbnicą najprzeróżniejszych zawartych w nich rozwiązań. Podobnie jest z ponad połową właścicieli magnetowidów,

którzy nie potrafią programować nagrania wybranych przez siebie filmów. W tzw. krajach rozwiniętych, np. w Stanach Zjednoczonych, ujawniono informację, że osiągnany i stale potęgowany postęp naukowy i technologiczny realizowany jest głównie przez jednostki oraz zespoły badawcze przybyłe z krajów, które nie mogą się nawet pochwalić posiadaniem społeczeństwa przygotowanego naukowo. Specjaliści, którzy mierzą poziom naukowy – jakakolwiek by była jego definicja – otrzymują zdumiewające rezultaty dotyczące zdolności wychwytywania podstawowych koncepcji, leżących u podstaw ważnych problemów społecznych związanych z nauką i technologią. Jeszcze nie tak dawno matematyka i w ogóle nauka były symbolem pewności, co wyrażało się w sformułowaniach: „to naukowo stwierdzone”, „pewne matematycznie”, „mocne jak dwa i dwa jest cztery”. Obecnie utrwała się inny symbol niezawodności: „to obliczył komputer”, „nie osiągniesz nigdy celu, gdy się nie znasz na Excelu”.

Kolejny problem wynika z faktu, że choć matematyka jest nauce niezbędna w poznawaniu rzeczywistości, to dane określają ją zawsze niedostatecznie. W doświadczalnym badaniu zdarzeń w świecie rzeczywistym jesteśmy w stanie tylko częściowo stykać się ze zjawiskami fizycznymi. Bardzo często modele matematyczne badanego problemu opierają się na zbyt dużej liczbie założeń upraszczających, a do ich rozwiązania stosowany jest nieadekwatny aparat obliczeniowy. Jako przykład można przytoczyć badanie układów fizycznych przy zastosowaniu różniczkowych równań liniowych, których rozwiązania uzyskuje się dla czasu zmierzającego do nieskończoności, podczas gdy w praktyce procesy ustalone powstają w stosunkowo krótkim czasie po zmianie stanu układu. Podobną sytuację mamy w przypadku wykorzystywania szeregów Fouriera do badania fizycznych procesów okresowych nieharmonicznych. Dokładne odzwierciedlenie badanego układu wymaga przyjęcia nieskończonej liczby wyrazów w szeregu, a to nawet dla superszybkich komputerów jest zadaniem nierealnym i dlatego uzyskiwane wyniki są tylko przybliżone. Zagadnienie się znacznie komplikuje w przypadku badania układów nieliniowych, a zwłaszcza tzw. silnie nieliniowych, dla których predykcja zmian wartości sygnałów nie jest możliwa. Specyfiką takich układów jest możliwość występowania procesów chaotycznych, czyli takich, które wykazują zupełny brak jakiegokolwiek uporządkowania. Gdy zjawisko przebiega chaotycznie, wielkości je charakteryzujące pozostają w bezładzie, są losowo wymieszane i przebiegają nieregularnie. Przykład takiego sygnału chaotycznego jest przedstawiony na rysunku 2. Przeciwnością chaosu jest ład, porządek, wzór, regularność, przewidywalność, rozumienie.

Wyniki dotychczas uzyskane w tej dziedzinie mają źródło wyłącznie w symulacjach komputerowych. Mimo to formułowane są odmienne jakościowo opisy przyrody, które można streścić następująco: *światło nie rozchodzi się po liniach prostych, skóra nie jest gładka, chmury nie są kulami, góry nie są stożkami*. Wprowadza się struktury, których wymiary określone są liczbami niecałkowitymi i dlatego noszą nazwę fraktali. Typowymi przedstawicielami takich fraktalnych obiektów są trójkąt Sierpińskiego i krzywa von Kocha, które zostały przedstawione, odpowiednio, na rysunkach 3 i 4 (por. Bochner 1966). Obiekty te charakteryzowane są fraktalnymi wymiarami podobieństwa, które wynoszą:

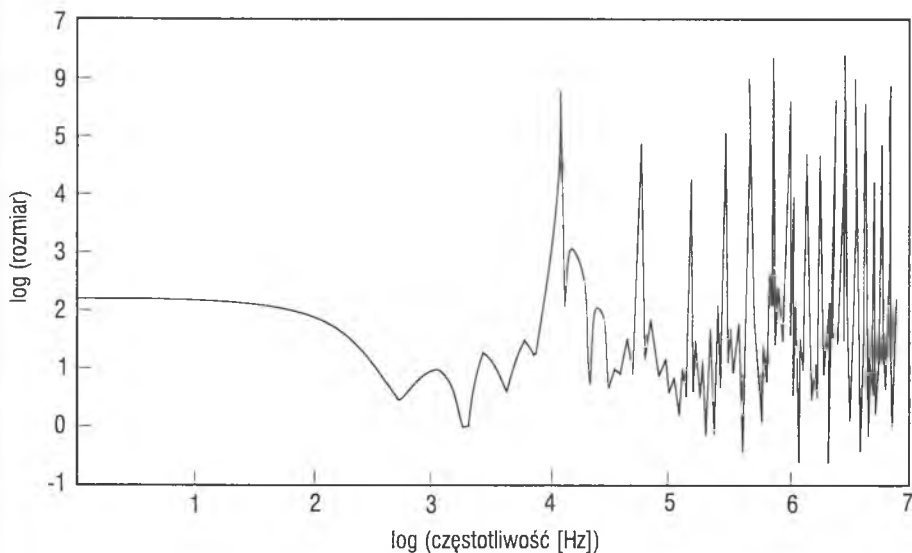
– dla trójkąta Sierpińskiego:

$$W_p = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,584962501\dots$$

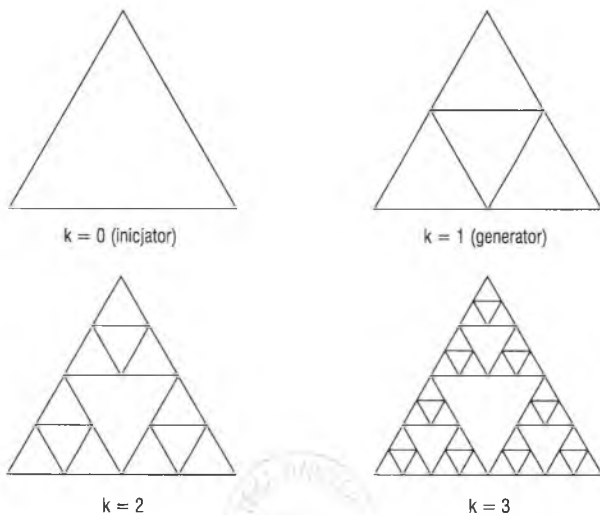
– dla krzywej von Kocha:

$$W_P = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,26185907\dots$$

Rysunek 2
Przykładowy sygnał chaotyczny



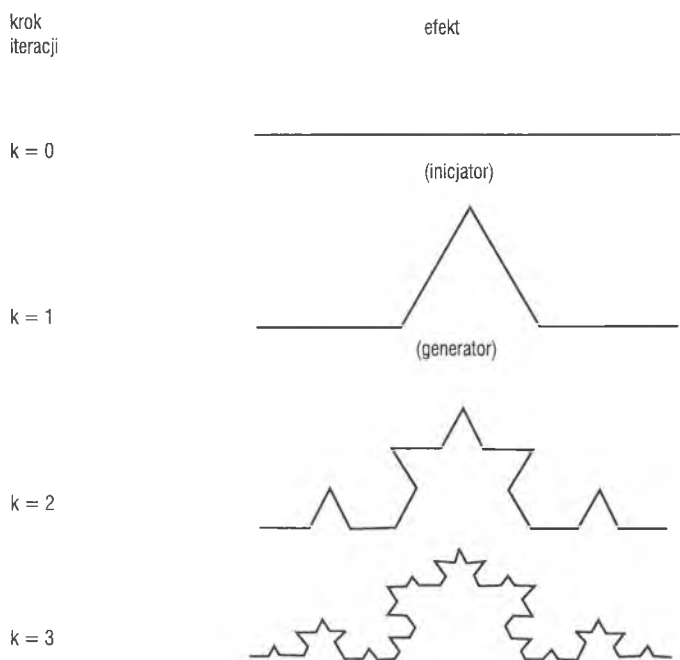
Rysunek 3
Trzy pierwsze iteracje w konstrukcji trójkąta Sierpińskiego



Badania w tej dziedzinie są intensywnie rozwijane w wielu ośrodkach naukowych na świecie, a ich wyniki coraz częściej służą do interpretacji wielu złożonych zjawisk występujących w układach fizycznych, jak np. w przypadku turbulencji, silnych oddziaływań elektromagnetycznych, dyfuzji ciepła i masy, a także w fizyce cząstek, w gwałtownych procesach atmosferycznych i drganiach skorupy ziemskiej. Coraz częściej takie obiekty rzeczywiste jak linia brzegowa dużej wyspy, rozkład kryształów bardzo cienkich warstw metalu nanoszonego elektrochemicznie na podłożu wykonane z innego materiału, struktura skał wulkanicznych, drgania cieczy w płaskim zbiorniku o zróżnicowanej temperaturze przeciwległych ścian są efektywnie opisywane przy użyciu pojęć stosowanych w teorii chaosu i geometrii fraktalnej. Na przykład wykorzystując właściwości krzywej von Kocha, można stosunkowo łatwo opisać formy różnorodnych płatków śniegu (por. Davis, Hersch 1981).

Rysunek 4

Ilustracja trzech pierwszych iteracji w konstrukcji krzywej von Kocha



Wpływ matematyki oraz komputeryzacji na świadomość indywidualną i zbiorową

Związki technik komputerowych z matematyką są stosunkowo niedawne, a zmiany świadomości – zarówno indywidualnej, jak i społecznej – w tym zakresie są bardzo szybkie i dlatego przedstawienie ich dogłębnej analizy nie jest jeszcze możliwe. Można jednak

przynajmniej próbować uwypuklić pewne istotne problemy. Jednym z nich jest to, że komputery, na zasadzie sprzężenia zwrotnego, wpłynęły w sposób rewolucyjny na matematykę, który jest porównywalny z tym, jaki wniosło wprowadzenie do Europy liczb zwanych arabskimi. Wskutek tego liczne problemy dotąd uważane za trudne stały się łatwe i rozwiązywalne, i to nie tylko przez elity intelektualne, ale także przez specjalistów nie legitymujących się wyjątkowym talentem matematycznym. Zagadnienie ubogaca się również dzięki bardzo dużej podatności na efektowną wizualizację badanych kwestii, która w wielu przypadkach stanowi podstawę do ustalenia poszukiwanych rozwiązań. Przyjmuje się, że komputery nie tylko pomagają w rozwiązywaniu problemów, ale same je rozwiązują. Komputery zmieniają nasze poglądy na to, co się wydaje niemożliwe, co jest warte zachodu i co jest piękne. Na tym podłożu wyrosła, stale i dynamicznie rozwijająca się dziedzina zwana matematyką komputerową. Mianem tym obejmuje się wykorzystywanie komputerów do kreowania różnorodnych wzorców (m.in. mowy), do szybkiego podejmowania decyzji przy ogromnej liczbie danych, do realizowania działań na symbolach matematycznych w zakresie np. algebry, rachunku różniczkowego i całkowego, rozwinięć w szeregi potęgowe i trygonometryczne, a także wyznaczania analitycznych wyrażeń określających rozwiązania równań różniczkowych. Metody rozwijane w ramach matematyki komputerowej są obecnie traktowane jako alternatywne metody obliczeniowe, które w pewnych zastosowaniach mogą być skuteczniejsze od tradycyjnych. Obecnie odnotowywane są już liczne przypadki, kiedy to komputer stał się partnerem dla matematyka – a nie, jak dotychczas, stanowił tylko jego laboratorium – i przeprowadza za niego stosowne dowody zarówno w zakresie algebry, kombinatoryki oraz zagadnień analitycznych, jak i nierówności oraz równań różniczkowych. Badania nad matematyką komputerową systematycznie wnoszą nowe elementy w jej rozwój. Rośnie zainteresowanie wynikami konstruktywistycznymi oraz algorytmicznymi, maleje natomiast wynikami czysto egzystencjalnymi i takimi dyskusjami teoretycznymi, które nie nadają się do obliczeń komputerowych. Poglądy w tej dziedzinie ewoluują jednak w kierunku zwątpienia w możliwość naśladowania czy też przewyższania inteligencji człowieka przez układy realizowane w ramach nawet najbardziej subtelných technologii informatycznych. Wynalazcy i konstruktorzy takich układów zaczynają coraz bardziej sobie uświadamiać, że będąc wytworzone przez człowieka, pozostają one nadal jedynie tworem mechanicznym, co najwyżej naśladowującym pewne ludzkie działania.

Układy działające na zasadzie komputera są zdolne zrealizować tylko te czynności, do których zostały odpowiednio zaprogramowane i nie podejmują nic nowego, bo nie są w stanie myśleć. Jak wiadomo, myślenie jest aktem twórczym wynikłym z określonej świadomości. Chociaż świadomość jest doświadczana indywidualnie przez każdego człowieka, to sama jest składnikiem kultury, w której się rozwinęła i znajduje się jak gdyby w jej „pamięci operacyjnej”. To, co się w danej chwili tworzy lub praktykuje, można rozpatrywać bądź jako część większej, zastygłej w czasie, intelektualnej i kulturalnej świadomości danej społeczności lub też jako fragment płynącego strumienia świadomości. Ona sama, jako efekt właściwej akcji fizycznej mózgu, nie może być w sposób prawidłowy przeniesiona na układ komputerowy, gdyż symulacja danego procesu fizycznego nie jest tożsama z samym procesem i nie może sama przez się wywołać zjawiska świadomości (np. komputerowa symulacja huraganu z pewnością nie jest huraganem). Możliwość znalezienia czegoś nieoczekiwanego w kolejnym, bardziej zaawansowanym ekspery-

cie jest motorem kosztownych badań, prowadzonych najczęściej w sztucznie stworzonych warunkach, innych niż te, z jakimi stykamy się w naturalnych kontaktach ze światem rzeczywistym.

Wzajemne przeplatanie się interpretacji i doświadczenia oraz fakt, że teoria nie jest dostatecznie określona przez eksperyment, przekonały wielu aktywistów w dziedzinie techniki komputerowej, że spotkania nauki z rzeczywistością charakteryzują się pewnym stopniem elastyczności, co pozostawia znaczny margines na manipulowanie objaśnieniami. Teoretyczny aspekt tego zjawiska postrzegany jest często jako narzucenie pewnego schematu znaczeniowego na zamaskowaną i nieuchwytną rzeczywistość niż jako godne zaufania wnioski, wyciągnięte przez naukę z zetknięcia się z prawdziwą naturą świata materialnego oraz uczuciowością i świadomością człowieka (por. Medvedev 1991). Można oceniać, że dalszy rozwój tej dziedziny będzie w dużej mierze zależny od tego, czy ujawnią się twórcze jednostki, które zintensyfikują jej zauważalny już obecnie rozpęd oraz od tego, czy uzyskają przyzwolenie społeczne na taką działalność.

Nie można oczywiście zaprzeczyć, że – tak jak w całej nauce – również na rozwój matematyki oraz komputeryzacji wpływają czynniki społeczne. Na to, jakie projekty uzna się za warte realizacji, a co za tym idzie – na jakie znajdują się pieniądze, oraz na to, jakie pomysły teoretyczne są modne (i w konsekwencji – czym większość matematyków będzie chciała się zajmować i do czego będzie zmierzać) mają wpływ siły społeczne aktywne w środowisku naukowym oraz decydenci na odpowiednich stanowiskach. Wiadomo bowiem, że obecny stan świadomości społecznej jest wpleciony w sieć różnych motywacji i aspiracji, różnych interpretacji i możliwości. Jak dotąd przeważa pogląd, że komputery mogą być bardzo pomocne w działalności naukowej wielu badaczy, ale nie mogą zastąpić ludzi (por. Polkinghorne 1998). Coraz dobitniej wkracza w powszechną świadomość prawda, że matematyka i komputeryzacja stają się nierozzerwalnie związane z codziennym funkcjonowaniem wielu społeczeństw, a to, jak dalece jest to dobre czy złe, zależy od ludzi, którzy je tworzą, rozwijają i wdrażają, gdyż żadna działalność ludzkiego umysłu nie może być wolna od problemów moralnych. Łatwość obliczeń i duża efektywność w przetwarzaniu danych zachęcają do zbierania ich wielkiej liczby. Dane te mogą być następnie wykorzystywane do różnych celów, zarówno dobrych, jak i złych, ale najczęściej stają się ogromnym kłopotem i nie wiadomo co z nimi zrobić. Przyrost masy informacji jest określony postępowaniem geometrycznym, a nasze możliwości ich wykorzystania rosną co najwyżej w sposób arytmetyczny. Zjawisko to bywa nazywane „informatyczną wieżą Babel” lub „bombą I”, która może wybuchnąć i spowodować, że los człowieka utonie w przeogromnym szumie informacyjnym. Ale proces ten już zaszedł tak daleko, że wracanie do liczydeł nie wydaje się słuszne.

Podsumowanie i wnioski

Problem, który ujawnia się na tle rozważań o konieczności identyfikacji granicy twórczego oraz destrukcyjnego wpływu matematyki na poznanie i kreowanie rzeczywistości można rozpatrywać pod wieloma aspektami. Jeden z nich jest ukryty w pytaniu: Czy jest jakaś alternatywa? Można próbować jej poszukiwać odwołując się do odkryć w dziedzinie fizyki, których dokonał Heron z Aleksandrii w I w. p.n.e., a które są opisane w jego dziele *O zwierciadłach*. Obserwując przyrodę, sformułował on prawo odbicia światła zgodnie

z najkrótszą drogą. Był to wynik jego obserwacji świata rzeczywistego i przemyśleń odnoszących się do zasady najmniejszej pracy, jaką rządzi się natura. Podobnym poglądem kierował się też Galileusz. Naśladowcą Herona był Pierre Fermat, który na podstawie zasady natury sformułował prawo załamania światła. Przykłady można mnożyć. Po drugie, ze względu na brak rozwikłania zagadki o przyczynach ogromnego wpływu matematyki na naukę i życie człowieka, nigdy do końca nie jesteśmy pewni, czy jakaś teoria fizyczna sformułowana w koncepcji matematycznej jest tą jedyną i właściwą. W rozwoju nauki można jednak dostrzec pewną ciągłość i konsekwencję w postępowaniu, dzięki którym wyjaśnionych zostało wiele nowych aspektów wiążących się z budową materii i wszechświata. Z drugiej strony, głoszone są poglądy o potrzebie uprawiania czystej matematyki nie tylko jako nauki, ale przede wszystkim jako pięknej sztuki. Na poparcie tego można przytoczyć stwierdzenie Godfrey'a Harolda Hardy'ego, wielkiego matematyka, a zarazem nieprzeciętnej indywidualności: „Moje badania nie miały nigdy żadnych zastosowań, nie przydały się ani do zabijania ludzi, ani do ujarzmiania narodów”.

Wielcy matematycy wszech czasów wyznawali pogląd, że świat matematyki jest na tyle piękny i tajemniczy oraz zawiera w sobie taki ogrom potrzeby poznania prawdy, że w swoim rozwoju nie musi się kierować kryterium przydatności praktycznej. Matematyka jest nie tylko nauką, jest także sztuką, i to sztuką piękną. Doznania natury estetycznej są głównym motorem pracy dla matematyków. Matematyka ma obecnie zastosowania znacznie szersze, niż to było stosunkowo niedawno, a krąg jej oddziaływań coraz głębiej przenika do wszystkich dziedzin aktywności człowieka. Dzięki swobodzie w wyborze tematów i środków twórcy nowych idei w matematyce mogą działać nieograniczenie, a najwyższą dla nich nagrodą jest trwałość i nieśmiertelność odkrywanych przez nich prawd.

Literatura

Bell E.T. 1945

Development of Mathematics, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.

Bochner S. 1966

The Role of Mathematics in the Rise of Science, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Brown R., Porter T. 1990

Mathematics in the Context. New Course, UCNW Mathematics, Preprint 90.09, School of Mathematics, The University of Wales, Bangor, Wales.

Courant R., Robins R. 1998

Co to jest matematyka?, Pruszyński i S-ka, Warszawa.

Davis P.J., Hersch R. 1981

The Mathematical Experience, Birkhäuser, Boston.

Dyson F.J. 1964

Mathematics in the Physical Science, „Scientific American”, nr 211, s. 127–146.

Germinet R. 1999

Przygotowanie do niepewnego, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.

Hilton G. 1973

Thematic Origins of Scientific Thought. From Kepler to Einstein, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

- Kline M.** 1980
Mathematics: The Loss of Certainty, Oxford University Press, New York.
- Krąpiec M.A.** 1995
Dzieła V. Struktura bytu, Katolicki Uniwersytet Lubelski, Lublin
- Medvedev A.P.** 1991
Scenes from the History of Real Functions, Birkhäuser-Verlag, Basel.
- Polkinghorne J.** 1998
Poza nauką, Amber, Warszawa.
- Pólya G.** 1963
Mathematical Methods in Science, American Mathematical Society, Providence, Ri.
- Scott A.** 1999
Schody do umysłu, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Sela M.** 2001
The Fight against Diseases: Comments Related to „Science for Man and Man for Science”, Pont. Academy of Science, Vatican.
- Sikorski R.** 1964
Matematyka – nauka dziwna, „Matematyka”, t. 5, nr 4.
- Smoryński C.** 1983
Mathematics as a Cultural System, „The Mathematical Intelligencer”, nr 5, s. 9–15.
- Steinhaus H.** 1985
Selected Papers, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Wigner E.P.** 1960
The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, „Communications on Pure Applied Mathematics”, nr 13, s. 1–14.
- Yuskevich A.P.** 1970 – 1972
History of Mathematics from Ancient Times to the Beginning of the Nineteenth Century, t. I–III, Nauka, Moscow.