Krótkookresowy model ryzyka ubezpieczeniowego w przedsiębiorstwie

Agnieszka Rurka

Cel artykułu stanowiło zaprezentowanie możliwości zastosowania krótkookresowego modelu ryzyka w przedsiębiorstwie. Przedstawiono przy tym istotę i założenia modelu zamkniętego oraz dokonano przeglądu wybranych metod identyfikacji rozkładu sumy szkód ubezpieczeniowych. Omawiane zagadnienia zostały zobrazowane na przykładzie. Przy pomiarze ryzyka wykorzystano algorytm De Prila oraz aproksymację sumy szkód rozkładem normalnym. Podjęto ponadto próbę przedstawienia możliwości zastosowania modelu indywidualnego ryzyka w ocenie kontraktów ubezpieczeniowych. W tym celu zaprezentowano sposób ustalania wysokości współczynnika bezpieczeństwa oraz poziomu retencji w przypadku kontraktu ubezpieczeniowego typu excess of loss.

1. Wprowadzenie do zarządzania ryzykiem ubezpieczeniowym w przedsiębiorstwie

Ryzyko wiąże się niezmiennie z wszelkimi formami egzystencji i działaniami człowieka. Jest więc też nieodłącznym atrybutem każdej działalności gospodarczej oraz podmiotów uczestniczących w tej działalności (Ronka-Chmielowiec 2002: 129).

Mianem ryzyka określa się przedsięwzięcie, którego wynik jest nieznany, niepewny, problematyczny (Szymczak 1981: 155). Atrybuty ryzyka łączą je więc ściśle z niepewnością, oznaczającą „powątpiewanie w zdolność do przewidzenia skutków obecnych działań" (Williams i inni 2002: 28).

Niepewność związana jest z niemożnością określenia rozwoju wydarzeń w sposób pewny. U źródeł tej niemożności leży złożoność zjawisk, a także dostępność informacji na temat możliwego biegu wydarzeń. Rodzaj posiadanych informacji, ich ilość i jakość, determinują postrzeganie ryzyka oraz sposób tego postrzegania. Wynikiem tego jest indywidualny stosunek człowieka do ryzyka, przejawiający się w postaci skłonności lub niechęci do ryzyka. Poziomy niepewności przedstawia poniższa tabela.

W przedsiębiorstwie najczęściej występuje ryzyko o drugim i trzecim poziomie niepewności. Niechęć do ryzyka stanowi motywację do podjęcia próby przeniesie-

Poziom niepewności	Cechy	Przykłady
Brak (pewność)	rezultaty mogą być przewidziane z bardzo dużą dokładnością	prawa fizyki, nauki przyrodnicze
Poziom 1 (niepewność obiektywna)	rezultaty są przewidywalne, a prawdopodobieństwa są znane	gry hazardowe: karty, gra w kości, umieralność
Poziom 2 (niepewność subiektywna)	rezultaty są przewidywalne, lecz prawdopodobieństwa nie są znane	pożar, wypadek samochodowy, wielokrotna inwestycja
Poziom 3	rezultaty nie są w pełni przewidywalne, a prawdopodobieństwa nie są znane	badania kosmiczne, inżynieria genetyczna

Tab. 1. Poziomy niepewności
Źródło: na podstawie. Williams, A.C., Smith, M. L., Young, P.C. 2002. Zarządzanie ryzykiem a ubezpieczenia, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

nia ryzyka na niższy poziom, co jest możliwe np. poprzez transfer ryzyka za pomocą ubezpieczenia. Ubezpieczeniu może jednak podlegać jedynie ryzyko czyste, którego realizacja powoduje stratę, natomiast niezrealizowanie nie prowadzi do uzyskania korzyści majątkowych[1].

Ryzyko i niepewność mają istotny wpływ na organizację, gdyż wymagają ponoszenia kosztów ryzyka, do których należą, między innymi, koszt strat (będących następstwem realizacji ryzyka) oraz koszt własny niepewności (pojawiający się w formie zmartwienia lub trwogi) (Williams i inni 2002: 41-42).

Prowadzenie działalności gospodarczej wymaga przyjęcia postawy w stosunku do ryzyka poprzez np. ignorowanie, unikanie, transfer, retencję czy redukcję. Odpowiedni stosunek do ryzyka stanowi podstawę zarządzania nim, czyli racjonalnego sterowania elementami ryzyka, mającego na celu uniknięcie lub ograniczenie finansowych skutków zdarzeń losowych (Szymańska 1997: 15).

Zarządzanie ryzykiem stanowi szeroko rozumiane działania zarządcze, których zadaniem jest identyfikacja i ocena ryzyka i niepewności oraz walka z ich przyczynami i wpływem na organizację (Williams i inni 2002: 57).

Głównymi elementami zarządzania ryzykiem są:
- określenie zadań,
- identyfikacja (rozpoznanie) i analiza potencjalnych zagrożeń i źródeł ryzyka,
- kwantyfikacja (pomiar) i ocena ryzyka – pomiar siły działania określonych rodzajów ryzyka i wartości strat,
- kontrola ryzyka i podjecie działań zmniejszających je,
- finansowanie ryzyka – gromadzenie rezerw na pokrycie strat lub kosztów transferu ryzyka,
- administrowanie programem.

Najczęściej wykorzystywaną formą zabezpieczenia przed stratami powstałymi w wyniku realizacji ryzyka jest jego transfer przy pomocy instytucji ubezpieczenia. Zawierając umowę ubezpieczenia, przedsiębiorca dokonuje transferu ryzyka na ubezpieczyciela, nabywając odpowiedni produkt ubezpieczeniowy[2]. Wysokość składki ubezpieczeniowej stanowi w tym przypadku koszt ochrony ubezpieczeniowej[3].

Przedsiębiorca podejmuje więc decyzję, jakie ryzyko pozostawić (jakie koszty szkód może sam ponieść) oraz co ubezpieczać (w jakim zakresie, na jaką sumę), przed czym ubezpieczać (przed jakimi zdarzeniami losowymi), gdzie ubezpieczać (jakiego ubezpieczyciela wybrać), na jakich warunkach (jakie są ogólne warunki ubezpieczeń), jaki koszt jest skłonny w związku z tym ponieść itd. Badanie i analiza ryzyka należą więc do podstawowych działań przed przystąpieniem do ubezpieczenia, zarówno dla ubezpieczyciela, jak i ubezpieczającego (Ronka-Chmielowiec 1997: 9).

Niepewność jest kategorią subiektywną, a w związku z tym – niemierzalną. Związane z niepewnością ryzyko jest natomiast zjawiskiem obiektywnym i jako takie może być przedmiotem oceny lub pomiaru. Oceny ryzyka dokonuje się w sytuacji, gdy nie jest możliwy jego pomiar, np. w przypadku nowego rodzaju ryzyka lub ryzyka katastroficznego.

Ryzyko ubezpieczeniowe, mogące stanowić przedmiot transferu, może być traktowane jako zmienna losowa lub proces losowy (Ronka-Chmielowiec 1997: 6). W celu dokonania pomiaru tego ryzyka mogą być wykorzystane – szeroko omawiane w literaturze ubezpieczeniowej – modele ryzyka (np. indywidualny model ryzyka i kolektywny model ryzyka).

Odpowiedniego aparatu narzędziowego do pomiaru ryzyka ubezpieczeniowego dostarcza statystyka ubezpieczeniowa. Miarami ryzyka – zmiennej losowej lub procesu stochastycznego – są np. dystrybuanta, funkcja gęstości prawdopodobieństwa, funkcja tworząca, momenty statystyczne itp.

2. Model ryzyka indywidualnego

W określonych przypadkach analiza szkód, będących rezultatem zdarzeń losowych, może być oparta na krótkookresowym modelu ryzyka indywidualnego (analizując wysokości wypłat, pomija się czynnik czasu, wobec czego model ma zastosowanie do analiz krótkookresowych – zazwyczaj jednego roku) (Rolski i inni 1999: 1).

Model ten znajduje zastosowanie, między innymi, w przypadku ubezpieczeń zdrowotnych, ubezpieczeń na życie (por. Kowalczyk i inni 2006: 42; Ronka-Chmielowiec 1997: 159; Ostasiewicz 2001: 106), a także innych – np. komunikacyjnych, ogniowych, co do których spełnione są określone poniżej założenia (por. Bowers 1986: 33).

Przyjmuje się, że:

– badany portfel składa się z ustalonej liczby n jednorodnych lub niejednorodnyc jednostek ryzyka,
– w wyniku zaistnienia szkody może zostać dokonana co najwyżej jedna wypłata (ewentualnie, różne wypłaty można potraktować jako wypłatę zagregowaną),
– wypłaty X_i generowane przez szkody losowe związane z poszczególnymi ryzykami w portfelu są statystycznie niezależnymi zmiennymi losowymi (Feller 1968: 125), to znaczy realizacja jednego z ryzyk w portfelu nie wpływa na pozostałe ryzyko (Ronka-Chmielowiec 1997: 159).

Przy powyższych założeniach całkowita wypłata dla n-elementowego portfela może być określona jako (Bowers i inni 1986: 27):

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

gdzie X_i oznacza i-tą niezależną wypłatę.

Rozkład S identyfikuje się, stosując różne metody, a mianowicie:
– podając wartości podstawowych parametrów (między innymi takich jak: wartość oczekiwana i wariancja) lub postać funkcji tworzącej prawdopodobieństwa (lub momenty),
– określając analityczną postać dystrybuanty (lub funkcji gęstości), korzystając ze splotów dystrybuant (lub funkcji gęstości) (por. Bowers i inni 1986: 35; Kaas i inni 2001: 28; Feller 1968: 267) i stosując metodę rekurencyjną (por. Ostasiewicz 2001: 111),
– w przypadku określonych portfeli wyznaczając funkcję gęstości prawdopodobieństwa za pomocą wzoru rekurencyjnego (stosując algorytm De Prila),
– określając rozkład przybliżony, stosując aproksymację rozkładem normalnym lub trójparametrycznym rozkładem gamma.

Poniżej zostaną zaprezentowane wybrane zagadnienia związane z identyfikacją rozkładu S, które posłużyły w opracowaniu przykładu praktycznego zastosowania prezentowanego modelu krótkookresowego.

Rozkład sumy wypłat identyfikuje się określając wartości wybranych momentów lub podając postać funkcji tworzącej momenty (Por. Jakubowski, Sztencel 2002: 197, 215).

Wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu S uzyskuje się korzystając z własności momentów dla sumy niezależnych zmiennych losowych jako (Feller 1968: 222, 230):

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_2$$

oraz

$$D^2\left(X_1 + \ldots + X_n\right) = D^2 X_1 + \ldots + D^2 X_2 .$$

Wypłata X_i generowana przez i-te ryzyko jest przy tym nieujemna, to znaczy $P(X_i \geq 0) = 1$. Prawdopodobieństwo, że nie ma wypłaty – nie wystąpi szkoda – jest dodatnie $P(X_i = 0) > 0$.

Wysokość i-tej wypłaty – o ile do niej dojdzie – wynosi B_i co oznacza, że jej rozkład jest taki, jak warunkowy rozkład zmiennej X_i (tj. dla $X_i > 0$).

Wypłata X_i może być określona jako (Ostasiewicz 2001: 106):

$$X_i = I_i \cdot B_i ,$$

gdzie:
$I_i = 1$, gdy wystąpiła wypłata w wyniku i-tej szkody,
$I_i = 0$, gdy nie wystąpiła wypłata w wyniku i-tej szkody

przy czym (Bowers i inni 1986: 28):

$$q_i = P(X_i > 0) = P(I_i = 1)$$

oznacza prawdopodobieństwo wypłaty oraz

$$p_i = P(X_i = 0) = P(I_i = 0) = 1 - q_i$$

oznacza prawdopodobieństwo, że nie nastąpi wypłata.

Wartość oczekiwaną (pierwszy moment zwykły) wyznacza się jako (Feller 1968: 222, 230):

$$ES = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i q_i ,$$

gdzie $\mu_i = EB_i$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej.

Wariancja oraz dwa kolejne momenty centralne wynoszą (Ostasiewicz 2001: 110; Jóźwiak, Podgórski 2006: 109-110):

$$D^2 S = \sum_{i=1}^{n} D^2 X_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i^2 q_i (1 - q_i) + \sigma_i^2 q_i\right),$$

$$\mu_{3,S} = \sum_{i=1}^{n} \left(q_i EB_i^3 - 3q_i^2 EB_i^2 EB_i + 2q_i^3 (EB_i)^3 \right),$$

$$\mu_{4,S} = \sum_{i=1}^{n} \left(q_i EB_i^4 - 4q_i^2 EB_i^3 EB_i + 6q_i^3 EB_i^2 (EB_i)^2 - 3q_i^4 EB_i^4 \right)$$
$$+ 6\sum_{i<j} \left(q_i EB_i^2 - q_i^2 (EB_i)^2 \right)\left(q_j EB_j^2 - q_j^2 (EB_j)^2 \right),$$

gdzie $\sigma_i^2 = D^2 B_i$ oznacza wariancję zmiennej B_i.

Transformatę Laplace'a rozkładu całkowitej wypłaty otrzymuje się korzystając z własności funkcji tworzących momenty dla zmiennych niezależnych (Jakubowski, Sztencel 2002: 205, 217; Feller 1968: 267):

$$M_S(t) = Ee^{tS} = Ee^{\left(t\sum_{i=1}^{n} X_i \right)} =$$

$$\prod_{i=1}^{n} Ee^{tX_i} = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t),$$

a zatem:

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(p_i + q_i M_{B_i}(t) \right),$$

gdzie M_{B_i} jest funkcją tworzącą momenty zmiennej B_i.

W modelu ryzyka indywidualnego całkowita wypłata w portfelu S jest sumą n niezależnych zmiennych losowych X_i ($i=1, 2, ..., n$) o dystrybuantach $F_i(x)$, skończonych wartościach oczekiwanych $EX_i=\mu_i<\infty$ i skończonych wariancjach $D^2X_i=\sigma_i^2<\infty$. Korzystając z niezależności elementów ciągu zmiennych $\{Xi, i=1, 2, ..., n\}$, znając wartości elementów ciągów $\{\mu_i<\infty, i=1, 2, ..., n\}$,i $\{\sigma_i^2<\infty, i=1, 2, ..., n\}$, dla sumy

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

można wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję (Feller 1968: 253):

$$ES = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \mu,$$

$$D^2 S = D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} D^2 X_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sigma^2.$$

Dokonując normalizacji zmiennej losowej S według formuły (Jóźwiak, Podgórski 2006: 180):

$$Z = \frac{S - ES}{DS} = \frac{S - \mu}{\sigma}$$

otrzymuje się zmienną zestandaryzowaną Z.

Ciąg dystrybuant $\{F(z)\}$ zmiennych losowych Z spełnia wówczas (Luszniewicz, Słaby 2001: 146-147):

$$\lim_{n\to\infty} F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $z<0$ spełniony jest warunek Lindeberga (Feller 1968: 253):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x|>z\sigma} (x - EX_i)^2 dF_i(x) = 0,$$

co oznacza, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ i wszystkich dostatecznie dużych n zachodzi:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma} < \varepsilon,$$

dla $i=1, 2, ..., n$.

Oznacza to, że w przypadku dużej liczebności portfela n i spełnieniu warunków centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego rozkład Z jest zbieżny do standardowego rozkładu normalnego[4].

3. Przykład zastosowania modelu krótkookresowego w analizie ryzyka

Praktyczne wykorzystanie modelu ryzyka krótkookresowego zostanie przedstawione na przykładzie przedsiębiorstwa zatrudniającego 160 pracowników (w tym samych mężczyzn w wieku 30, 40 i 50 lat). Każdy z pracowników traktowany jest jako pojedyncze ryzyko, z którym związane są dwie charakterystyki – prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku oraz wysokość należnego odszkodowania z tego tytułu (wypłacanego rodzinie). Portfel ryzyka przedsiębiorstwa jest zatem portfelem zamkniętym, składającym się z $n=160$ ryzyk. Zakłada się przy tym, że może on być przy tym podzielony na grupy jednorodne pod względem wielkości wypłat oraz prawdopodobieństwa wypłaty[5].

Wielkość i-tej wypłaty w portfelu, o ile do niej dojdzie, wynosi b_i:

$$P(B_i = b_i) = P(X_i = b_i | I_i = 1) = 1,$$

przy czym stanowi wielokrotność pewnej jednostki pieniężnej c:

$$b_i = c \cdot i$$

dla $i=1, 2, ..., r$. Wysokość i-tej wypłaty uzależniona jest od liczby lat pracy w danym przedsiębiorstwie, zgodnie z wartościami podanymi w poniższej tabeli.

$x_{01} < x_i \leq x_{1i}$	b_i (w zł.)
0 – 5	10 000
5 – 10	20 000
10 – 15	30 000
15 – 20	40 000
20 – ...	50 000

Tab. 2. Wysokość wypłat
Źródło: opracowanie własne.

Wypłaty b_i stanowią wielokrotności 10 000 złotych (c). Wyznaczone grupy mają więc takie same warunkowe rozkłady wypłaty oraz takie samo prawdopodobieństwo wypłaty, co przedstawia tabela 3.

i	q_1	q_2	q_3	n_i
1	30	2	1	33
2	23	3	1	27
3	0	35	8	43
4	0	18	20	38
5	0	0	19	19
n_j	53	58	49	160

Tab. 3. Klasyfikacja ryzyka w przykładowym portfelu przedsiębiorstwa
Źródło: opracowanie własne.

Liczbę wypłat z prawdopodobieństwem q_j wyznacza się jako sumę:

$$n_j = \sum_{i=1}^{r} n_j = \sum_{i=1}^{5} n_j \ ,$$

wobec czego całkowita liczba wypłat wynosi:

$$n = \sum_{j=1}^{m} n_j = \sum_{j=1}^{3} n_j = 160 \, .$$

Przy stawianych założeniach, do określenia rozkładu prawdopodobieństwa całkowitej wypłaty w portfelu może być wykorzystany algorytm De Prila[6].

Maksymalna możliwa wielkość zagregowanej wypłaty M w portfelu wynosi (De Pril 1986: 109):

$$M = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} i n_{ij} \, ,$$

gdzie: n_{ij} oznacza liczbę wypłat i ($i=1, 2, ..., r$) jednostek pieniężnych z prawdopodobieństwem $q_j=1–p_j$ ($j=1, 2, ..., m$). Maksymalna wypłata w omawianym portfelu wynosi zatem:

$$M = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} i n_{ij} = 463 \, .$$

Przedsiębiorstwo może więc być obciążone maksymalną wypłatą na poziomie 4,63 mln. zł.

Wartość oczekiwaną i wariancję sumy wypłat w portfelu wyznacza się jako (Cahn, Sharma 1983: 852):

$$ES = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} iE(N_{ij}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} i n_{ij} q_j \, ,$$

$$ES = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} iE(N_{ij}) = 2{,}61272$$

oraz

$$D^2S = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} i^2 D^2(N_{ij}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} i^2 n_{ij} q_j (1 - q_j),$$

$$D^2S = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} i^2 D^2(N_{ij}) = 10{,}34882 \, ,$$

gdzie N_{ij} oznacza oczekiwaną liczbę wypłat i-jednostek z j-tym prawdopodobieństwem (powstałą na bazie n_{ij}).

Analizowany portfel ryzyka charakteryzuje duża zmienność, o czym świadczy klasyczny współczynnik zmienności na poziomie ok. 123%.

Rozkład prawdopodobieństwa całkowitej wypłaty S w portfelu, to znaczy $p_S(s)=P(S=s)$, określa się zgodnie z wzorem rekurencyjnym (De Pril 1986: 110):

$$p_S(0)=\prod_{j=1}^{m}(p_j)^{n_j},$$

$$p_S(s)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{\min(r,s)}\sum_{k=1}^{[s/i]}A(i,k)p_s(s-k\cdot i),$$

dla $s=0, 1, ..., M$, gdzie:

$$a(j,k)=\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k,$$

$$A(i,k)=(-1)^{k+1}i\sum_{j=1}^{m}n_{ij}a(j,k),$$

oraz $[s/i]$oznacza całkowitą część liczby, będącej wynikiem ilorazu s/i7.

Dla q_j bliskiego zeru wyrażenie:

$$\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^k$$

jest małe, wiec $A(i, k)$ szybko maleje, gdy k rośnie, co przedstawia tabela 4.

Przy znajdowaniu prawdopodobieństwa $p_S(s)$ dokonywane sumowanie może być ograniczone do małej liczby K składników (Ostasiewicz 2001: 117):

$$sp_S^K(s)=\sum_{i=1}^{\min(r,s)}\sum_{k=1}^{\min(K,[s/i])}A(i,k)p_s(s-ik).$$

Rezultat ograniczenia sumowania, przykładowo do $K=7$ składników, podaje tabela 5.

Jeżeli $q_j<0,5$ (dla $j=1, 2, ..., m$) – co ma miejsce w analizowanym przypadku – to suma bezwzględnych błędów tej aproksymacji jest następująco oszacowana z góry (De Pril 1988: 61–68):

$$\sum_{s=0}^{M}\left|p_S(s)-p_S^{(K)}(s)\right|<e^{\delta(K)}-1,$$

gdzie

$$\delta(K)=\frac{1}{K+1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}\frac{p_j}{1-2q_j}\left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{K+1}.$$

Oznacza to, że suma bezwzględnych błędów oszacowania dla omawianego przykładu nie przekracza wartości:

$$e^{3,35661E-16}-1.$$

Przy spełnieniu warunków centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego (por. Feller 1968: 253; Luszniewicz, Słaby 2001: 146–147), wykorzystując aproksymację normalną rozkładu zestandaryzowanej sumy wypłat

$$Z=\frac{S-ES}{DS}=\frac{S-2{,}613}{3{,}217},$$

można oszacować wartość tzw. względnego ładunku bezpieczeństwa (względnego współczynnika narzutu na bezpieczeństwo) (Bowers i inni 1986: 41):

$$\theta=z_p\frac{DS}{ES},$$

$A(i, k)$	i 1	2	3	4	5
k 1	0,058690	0,104676	0,593267	0,995540	0,880180
2	–0,000171	–0,000338	–0,003370	–0,007766	–0,008155
3	0,000001	0,000002	0,000024	0,000067	0,000076
4	0,000000	0,000000	0,000000	–0,000001	–0,000001
5	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Tab. 4. Wartości $A(i, k)$
Źródło: opracowanie własne.

s	0	1	2	3	4	5
$p_S^{(7)}(s)$	0,481331	0,028249	0,025980	0,096678	0,126043	0,096937
s	6	7	8	9	10	11
$p_S^{(7)}(s)$	0,020886	0,029303	0,033515	0,024922	0,012391	...

Tab. 5. Wartości $p_S^{(7)}(s)$
Źródło: opracowanie własne.

gdzie z_p jest kwantylem rzędu p rozkładu normalnego standaryzowanego $N(0, 1)$ (Jóźwiak, Podgórski 2006: 112).

Ładunek bezpieczeństwa postaci θES określa wysokość środków ponad wartość oczekiwaną szkody, zapewniającą – z zadanym prawdopodobieństwem – pokrycie sumy szkód. Innymi słowy, dla zadanego poziomu ufności istnieje możliwość oszacowania wartości środków $(1+\theta)ES$, jakie przedsiębiorstwo powinno zgromadzić, aby pokryć wypłaty związane z realizacją ryzyka.

Przykładowe wartości ładunku bezpieczeństwa oraz względnego ładunku bezpieczeństwa zawiera tabela 6.

Tak więc przedsiębiorstwo powinno dysponować środkami na poziomie 53,201 tys. zł, aby z prawdopodobieństwem 0,8 pokryć wypłaty. Przy prawdopodobieństwie równym 0,9 zgromadzona kwota powinna wynosić 67,354 tys. zł, zaś dla prawdopodobieństwa 0,98–92,195 tys. zł, co stanowi aż ok. 353% wartości oczekiwanej sumy wypłat.

$\Phi(z_p)$	z_p	θ	θES
0,80	0,84162	1,03626	2,707461
0,82	0,91537	1,12706	2,944693
0,84	0,99446	1,22444	3,199128
0,86	1,08032	1,33016	3,475346
0,88	1,17499	1,44672	3,779886
0,90	1,28155	1,57793	4,122695
0,92	1,40507	1,73002	4,520064
0,94	1,55477	1,91434	5,001637
0,96	1,75069	2,15556	5,631885
0,98	2,05375	2,52871	6,606822

Tab. 6. Wartości ładunku bezpieczeństwa
Źródło: opracowanie własne.

d	p	F		
		5	3	1
1	0,0001	0	0	0,000102
	0,0005	0	0	0,001336
	0,0010	0	0	0,017243
	0,0050	0	0,000534	1
	0,0100	0,004004	1	1
	0,0500	1	1	1
2	0,0001	0	0	0,060961
	0,0005	0	0	0,104594
	0,0010	0	0,000001	0,186199
	0,0050	0	0,032038	0,978177
	0,0100	0,018590	0,962896	1
	0,0500	1	1	1
3	0,0001	0,001545	0,059707	0,438051
	0,0005	0,001930	0,068374	0,465461
	0,0010	0,002533	0,080536	0,499939
	0,0050	0,017405	0,239093	0,755563
	0,0100	0,106523	0,56202	0,940314
	0,0500	1	1	1
4	0,0001	0,092081	0,30476	0,620401
	0,0005	0,094672	0,310219	0,626297
	0,0010	0,097986	0,317101	0,633626
	0,0050	0,127597	0,449697	0,690320
	0,0100	0,172657	0,449697	0,755175
	0,0500	0,728783	0,923128	0,987575
5	dowolne	0,229016	0,452088	0,691926

Tab. 7. Prawdopodobieństwa $P(F\text{–}re>S)$
Źródło: opracowanie własne.

Przyjmując, że przedsiębiorstwo rozpatruje możliwość utrzymywania środków finansowych F na poziomie 50 tys. zł (30 tys. zł, 10 tys. zł), rozważane jest ubezpieczenie części lub całości posiadanego ryzyka. W wyniku zajścia szkody o wartości x, zostanie dokonana przez ubezpieczyciela wypłata $I(x)$. Zakłada się przy tym dostępność kontraktów ubezpieczeniowych, takich, że $0 \leq I(x) \leq x$, przy czym wszystkie wykonalne kontrakty o wartości oczekiwanej wypłaty $E(I(X))=\beta$ dostępne są za tę samą cenę P (Bowers i inni 1986: 16–17). Opłata za ubezpieczenie jednostki ryzyka wynosi przy tym p.

Rozpatrywany jest zakup ubezpieczenia typu *excess of loss*, zgodnie z którym wypłata ubezpieczyciela następuje wówczas, gdy wielkość szkody przekracza określoną wartość d (Bowers i inni 1986: 17, Montalbetti 1970: 129):

$$I_d(x)=\begin{cases} 0, & x<d, \\ x-d, & x \geq d. \end{cases}$$

Celem jest określenie wysokości retencji przedsiębiorstwa d minimalizującej:

$$P(F\text{–}re>S)\ ,$$

gdzie re oznacza płatność za kontrakty ubezpieczeniowe.

Oczywiste jest, że przy takiej samej wysokości retencji oraz identycznej wysokości opłaty ubezpieczeniowej wartości prawdopodobieństwa wzrastają, kiedy maleje poziom środków własnych (najwyższe wartości prawdopodobieństwa w kolumnie dla $F=1$).

Ponadto, przy zadanym poziomie F i p, prawdopodobieństwo $P(F\text{–}re>S)$ wzrasta wraz ze wzrostem poziomu retencji d. Przy zadanym poziomie środków własnych F, przedsiębiorstwo wybierze niższy poziom retencji d (niższa wartość prawdopodobieństwa). Prawdopodobieństwo $P(F\text{–}re>S)$ jest tym niższe im niższa wartość p.

Przy środkach finansowych na poziomie 10 tys. zł. i niskiej opłacie ubezpieczeniowej $p=0{,}0001$ przedsiębiorstwo dokona transferu ryzyka, wybierając poziom retencji $d=1$. Dla wyższej opłaty ubezpieczeniowej – np. $p=0{,}01$, wybierany będzie wyższy poziom retencji ryzyka. W skrajnym przypadku – przedsiębiorstwo nie zakupi kontraktu ubezpieczeniowego (poziom retencji $d=5$), gdyż opłata ubezpieczeniowa będzie przekraczała jego możliwości. W związku z tym można się spodziewać, że przewidywane wypłaty (wartość szkód) przekroczą wysokość posiadanych środków z prawdopodobieństwem ok. 0,69.

4. Wnioski

Funkcjonowaniu przedsiębiorstwa nieodłącznie towarzyszy ryzyko związane zarówno z podejmowaniem określonych działań i realizacją zamierzeń, jak i z zaniechaniem działań i zachowaniem istniejącego stanu rzeczy. Unikanie ryzyka nie zawsze jest możliwe, a przedsiębiorstwo nastawione na ignorowanie ryzyka ponosi największy i najmniej uzasadniony jego koszt – koszt bezczynności i trwogi. Wydaje się, że zwłaszcza w przypadku małych przedsiębiorstw, których możliwości finansowe i organizacyjne bywają niewystarczające na zapewnienie efektywnej retencji czy dywersyfikacji ryzyka, korzystne jest dokonanie transferu ryzyka przy pomocy ubezpieczenia. W celu zapewnienia odpowiedniej ochrony ubezpieczeniowej należy dokonać, między innymi, oszacowania ryzyka ubezpieczeniowego. Wydaje się, że odpowiednim modelem ryzyka jest zmienna losowa (lub proces losowy). Podczas dokonywania analizy i pomiaru ryzyka zasadnym okazuje się sięgnięcie do modeli aktuarialnych, a w określonych przypadkach do krótkookresowego modelu ryzyka indywidualnego. Wykorzystanie metod identyfikowania rozkładu sumy szkód (wypłat) pozwala przy tym na bliższe scharakteryzowanie ryzyka w przedsiębiorstwie, a co się z tym wiąże – na wybór odpowiedniego kontraktu ubezpieczeniowego. W praktyce często stosuje się tzw. ubezpieczenia „szyte na miarę". Efektywność tego narzędzia będzie tym większa, im lepiej będzie „zdjęta miara".

Podsumowując, zaprezentowany przykład – choć uproszczony i oparty na pewnych założeniach – wydaje się dobrze obrazować możliwość wykorzystania zamkniętego modelu ryzyka w przedsiębiorstwie. Umożliwia on, dzięki zastosowaniu algorytmu De Prila, określenie wartości oczekiwanej, wariancji i funkcji prawdopodobieństwa rozkładu sumy wypłat. Posłużenie się aproksymacją normalną pozwala ponadto na wyliczenie współczynnika bezpieczeństwa oraz poziomu retencji przy rozpatrywanym typie ubezpieczenia.

Informacje o autorce

Mgr Agnieszka Rurka – Zakład Badań Operacyjnych Zarządzania, Wydział Zarządzania Uniwersytetu Warszawskiego.
E-mail: agarurka@mail.wz.uw.edu.pl.

Przypisy

1 Oprócz ryzyka czystego (ang. *pure risk*) wyróżnia się ryzyko spekulatywne (ang. *speculative risk*), które wiąże się zarówno ze stratą, brakiem straty lub zysku oraz z uzyskaniem korzyści (zysku). Przegląd klasyfikacji ryzyka ubezpieczeniowego można znaleźć w: Ronka-Chmielowiec, W. 1997. *Ryzyko w ubezpieczeniach – metody oceny*, Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, s. 16–19.

2 Przegląd produktów ubezpieczeniowych dla przedsiębiorców można znaleźć np. w: Próchniak, E. 2001. *Ubezpieczenia majątkowe dla przedsiębiorców*, Bydgoszcz: Oficyna Wydawnicza OPO.

3 Koszty nabywania ubezpieczeń, jak również koszty podejmowanych w przedsiębiorstwie działań prewencyjnych czy wartość wydatków związanych z pokryciem strat, które nie będą pokryte przez inne podmioty, stanowią tzw. koszt ryzyka. Por. Sangowski T. (red.) 1999. *Vademecum ubezpieczeń gospodarczych (pośrednika ubezpieczeniowego)*, Poznań: Saga Printing, s. 180.

4 W literaturze statystycznej przyjmuje się, że liczebność zapewniająca dostateczną zbieżność dystrybuant pozwalająca zastosować aproksymację to $n=30$. Por. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1986), *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schaumburg, s. 38.

5 Prawdopodobieństwo wypłaty oznacza prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia losowego, polegającego na śmierci pracownika. W celu określenia wartości odpowiednich prawdopodobieństw można w tym przypadku skorzystać z tablic trwania życia mężczyzn (dla roku 2003).

6 Metoda rekursywna podana przez De Prila stanowi uogólnienie metody, którą White i Greville zaproponowali dla rozkładu liczby szkód (por. White, R.P., Greville, T.N.E 1959. *On computing the probability that exactly k of n independent events will occur*, Transactions of the Society of Actuaries, nr 11, s. 88–95, 96–99) oraz metody aproksymacji zagregowanego rozkładu szkód przedstawionej przez Kornya (por. Kornya P.S. 1983. *Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model*, Transactions of the Society of Actuaries, nr 35, s. 823–836, (dyskusja) 837-858). Metoda rekurencyjna dla modelu indywidualnego stanowi odpowiednik metody rekurencyjnej Panjera dla modelu kolektywnego (por. Panjer H.H. 1981. *Recursive evaluation of a family of compound distributions*, „ASTIN Bulletin", vol. 12, nr 1, s. 22–26).

7 Dowód np. w: De Pril N. 1986. *On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model*, „ASTIN Bulletin", vol. 16, nr 2, s. 110; Ostasiewicz W. (red.) 2001. Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, s. 116.

Bibliografia

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J. 1986. *Actuarial Mathematics*, Schaumburg: Society of Actuaries.

Cahn B., Sharma P.K. 1983. Discussion: Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model. *Transactions of the Society of Actuaries*, nr 35, s. 850–863.

De Pril, N. 1986. On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model. *ASTIN Bulletin*, vol. 16, nr 2, s. 109–112.

De Pril, N. 1988. Improved approximations for the aggregate claims distributions of a life insurance portfolio. *Scandinavian Actuarial Journal*, s. 61–68.

Feller, W. 1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, New York – London – Sydney: John Wiley & Sons.

Jakubowski, J., Sztencel, R. 2002. *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*, Warszawa: SCRIPT.

Jóźwiak, J., Podgórski, J. 2006. *Statystyka od podstaw*, Warszawa: PWE.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. 2001. *Modern actuarial risk theory*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kornya, P.S. 1983. Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model. *Transactions of the Society of Actuaries*, nr 35, s. 823–836, (dyskusja) 837–858.

Kowalczyk, P., Poprawska, E., Ronka-Chmielowiec, W. 2006. *Metody aktuarialne – zastosowania matematyki w ubezpieczeniach*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Luszniewicz, A., Słaby, T. 2001. *Statystyka z pakietem komputerowym STATISTICA™ PL - Teoria i zastosowania*, Warszawa: Wydawnictwo C.H.Beck.

Montalbetti, E. 1970. *Reasekuracja*, Warszawa: PWN.

Ostasiewicz, W. (red.) 2001. Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu.

Próchniak, E. 2001. *Ubezpieczenia majątkowe dla przedsiębiorców*, Bydgoszcz: Oficyna Wydawnicza OPO.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugles, J. 1999. *Stochastic processes for insurance and finance*, New York: John Wiley & Sons.

Ronka-Chmielowiec, W. (red.) 2002. *Ubezpieczenia – rynek i ryzyko*, Warszawa: PWE.

Ronka-Chmielowiec, W. 1997. *Ryzyko w ubezpieczeniach – metody oceny*, Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu.

Sangowski, T. (red.) 1999. *Vademecum ubezpieczeń gospodarczych (pośrednika ubezpieczeniowego)*, Poznań: Saga Printing.

Szymańska, K. 1997. *Jak i gdzie ubezpieczyć majątek firmy*, Gdańsk.

Szymczak, M. (red.) 1981. *Słownik języka polskiego*, tom III, Warszawa: PWN, s. 155.

White, R.P., Greville, T.N.E 1959. On computing the probability that exactly k of n independent events will occur. *Transactions of the Society of Actuaries*, nr 11, s. 88–95, 96–99.

Williams, A.C., Smith, M.L., Young, P.C. 2002. *Zarządzanie ryzykiem a ubezpieczenia*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.