

Liczący umysł. O mechanizmach poznawczych warunkujących wykonywanie prostych obliczeń

1. Wstęp

Wykonywanie prostych obliczeń, jak „ 3×8 ” czy „ $7 + 4$ ”, jest podstawową zdolnością matematyczną, wykorzystywaną każdego dnia. Jakie mechanizmy poznawcze kryją się za tą umiejętnością? W literaturze przedmiotu najczęściej opisywaną metodą wykonywania takich prostych obliczeń jest wydobywanie faktów arytmetycznych [Ashcraft 1992; Campbell, Epp 2005]. Są nimi zapisane w pamięci długotrwałej wyniki działań matematycznych. Sprawne posługiwanie się faktami arytmetycznymi oznacza, że w sytuacji, gdy musimy pomnożyć dwie liczby, na przykład cztery przez siedem, tak naprawdę nie wykonujemy żadnych obliczeń, tylko korzystamy z naszej wiedzy [Domahs, Delazer 2005; Penner-Wilger 2004].

W literaturze od lat osiemdziesiątych XX w. toczy się dyskusja na temat liczby i rodzaju reprezentacji umysłowych faktów arytmetycznych. Podczas nauki szkolnej dzieci spotykają się z wieloma zewnętrznymi postaciami działań (cyfry arabskie, liczebniki, znaki graficzne, np. kropki), ale kwestią nierozstrzygniętą pozostaje pytanie, w jaki sposób wiedza o ich wynikach reprezentowana jest w umyśle. Hipoteza magazynu fonologicznego [Dehaene, Cohen 1995] oraz hipoteza magazynu semantycznego [McCloskey, Caramazza i in. 1985] zakładają, że wewnętrzna reprezentacja faktów arytmetycznych przybiera tylko jedną postać (odpowiednio fonologiczną bądź semantyczną). Z kolei hipoteza złożonego kodowania [Campbell, Clark 1988] postuluje, że działania oraz ich wyniki mogą być zapisane w umyśle pod wieloma różnymi postaciami zarówno werbalnymi (np. artykulacyjna, fonologiczna), jak i niewerbalnymi (np. wzrokowa i ruchowa reprezentacja cyfr arabskich, reprezentacja semantyczna).

Zgodnie z hipotezą magazynu fonologicznego fakty arytmetyczne przechowywane są w pamięci w postaci fonologicznych ciągów. Wejściowa postać zadania przekształcana jest automatycznie na reprezentację fonologiczną, np. $6 \times 8 \rightarrow$ /sześć razy ośm/, która pozwala na dokończenie wyuczonego ciągu słów /sześć razy ośm czterześci ośm/. Wydobyty w ten sposób wynik może następnie zostać przekształcony na pożądaną formę wyjściową, np. 48. Zgodnie z hipotezą magazynu fonologicznego w ten sposób wydobywane są wszystkie wyuczone na pamięć fakty arytmetyczne bez względu na działanie, jakiego dotyczą (sztandarowym przykładem jest mnożenie w zakresie stu, które w wielu krajach zostaje pamięciowo opanowane we

wczesnych latach edukacji). Jest to tzw. **asemantyczna, bezpośrednia droga** wykonywania obliczeń. Asemantyczna, ponieważ recytując z pamięci formułkę, nie trzeba wcale uzmysławiać sobie znaczenia wypowiedzianych słów.

Hipoteza o zależnym od języka kodzie zapisu faktów arytmetycznych została potwierdzona m.in. w badaniach nad osobami dwujęzycznymi, które sprawniej rozwiązywały nowo wyuczone na pamięć działania arytmetyczne w języku, w którym się ich uczyły [Spelke, Tsivkin 2001].

Innym sposobem wykonywania prostych działań arytmetycznych jest opisana w modelu potrójnego kodowania tzw. **droga semantyczna, pośrednia** [Dehaene, Cohen 1995]. Według autorów pozwala ona na dokonywanie obliczeń, tj. *quasi-przestrzennych* operacji na ilościowej reprezentacji liczb, czyli reprezentacji zawierającej informację o ich wielkości (stąd nazwa: droga semantyczna). Tak obliczane są działania z zakresu odejmowania oraz wszystkie inne, których wyniki nie zostały wyuczone na pamięć.

2. Cel badania

Celem badania było określenie mechanizmów poznawczych biorących udział w wykonywaniu dwóch różnych działań arytmetycznych: mnożenia i odejmowania. Dokładniej chodziło o określenie roli procesów mowy oraz procesów wyobrażeniowo-przestrzennych w rozwiązywaniu obu tych rodzajów działań. Hipotezy badawcze zakładały, że zaburzenia mowy związane będą z zaburzeniami wykonywania mnożenia, zaburzenia przestrzenne zaś – z zaburzeniami wykonywania odejmowania.

3. Metoda

Zaplanowano przeprowadzenie dwóch studiów przypadku – pacjenta z deficytami przestrzennymi oraz pacjenta z zaburzeniami mowy – i porównanie ich wyników do wyników grupy kontrolnej. Przeprowadzono diagnozę zdolności przestrzennych i funkcji mowy (zmienne niezależne) oraz analizę umiejętności arytmetycznych z zakresu mnożenia i odejmowania (zmienne zależne).

Do oceny zaburzeń funkcji mowy wybrano następujące testy:

1. Bostoński Test do Diagnozy Afazji (BDAE) [Goodglass, Kaplan 1983] – zadania mierzące zdolności rozumienia (podtesty IIC, ID), powtarzania (podtesty IIID, IIE) oraz ekspresji mowy (podtesty IIIB, IIIC),
2. test płynności słownej kategoryjnej i fonetycznej [Lezak, Howieson i in. 2004, s. 545–548].

Do oceny zaburzeń funkcji przestrzennych zastosowano następujące próby:

1. Z WAIS-PL(R) [Brzeziński, Gaul i in. 2004] podtest Klocki oraz Układanki, mierzące orientację przestrzenną i koordynację wzrokowo-ruchową. Klocki służą również ocenie zdolności do analizy i syntezy wzrokowej, a Układanki

– do tworzenia całości dzięki wykrywaniu wewnętrznych związków między elementami tej całości.

2. Test Złożonej Figury Reya-Osteriettha [Strupaczewska 1990] oceniający organizację percepcyjną i koordynację wzrokowo-ruchową.
3. Próba eksperymentalno-kliniczna wzorowana na Mental Re-Orientation [Ratcliff 1979, za: Lezak, Howieson i in. 2004, s. 345–346] mierząca zdolność umysłowych rotacji figur.

Podczas próby wzorowanej na Mental Re-Orientation badający pokazuje serię 32 rysunków, na których znajduje się postać ludzka trzymająca w każdej ręce piłkę, w jednej białą, w drugiej czarną. Badany jest proszony o określenie ręki (lewa lub prawa), w której znajduje się czarna piłka. Postać narysowana jest przodem lub tyłem, stoi na nogach lub na głowie. Za każdą poprawną odpowiedź przyznawany jest jeden punkt.

Wszystkie testy potraktowano jako testy mocy, oceniano więc możliwości badanych, a nie szybkość. Pozwoliło to wyeliminować zmienność wyników, będącą rezultatem spowolnienia psychoruchowego pacjentów, a nie zaburzeń zmiennych zależnych. I tak, w Klockach zliczano liczbę prawidłowo ułożonych wzorów – punkt przyznawano nawet, jeśli ukończono wzór po przewidzianym na to czasie. W Układankach obliczano sumę prawidłowo połączonych elementów. W Teście Złożonej Figury brano pod uwagę jedynie punkty zdobyte za kopię figury.

Dodatkowo zastosowano także Krótką Skalę Oceny Stanu Psychicznego (MMSE) [Folstein, Folstein i in. 1975], powszechnie używaną do wykrywania objawów otępienia, oraz Test Łączenia Punktów część A i B (TMT) [Reitan 1958] do diagnozy funkcji wykonawczych.

Zdolność wykonywania prostych obliczeń oceniono na podstawie badania komputerowego. Składało się ono z trzech dużych części: mnożenia, odejmowania oraz liczb. W pierwszej części uczestnicy wykonywali 81 działań mnożenia od 1×1 do 9×9 , w części drugiej – 36 działań odejmowania (od $9 - 8$ do $2 - 1$). Zadaniem w trzeciej części była identyfikacja 69 liczb (od 1 do 85). Każda część składała się z czterech bloków, różniących się postacią wejściową bodźców (cyfrowa lub słowna) lub/i formą podawania odpowiedzi (cyfrowa lub słowna), według poniższego schematu:

	Postać zadania bodźcowego	Forma odpowiedzi
A	Cyfry arabskie	Cyfry arabskie
B	Słowa	Cyfry arabskie
C	Cyfry arabskie	Słowa
D	Słowa	Słowa

Bodźce wzrokowe (np. 4×7) wyświetlano na ekranie laptopa białą czcionką o rozmiarze 120 na czarnym tle. Przykłady słuchowe zostały nagrane w profesjonalnym studiu nagraniowym i czytane były przez zawodowego lektora. Uczestnicy słyszeli działania w słuchawkach, a odpowiadali za pomocą klawiatury numerycznej (bloki A, B) lub ustnie do mikrofonu zamontowanego przy słuchawkach (bloki

C, D). Cyfry klawiatury numerycznej opisano w porządku wzrastającym od 0 do 9, a przyporządkowano je klawiszom: 0 – A, 1 – S, 2 – D, 3 – F, 4 – G, 5 – H, 6 – J, 7 – K, 8 – L, 9 – ;. Program zapisywał odpowiedź oraz czas potrzebny na jej udzielenie. Przy wzrokowej prezentacji bodźców czas mierzono od momentu wyświetlenia działania lub liczby. Bodźce te znikaly po rozpoczęciu podawania odpowiedzi. Przy bodźcach werbalnych czas odmierzano od momentu zakończenia prezentacji pliku dźwiękowego. Za koniec każdego z nich uznawano zakończenie wybrzmiewania słów, a określano to precyzyjnie z pomocą programu Speech Analyzer wersja 2.7, służącego do wizualizacji dźwięków mowy. Czas przestawano mierzyć w momencie naciśnięcia na klawiaturze numerycznej pierwszej cyfry (bloki A, B) lub rozpoczęcia podawania odpowiedzi ustnej, którą rejestrował mikrofon (bloki C, D).

W części Liczby uczestnicy badania zapisywali, czytali bądź powtarzali liczby w zależności od bloku. Zadanie to miało na celu określenie szybkości percepcyjno-motorycznej każdej osoby biorącej udział w badaniu. Rozwiązanie każdego działania arytmetycznego, prócz właściwych sobie operacji obliczeniowych, obejmuje również procesy rozumienia i generowania liczb. Średnie czasy reakcji w części Liczby pozwoliły na zredukowanie zarejestrowanego czasu podawania wyniku o czas potrzebny na rozkodowanie i zakodowanie informacji. Otrzymana w ten sposób wielkość precyzyjnie określa czas samego wykonania działania. Dla każdej osoby obliczono średni czas reakcji w poszczególnych blokach części Liczby. Następnie odjęto otrzymaną wartość od czasu rozwiązania każdego z 81 działań w częściach Mnożenie i Odejmowanie. W ten sposób otrzymano indywidualne względne czasy reakcji. Na tych wynikach przeprowadzono analizy statystyczne.

Przebadano 102 osoby, w tym 52 zdrowe i 50 pacjentów z uszkodzeniem mózgu lub/i zaburzeniami poznawczymi. Charakterystykę obu grup zamieszczono w Tabeli 1.

Tabela 1. Charakterystyka grupy klinicznej oraz kontrolnej pod względem wieku, płci i lat edukacji

	wiek			płeć		lata edukacji		
	x	sd	zakres	kobiety	mężczyźni	x	sd	zakres
Grupa kliniczna	55	14	16–81	22	28	13,2	3,4	4–21
Grupa kontrolna	53	16	16–76	26	26	15,5	2,7	7–20

x – średnia, sd – odchylenie standardowe

Obliczono średnie wyniki testów neuropsychologicznych dla grupy klinicznej oraz kontrolnej. W grupie klinicznej przeliczono je następnie na wyniki standaryzowane. Stworzono wskaźniki kondycji funkcji mowy oraz funkcji przestrzennych, wyciągając średnią arytmetyczną wyników standaryzowanych wymienionych powyżej testów. Do opisu studiów przypadku wybrano dwie osoby.

Pan Adam, lat 67, po technikum telekomunikacyjnym, kierownik w dziale technicznym, obecnie na emeryturze, ze wstępną diagnozą początkowej fazy otępienia naczyniopochodnego, z zaburzeniami przestrzennymi (wskaźnik kondycji funkcji mowy: 0,65, wskaźnik kondycji funkcji przestrzennych: -0,38).

Pan Edward, lat 77, po studiach filozoficznych i prawniczych, publicysta, z diagnozą początkowej fazy choroby Alzheimera, z zaburzeniami mowy (wskaźnik kondycji funkcji mowy: 0,18, wskaźnik kondycji funkcji przestrzennych: 0,32).

Tabela 2. przedstawia wyniki obu mężczyzn oraz średnie wyniki testów w grupie kontrolnej i klinicznej. Kursywą zaznaczono obniżone wyniki testów, które w zasadniczy sposób wpłynęły na ostateczną klasyfikację rodzaju zaburzenia.

Tabela 2. Wyniki surowe pana Adama i pana Edwarda oraz średnie i odchylenia standardowe wyników surowych w grupie klinicznej i kontrolnej

	pan Adam	pan Edward	grupa kliniczna		grupa kontrolna	
			x	sd	x	sd
Rozumienie (BDAE)	19	19	17,1	3,3	18,8	0,4
Powtarzanie (BDAE)	26	26	23,5	4,4	25,9	0,5
Ekspresja (BDAE)	12	14	11	2	12,3	1,2
Płynność słowna						
– kategoryalna	27	15	19,9	9,9	29,3	7,4
– fonetyczna	17	3	8,9	5,8	15,8	5,9
Klocki	3	9	5,9	2,7	8,3	1,1
Układanki	17	10	16,8	8,5	25,3	4,6
Złożona Figura Reya	34	32	28,6	10,5	35,4	0,9
Rotacje	17	26	22,6	5,7	27,9	3,4
MMSE	29	24	25,7	4,6	28,7	1,3
TMT A	40	68	107	86	47	25
TMT B	178	223	219	132	94	42
TMT B-A	138	155	111	79	45	25

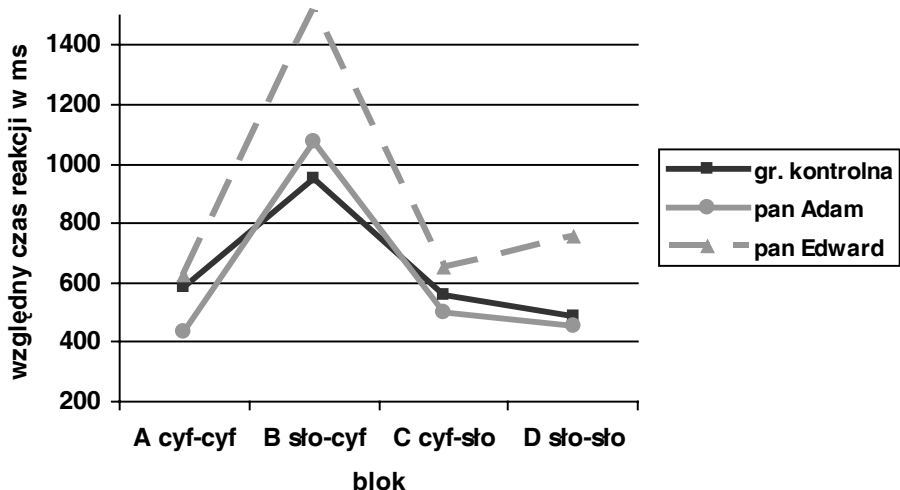
x – średnia wyników, sd – odchylenie standardowe, Rotacje – próba wzorowana na Mental Re-Orientation, MMSE – Krótka Skala Oceny Stanu Psychicznego, TMT – Test Łączenia Punktów

4. Wyniki

Przeprowadzono dwa rodzaje analiz: porównano względne czasy reakcji oraz przeprowadzono analizę błędów. W grupie osób zdrowych obliczono średnie względne czasy reakcji dla każdego działania w każdym bloku części Mnożenie oraz Odejmowanie. Porównania względnych czasów reakcji dotyczyły więc stosunku wyników danego pacjenta do uśrednionych wyników grupy kontrolnej.

4.1. Wyniki pana Adama

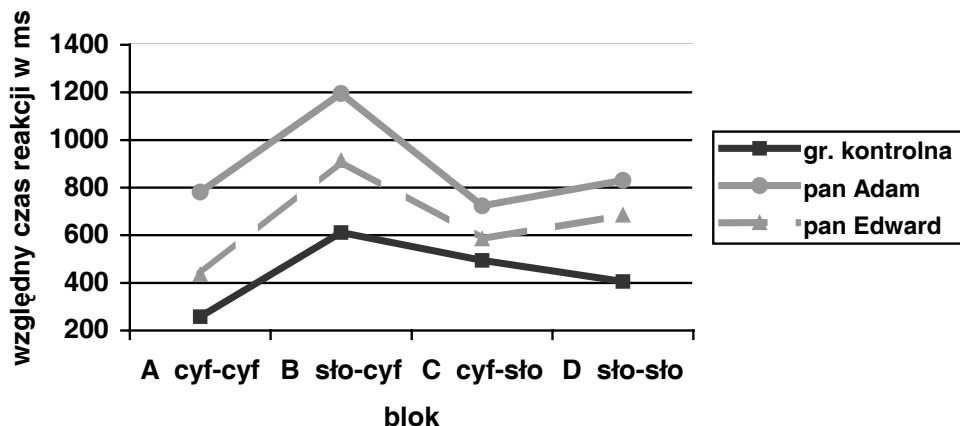
Mnożenie. Względne czasy reakcji w części Mnożenie różniły się istotnie jedynie w bloku A i to na korzyść pana Adama ($t = 2,08$, $p < 0,04$). Również w blokach C i D pan Adam podawał odpowiedzi szybciej od grupy kontrolnej, ale różnice te nie osiągnęły progu istotności ($p > 0,1$). Wyniki prezentuje Rycina 1.



Rycina 1. Średnie względne czasy reakcji pacjentów oraz grupy kontrolnej w części Mnożenie

W Tabeli 3. wypisano błędy, jakie pan Adam popełnił w Mnożeniu. Ich liczba w poszczególnych blokach nie różniła się [$\chi^2(3) = 3,2$, $p > 0,3$].

Odejmowanie. W tej części względne czasy reakcji pana Adama we wszystkich czterech blokach okazały się dłuższe od wyników grupy kontrolnej (wartość testu t od 4,1 do 6,8, $p < 0,001$). Obrazuje to Rycina 2.



Rycina 2. Średnie względne czasy reakcji pacjentów oraz grupy kontrolnej w części Odejmowanie

I w tym przypadku test χ^2 nie wykazał istotnych różnic między liczbą błędów w poszczególnych blokach [$\chi^2(3) = 4, p > 0,2$], co zaprezentowano w Tabeli 3.

4.2. Wyniki pana Edwarda

Mnożenie. Pan Edward wykonywał działania wolniej od grupy kontrolnej we wszystkich czterech blokach. Na granicy istotności statystycznej znalazła się różnica czasów w bloku A ($t = 2, p = 0,056$), natomiast w pozostałych przypadkach przewaga grupy kontrolnej nie budziła wątpliwości (wartości testu t od 4,4 do 6,7 przy $p < 0,001$). Wyniki obrazuje Rycina 1.

Wszystkie błędy popełnione przez pana Edwarda przedstawiono w Tabeli 3. Nie wykryto istotnych różnic między liczbą błędów w poszczególnych blokach [$\chi^2(3) = 3,5, p > 0,3$].

Odejmowanie. Również w tej części pan Edward wolniej rozwiązywał działania w porównaniu z grupą kontrolną. Istotność statystyczną osiągnęły różnice w blokach B ($t = 3,1, p < 0,005$) i D ($t = 5,5, p < 0,001$), a więc zawsze tam, gdzie działania prezentowano słuchowo. Wyniki przedstawia Rycina 2.

Wszystkie błędy popełnione przez pacjenta w bloku A polegają na wpisaniu jako odpowiedzi odjemnika (por. Tabela 3). Pomyłki nie wynikają więc z błędów obliczeniowych, a raczej z nieskutecznego hamowania reakcji automatycznych czy niepożądanych, czyli deficytu funkcji wykonawczych. W tym przypadku statystyka χ^2 ujawniła istotne różnice między liczbą błędów w poszczególnych blokach [$\chi^2(3) = 15, p > 0,005$].

Porównania liczby błędnych odpowiedzi między obu pacjentami wykazały, że istotnie więcej błędów popełnił pan Edward w mnożeniu [$\chi^2(1) = 4,4, p < 0,04$].

Tabela 3. Błędy pana Adama i pana Edwarda w Mnożeniu i Odejmowaniu

	Mnożenie				Odejmowanie			
	cyfry- cyfry	słowa- cyfry	cyfry- słowa	słowa- słowa	cyfry- cyfry	słowa- cyfry	cyfry- słowa	słowa- słowa
pan Adam	3 x 8 = 18 8 x 6 = 56	4 x 6 = 36 7 x 9 = 54 9 x 1 = 8	2 x 1 = 1 4 x 1 = 1 7 x 9 = 54 9 x 1 = 18 9 x 7 = 53	4 x 6 = 32 5 x 9 = 40 7 x 4 = 42 8 x 7 = 28 9 x 3 = 18 9 x 7 = 54 9 x 8 = 18	8 - 2 = 7	4 - 2 = 3	8 - 6 = 5 8 - 7 = 6 8 - 2 = 7 8 - 4 = 5	5 - 4 = 5 8 - 2 = 7 3 - 2 = 2
pan Edward	2 x 8 = 18 7 x 9 = 61 8 x 7 = 79 9 x 4 = 32	2 x 6 = 16 4 x 8 = 24 5 x 7 = 45 7 x 6 = 36 7 x 9 = 61 8 x 6 = 46 9 x 4 = 32	3 x 8 = 18 5 x 1 = 1 7 x 6 = 36	4 x 5 = 32 5 x 8 = 48 7 x 6 = 18 7 x 8 = 42 7 x 9 = 36 8 x 6 = 56 9 x 3 = 18 9 x 4 = 32	8 - 7 = 7 8 - 5 = 5 7 - 5 = 5 6 - 5 = 5 4 - 3 = 3 3 - 2 = 2	8 - 1 = 8		

5. Dyskusja

Spowolnienie wykonywania odejmowania przez pana Adama sugeruje, że procesy wyobrazeniowo-przestrzenne odgrywają tu istotną rolę. Wydłużenie czasu może wynikać z zakłócenia *quasi-przestrzennych* operacji na umysłowej osi liczbowej. Fakt, że podawane odpowiedzi były z reguły poprawne, oznacza, że aktywacja właściwej reprezentacji, zarówno przy bodźcach słuchowych, jak i wzrokowych, była prawidłowa.

Z kolei wolniejsze podawanie wyników odejmowania przez pana Edwarda w blokach, gdzie działania czytano, wskazuje na problemy z rozumieniem słów. Istota problemu może więc polegać na utrudnionej aktywacji semantycznej reprezentacji liczb na podstawie ich słownej postaci wejściowej [por. Damian 2004].

Jeśli chodzi o mnożenie, to wyniki pana Adama oznaczają, że procesy wyobrazeniowo-przestrzenne nie mają tu tej samej wagi co w odejmowaniu. Rezultaty pana Edwarda wskazują z kolei na kluczową w wykonywaniu mnożenia funkcję mowy. Wydłużone czasy reakcji bez względu na wejściową postać działania czy formę odpowiedzi oraz dodatkowo podwyższony wskaźnik błędów, sugerują, że nastąpił u pana Edwarda rozpad wyuczonych ciągów słów, umożliwiających sprawne, czyli szybkie i poprawne, wykonywanie mnożenia. Jednak stosunkowo najlepszy wynik pacjenta w bloku A, gdzie działania prezentowano w postaci cyfr arabskich, a odpowiedzi udzielano za pomocą klawiatury numerycznej, wskazuje na istnienie innego, obok fonologicznego, kodu zapisu faktów arytmetycznych. Wynik ten podważa hipotezę magazynu fonologicznego. Możliwe jest, iż fakty arytmetyczne z zakresu mnożenia zapisane są równoległe także w kodzie wzrokowo-cyfrowym (podobną hipotezę wysuwają Noël i współpracownicy [1997]), ewentualnie semantycznym [por. Whalen, McCloskey i in. 2002].

Podsumowując, opisane studia przypadku potwierdzają hipotezy badawcze i dowodzą, że mnożenie i odejmowanie angażują odmienne mechanizmy poznawcze. W przypadku mnożenia kluczowymi wydają się reprezentacje słowne i procesy mowy, natomiast w odejmowaniu decydującą rolę odgrywają procesy wyobrazeniowo-przestrzenne, wykonywane najprawdopodobniej na reprezentacji semantycznej liczb. Dodatkowo, wyniki podważają hipotezy pojedynczego kodu zapisu faktów arytmetycznych i sugerują, że mogą być one zapisane przynajmniej pod dwiema postaciami. Kwestią do dalszych badań pozostaje m.in. możliwość wczesnej diagnozy otępienia na podstawie oceny zdolności arytmetycznych.

BIBLIOGRAFIA

- Ashcraft M.H. 1992, *Cognitive arithmetic: a review of data and theory*, „Cognition”, 44, s. 75–106.
- Brzeziński J., Gaul M., Hornowska E., Jaworowska A., Machowski A., Zakrzewska M. 2004, *Skala Inteligencji D. Wechslera dla Dorosłych – wersja zrewidowana – renormalizacja WAIS-R (PL)*, Pracowania Testów Psychologicznych PTP, Warszawa.

- Campbell J.I.D., Clark J.M. 1988, *An encoding-complex view of cognitive number processing: Comment on McCloskey, Sokol, and Goodman (1986)*, „Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition”, 15, s. 920–929.
- Campbell J.I.D., Epp L.J. 2005, *Architectures for arithmetic [w]: Handbook of Mathematical Cognition*, red. J.I.D Campbell, Psychology Press, New York, s. 347–360.
- Damian M. 2004, *Asymmetries in the processing of Arabic digits and number words*, „Memory and Cognition”, 31, s. 164–171.
- Dehaene S., Cohen L. 1995, *Towards an anatomical and functional model of number processing*, „Mathematical Cognition”, 1, s. 83–120.
- Domahs F., Delazer M. 2005, *Some assumptions and facts about arithmetic facts*, „Psychology Science”, 47, s. 96–111.
- Folstein M.F., Folstein S.E., Mc Hugh P.R. 1975, *Mini-mental State: a practical method for grading the cognitive state of patients the clinicians*, „Journal of Psychiatric Research”, 12, s. 189–198.
- Goodglass H., Kaplan E. 1983, *Boston Diagnostic Aphasia Examination (BDAE)*, Lea and Febiger, Filadelfia.
- Lezak M.D., Howieson D.B., Loring D.W. 2004, *Neuropsychological Assessment*, Oxford University Press, New York.
- McCloskey M., Caramazza A., Basili A. 1985, *Cognitive mechanisms in number processing and calculation: evidence from dyscalculia*, „Brain and Cognition”, 4, s. 171–728.
- Noël M.-P., Seron X. 1992, *Notational constraints and number processing: a reappraisal of the Gonzalez and Kolers (1982) study*, „Quarterly Journal of Experimental Psychology”, 45A, s. 451–478.
- Noël M.-P., Fias W., Bkysbaert M. 1997, *About the influence of the presentation format on arithmetical-fact retrieval processes*, „Cognition” 63, s. 335–374.
- Penner-Wilger M. 2004, *Just the facts: On the representation of arithmetic facts in the adult mind/brain*, Carleton University Cognitive Science Technical Report 2004–2005, s. 1–24.
- Reitan R.M. 1958, *The validity of the Trail Making Test as an indicator of organic brain damage*, „Perceptual and Motor Skills”, 8, s. 271–276.
- Spelke E., Tsivkin S. 2001, *Language and number: a bilingual training study*, „Cognition”, 78, s. 45–88.
- Strupaczewska B. 1990, *Test Złożonej Figury Rey – Osterrietha (TFZ). Podręcznik*, Centralny Ośrodek Metodycznego Poradnictwa Wychowawczo-Zawodowego MEN, Warszawa.
- Whalen J., McCloskey M., Lindemann M., Bouton G. 2002, *Representing arithmetic table facts in memory: Evidence from acquired impairments*, „Cognitive Neuropsychology”, 19, s. 505–522.