Res Rhetorica
ISSN: 2392-3113

Retoryka liczb
Rhetoric of Numbers

5 (4) 2018 EDITOR: EWA MODRZEJEWSKA

REAKCJE | REACTIONS

MICHAŁ SZUREK
UNIWERSYTET WARSZAWSKI
M.Szurek@mimuw.edu.pl

Co mówią do nas liczby?
What do the numbers tell us?

MICHAŁ SZUREK
UNIWERSYTET WARSZAWSKI
M.Szurek@mimuw.edu.pl

Co mówią do nas liczby?

> Prócz pułkownika było pięciu oficerów. Był major Hunter, mały człowiek opętany liczbami, mały człowiek, który – będąc jednostką odpowiedzialną – wszystkich ludzi dzielił bądź na odpowiedzialnych bądź nie przystosowanych do życia. Major Hunter był inżynierem, ale – wyjąwszy okoliczność wojny – nikomu nie przyszłoby do głowy powierzać mu funkcji kierowniczych. Major Hunter ustawiał ludzi w szeregu jak cyfry, dodawał, odejmował i mnożył. Był raczej specem od arytmetyki niż matematykiem. Nic z radości, z muzyki, wielkości matematyki wyższej nigdy nie uderzyło mu do głowy. Ludzie mogli różnić się wzrostem, wagą czy barwą, podobnie jak różni się 6 od 8, poza tym wszakże niewielkie dzieliły ich różnice. Żenił się parę razy i dotąd nie mógł zrozumieć, dlaczego wszystkie żony stawały się coraz bardziej rozdrażnione, nerwowe, nim wreszcie opuściły go na zawsze.
>
> John Steinbeck, *Księżyc zaszedł*, tłum. K. Muszałówna,
> Wydawnictwo Magart, 2013

Co mówią do nas liczby? Do „nas”, czyli do kogo?

Jestem matematykiem, całe zawodowe życie (tj. od 1968 roku) spędziłem na wydziale matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego (nie podaję pełnej nazwy, bo nazywał się różnie). Chcę pokazać niematematykom, jak my (tzn. matematycy) patrzymy na liczby. Postaram się przy tym nie przestraszyć Czytelników naukowym żargonem nauk ścisłych. Ubarwię tekst powiedzeniami i cytatami z literatury. Dziękuję dr Agnieszce Szurek za podanie mi wielu z nich.

Z liczbą – jak z koniem: jaka jest, każdy widzi. Szkoła pitagorejska (VI wiek p.n.e.) nadała liczbom status bytów idealnych, ale konkretnych. Istnieje coś takiego jak liczba – tak samo, jak stół, wół i człowiek. Jak Czytelnik wie (lepiej od autora), w Średniowieczu toczono spór o uniwersalia. Można go dzisiaj streścić tak: czy gdyby nie było ludzkości, to czy 7 byłoby liczbą pierwszą? Czy w ogóle byłyby liczby? Czy liczby istnieją niezależnie od nas, czy tylko są wytworem naszego umysłu? Odpowiedź nie jest ważna. W każdym razie dla matematyków. Na dobrą sprawę każdy matematyk jest jednak platonikiem: nie można badać skomplikowanych tworów, uważając, że ich w ogóle nie ma, że są tylko znakami na kartce papieru i znikną wraz z ludzkością. Liczbę, jak każdy obiekt matematyczny z wyjątkiem zbioru, można precyzyjnie zdefiniować, ale definicja jest bardzo złożona, wyrafinowana i nawet matematykom niepotrzebna w praktyce zawodowej.

Zostawiając filozoficzne rozważania na boku, odpowiedzmy na postawione już pytanie: co mówią do nas liczby? Zaczniemy od początku, to jest od zera (!).

Zero

Ludzie są jak zera – nabierają znaczenia dzięki pozycji.

(przypisywane Napoleonowi)

Pan jest zerem, panie pośle!

(Leszek Miller do Zbigniewa Ziobry na sejmowej komisji śledczej ws. tzw. afery Rywina, 2005)

W 1993 r. na jednej z wielu konferencji matematycznych w Cambridge uwagę specjalistów przyciągnęła seria wykładów Andrew Wilesa pod wiele znaczącym (!) tytułem „Formy modularne, krzywe eliptyczne i reprezentacje Galois” (podaję we własnym przekładzie). Matematycy wyczuwali, co w trawie piszczy i każdy kolejny wykład gromadził coraz więcej słuchaczy, a na ostatnim nie dało się wetknąć przysłowiowej szpilki. Po godzinie wykładowca postawił na wolnym kawałku tablicy znaki : = **0**, po czym dodał skromnie *I think I’ll stop here*. Sala oniemiała, a potem zaczęły się owacje, jakby to Wiles zdobył zwycięskiego gola w finale mistrzostw świata (w chwili, gdy to piszę, właśnie trwają).

Wykładowca udowodnił, że coś tam jest równe zero[1]. I za to taki aplauz? A właśnie. Bo owo zero znaczyło, że Andrew Wiles rozwiązał najsłynniejsze zadanie matematyczne, postawione w 1660 r. (350 lat temu): równanie Fermata (kto naprawdę chce wiedzieć, o co chodzi, niech… poprosi Google’a). Nie dość, że pokolenia matematyków atakowały problem bezskutecznie, poświęcając temu całą karierę naukową, to z prób rozwiązania wypączkowały co najmniej dwie dyscypliny matematyczne: algebraiczna teoria liczb i algebra abstrakcyjna.

Takie znaczenie retoryczne w matematyce ma zero. Równania najwygodniej zapisywać nam w postaci: *coś* = 0. Poza tym zero i jedynka są ważne jako *elementy obojętne* przy dodawaniu i mnożeniu. Dodanie zera do liczby ma ten sam efekt, co pomnożenie jej przez jedynkę. Zero jest też używane jako początek. Jeżeli temperatura jest zero, to nie znaczy, że jej w ogóle nie ma. Odchylenie *zero*

1. Poloniści zawsze poprawiają na „równe zeru”. Nielogiczne! Bo konsekwentnie trzeba by pisać „równe jednemu”, „równe dwom”, „równe dwa tysiące osiemnastu”.

od normy znaczy, że wszystko idzie dobrze. Bez zera wszelkie rachunki byłyby bardzo trudne. Dlatego Rzymianie nie byli dobrymi matematykami.

Jeden

Jednostka – zerem! Jednostka – bzdurą!

(Włodzimierz Majakowski)

Jedność większa od dwóch

(Adam Mickiewicz)

Ważniejsza filozoficznie jest **jedynka**. Bardzo często chodzi nam o to, by rozwiązanie równania było jedyne. Są niezliczone techniki sprawdzania, czy tak jest; zależy to też od równania. Jeszcze ważniejsza jest *odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna*. Łatwo to zrozumieć na przykładach. Podobno u Inków zawierano małżeństwa w ten sposób, że określonego dnia kawalerowie ustawiali się w jednym rządku, panny w drugim i na kogo wypadnie, na tego bęc. Podobno wolno było ustawić się, żeby wypadło po myśli już kochającej się pary. Ale kapłan ustalał *odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną*. Jeden do jednego (no, powiedzmy, do jednej). W sportach zespołowych mamy często taki sposób obrony: każdy pilnuje swojego gracza drużyny przeciwnej. Funkcje wzajemnie jednoznaczne są najważniejsze w matematyce. Zauważmy, że do porównywania („gdzie jest więcej") nie trzeba mieć umiejętności liczenia. Jeśli chcę wiedzieć, w której kupce jest więcej kamieni, biorę po jednym z każdej i odrzucam na bok. W tej, w której skończą się wcześniej, było mniej kamieni.

Spójrzmy na równanie $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$. Każdy maturzysta powinien umieć wykazać, że rozwiązanie jest tylko jedno. Ale to nieważne, bo chodzi mi o to, jak to sformułuje matematyk. Powie, że istnieje *dokładnie jedno* rozwiązanie. Kto słyszy ten zwrot po raz pierwszy, dziwi się: jak to dokładnie jedno? Przecież wiadomo, że nie może być półtora rozwiązania ani 0,9. Matematykowi zaś chodzi o podkreślenie, że „tylko jedno". Tadeusz Kotarbiński powiedział na swoim 70-leciu, że matematyka jest nielogiczna: kto ma 70 książek, to ma i 30, ale kto ma 70 lat, ten nie ma 30!

Dla starożytnych Greków jedynka była za mała, żeby być liczbą. Mówili oni, że jedynka mówi tylko o istnieniu, a nie o liczebności. Dopiero Archytas z Tarentu (428 – 350 p.n.e) uczynił z jedynki liczbę taką, jaką znamy dzisiaj. Jeszcze dalej poszedł Proklos, dla którego nawet dwójka nie była liczbą, bo powiększa się tak samo przy dodawaniu, jak i przy mnożeniu – to znaczy, że dwa dodać dwa jest tym samym, co dwa razy dwa – a to Proklosowi przeszkadzało (choć z dzisiejszego punktu widzenia trudno dociec, dlaczego).

Dwa

I dwa obaczysz księżyce.

(Adam Mickiewicz, *Świteź*)

No właśnie, **dwójka**. To bardzo ważna liczba. Co mają wspólnego ze sobą: pojedynek, mecz, ślub, symetria, odwrotność, znak, przeciwieństwo, para, partner, debel, duet, bliźniaki? Liczbę dwa. Matematyka jest pełna różnych dwoistości, dualności i symetrii. Prawo-lewo, góra-dół, przód-tył. Odbicia w lustrze, odbicia w zwierciadle kulistym (nazywa się to inwersją). W geometrii znana jest konstrukcja, która zamienia punkty na proste, a proste na punkty. Śruby mogą być lewo- i prawoskrętne.

W starożytności przedkładano liczby nieparzyste nad parzyste, o czym pisał Wergiliusz: *numero deus impare gaude*. Dziś jest różnie. Na ogół parzystość jest odbierana jako coś pożądanego, nieparzystość jest zaś dziwna i zła. Wyjątki są nieliczne: idąc na imieniny, kupujemy solenizantce nieparzystą liczbę kwiatów (zwyczaj znany chyba tylko w Polsce?). Po angielsku *odd number* to liczba nieparzysta, po niemiecku liczby nieparzyste to *ungerade Zahlen*, a więc „liczby nie-proste". po rosyjsku mamy чётные и нечётные числа, w polszczyźnie jeszcze w XVI wieku *cetno* i *licho* znaczyło właśnie *parzyste* i *nieparzyste*. W pierwszej polskiej książce matematycznej (1538) Tomasz Kłos używa zabawnie dziś brzmiącego sformułowania *przyszło w licho* w znaczeniu *otrzymaliśmy liczbę nieparzystą*.

Od lat przeprowadzam ze studentami I roku eksperyment statystyczny. Na wykładzie niespodziewanie mówię: proszę wyjąć kartki. Niech każdy napisze na niej dowolną liczbę naturalną mniejszą niż 100. Gdy zdziwieni pytają, o co chodzi, najpierw odbieram kartki, a potem wyjaśniam: psychologowie dawno zauważyli, że na polecenie: podaj jakąś liczbę, częściej podajemy liczbę nieparzystą i zaraz zobaczymy, jak to u Państwa będzie… Ponadto częściej liczbę nieparzystą wybierają kobiety. Wynik zawsze potwierdza mi tę teorię – oczywiście potrzebna jest stosunkowo duża grupa. Eksperyment z dnia 3 października 2005 roku na studentach geografii Uniwersytetu Warszawskiego dał następujący wynik: na 53 osoby, 40 wybrało liczbę nieparzystą (28 dziewcząt i 12 chłopców), 13 parzystą (7 chłopców, 6 dziewcząt).

A teraz, P.T. Czytelniku, nie dwa, a trzy ćwiczenia z dwójką dla Ciebie:

1) Wymień pojazdy, które mają nieparzystą liczbę kół. Zapasowego koła w samochodzie nie liczymy.
2) Wymień czynności, które są samoodwrotne, to znaczy, że po dwukrotnym jej wykonaniu przywrócona zostaje sytuacja pierwotna.

3) W matematyce liczbą przeciwną do, powiedzmy 4, jest -4 („minus 4”). Natomiast liczbą odwrotną do 4 jest ułamek „jedna czwarta.” Powiedz teraz, Czytelniku, czy liczba przeciwna do odwrotnej to to samo, co odwrotna do przeciwnej?

Weźmy dwie liczby: 2 i 3. Oblicz, Czytelniku:

1) Odwrotność ich sumy,
2) Sumę ich odwrotności,
3) Liczbę przeciwną do sumy odwrotności 2 i 3,
4) Liczbę przeciwną do odwrotności sumy,
5) Sumę odwrotności liczb przeciwnych do 2 i 3,
6) Suma odwrotności liczb przeciwnych do 2 i 3,
7) Odwrotność sumy odwrotności tych liczb,
8) Sumę odwrotności odwrotności tych liczb.

Ad 1: Jednym z przykładów była… kolejka na Kasprowy Wierch.
Ad 2: Pomogę: „w tył zwrot”, „odtwarzaj od końca”, „zmień znak tego wyrażenia”. Bardziej skomplikowane to: *Baczność! Uwaga! Ustawcie się w innym porządku! Pierwszy zmienia się z drugim, czwarty z siódmym, a dziewiąty z jedenastym. Wykonać!*
Ad 3: Spróbuj zadać to lingwistyczne zadanie obcokrajowcowi, dość dobrze władającemu naszym językiem.

Dlaczego o tym piszę? Matematyka jest pełna takich „dualności”. Niemiecka maszyna szyfrująca Enigma działała, wykorzystując takie właśnie operacje. A zatem dwukrotnie zaszyfrowanie przywracało tekst oryginalny. Teraz „trochę” obliczeń i mamy ich w garści. Owa „trocha” to był jednak kawał solidnej, uniwersyteckiej matematyki.

Trzy

Trzy są elementa,
Które składają rozum, trzy wielkie myślniki!
Przez nie wytłumaczona jasno Trójca Święta.
(Juliusz Słowacki, *Kordian*)

Symbolika dotycząca liczby **trzy** jest powszechnie znana i można by o niej napisać grubą książkę, ale z matematycznego punktu widzenia żyjemy w przestrzeni trójwymiarowej – rozróżniamy zmysłami trzy podstawowe wymiary. Dla matematyków obiekty trójwymiarowe bywają wyzwaniem – często łatwiejsze do badania są obiekty cztero-, pięcio- i więcej wymiarowe. Jednym z przykładów jest historia z 1902 r., kiedy Henri Poincare postawił problem charakteryzacji pewnej nieskomplikowanej hiperpowierzchni. „Hiper” znaczy tyle, co „dowolnego wymiaru”. Dość szybko rozwiązano problem[2] od wymiaru[3] 6 w górę, potem dla wymiaru 5. Za rozwiązanie problemu dla wymiaru 4 Wiliam Thurston dostał w 1966 r. medal Fieldsa – rodzaj Nobla dla matematyków. Upłynęło czterdzieści lat i nagle matematyk rosyjski Grigorij Perelman „zrobił” najtrudniejszy przypadek – właśnie wymiar 3. Następnie zadziwił cały świat czym innym – nie przyjął ani zaszczytów, ani pieniędzy – miał powiedzieć, że: „Na orderach mi nie zależy, bo robię to, co lubię, a na jedzenie, mieszkanie i papierosy wystarcza mi pensja uniwersytecka”.

Gdzie trójka, tam i trójkąt. Zauważmy najpierw, że zdanie „trójkąt ma trzy kąty” jest typowym zdaniem analitycznym w sensie Kanta. No bo ileż kątów może mieć coś o takiej nazwie? Żartuję sobie, ale pewien mój student nie wiedział, ile ścian ma sześcian. A co ze zdaniem „trójkąt ma trzy boki”? Wydaje się, że też jest to typowe zdanie analityczne. Tymczasem nie. To, że figura mająca trzy kąty ma też trzy boki – trzeba udowodnić! No, powiedzmy – nie jest to trudny dowód. Nie rozpisuję się o trójkącie i liczbie trzy, bo wypełniłbym cały tomik.

Cztery

I rozmawiają z sobą struny cztery,
Trącając się
Po dwie – po dwie –

(Cyprian Kamil Norwid, *Fortepian Szopena*)

Rozdwoiłem się na cztery części.

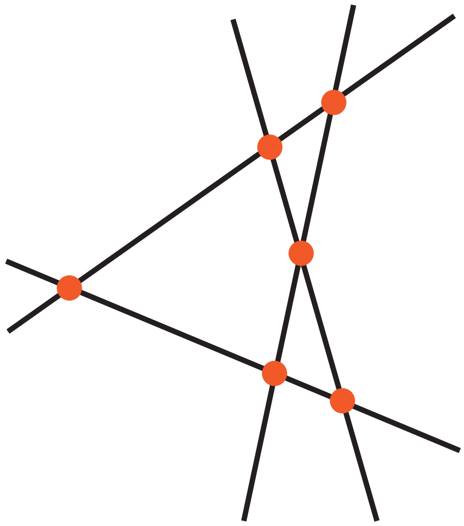
(Leopold Staff, *Poeta subtilis*)

Starożytni uczyli, że każdy całościowy osąd musi być poczwórny. Mówiono o czterech stopniach istnienia: zwykłe (jak kamień), istnienie wraz ze wzrostem (rośliny), istnienie wraz ze wzrostem i czuciem (zwierzęta) oraz istnienie wraz ze wzrostem, czuciem i rozumem (człowiek). Według stoików (najbardziej znanym z nich był Zenon z Elei) dusza przeżywa cztery rodzaje wzruszeń: pożądanie, radość, lęk i smutek. Carl Gustav Jung stawia nieco dyskusyjną tezę[4], że przed Platonem filozofia grecka skłaniała się do „myślenia kwaternarycznego” i że większość symboli – jeśli nie są to postacie ludzkie, lecz mają naturę

2. Słowo „problem” ma nieco inne znaczenie w matematyce, niż w innych naukach humanistycznych. W matematyce jest to po prostu „zadanie do rozwiązania”. W innych naukach humanistycznych „problem” ze swojej natury jest nierozwiązywalny, np. problem duszy ludzkiej, problemy moralne. Widać to na przykład na formularzu oceny pracy magisterskich na UW, gdzie jest punkt „Czy praca stanowi nowe ujęcie problemu?” W matematyce takie pytanie nie ma sensu. Albo rozwiązał, albo nie! Przy okazji przypomnę, że matematyka jest nauką humanistyczną. Jest jedyną ścisłą nauką humanistyczną (jeżeli zgodzimy się, że logika jest dziś dostatecznie zmatematyzowana)!
3. Każdy matematyk powie „wymiar trzy, wymiar cztery, wymiar pięć” itd., a nie bardziej gramatycznie „trzeci, czwarty, piąty”. Podobnie jak z wyrażeniem $x = 0$, p. przypis 1.
4. Carl Gustaw Jung, *Próba psychologicznej interpretacji dogmatu o Trójcy Św*, w: *Archetypy i symbole*, Warszawa 1993.

geometryczną lub liczbową, ma „charakter czwórcy”[5]. Pismo Święte porównuje człowieka do naczynia z czterech powodów: utworzenia, zawartości, przydatności i pożytku.

Ale, ale. Czytelniku: ile wierzchołków może mieć figura o czterech bokach? Cztery? Tak, może mieć i cztery. Ale na ogół ma… sześć (rys. 1.).



Rys. 1. Taka figura nazywa się czworobokiem zupełnym (cztery proste, sześć punktów przecięcia). Rys. własny.

Ciekawa matematycznie jest **czwórka**, ale w matematyce występuje ona częściej jako dwie pary. Można to zrozumieć, patrząc na prostokąt. Jego boki są tej samej długości, ale parami. Nie trzeba nikogo przekonywać, że kwadraty są rzadziej spotykane niż prostokąty. Ładną figurą jest równoległobok, może jeszcze ładniejszą deltoid. Kto nie wie, co to za figura, to niech spojrzy na latawiec. Taki właśnie czworokąt nazywamy deltoidem. Wydłużony, przypomina literę Δ. Ciekawe, że matematycznie brydż jest grą dwuosobową!

Odejdę znów od matematyki, chociaż właściwie w *Fauście* Goethego, do którego to poematu się odniosę, jest wiele o matematyce. W jego drugiej części dialog między Syrenami a Nereidami (Trytonami) igra wokół wyobrażenia 3 lub 4 i odpowiednio 7 lub 8 Kabirów. Kabirowie (albo Kabeirowie) to potężni, wielcy nauczyciele ładu i mocy tajemnej. Chodzi zawsze o jednego ponad magiczną liczbę 3 albo 7; jest on tym tajemniczym, wszechwładnym, wszechwiedzącym, ale i nieznanym, niewypowiedzianym. Czytelniku, jeśli nawet nie znasz Fausta, to czy nie przemawia do Ciebie taki oto fragment?

> Nereiden und Tritonen
> Drei haben wir mitgenommen,
> Der vierte wollte nicht kommen;

5. Więcej o czwórcy Junga zob. Daryl Sharp, *Leksykon pojęć i idei C.G. Junga*, przeł. Jerzy Prokopiuk, Wrocław 1999.

Er sagte, er sei der Rechte,
Der für sie alle dächte.
(*Faust. Tragedii część druga*, rozdz. 32)

W przekładzie Adama Pomorskiego (1999) ten fragment brzmi:

Trzech my z sobą zabrali
Czwarty nie chciał iść dalej.
Powiedział, że mówiąc ściśle
Musi za wszystkich myśleć.

Potem Nereidy/Trytoni mówią o tajemniczym ósmym, który istnieje „gdzieś na Olimpie" i „o którym jeszcze nikt nie myślał". Nie jest jasne, dlaczego zawsze dążą do parzystej liczby Kabirów. Może dlatego, że Kabirowie byli czczeni „w liczbie podwójnej", może dlatego, że byli czczeni też jako bóstwa wegetatywne? Nie wiadomo. *Faust* jest syntetyczny i symboliczny, jak Kabirowie i gry liczbowe wokół nich.

Pięć

Nie tylko koń, co ma cztery nogi, się potknie: o człowieku niezręcznym i niemądrym powiemy (prawda, że trochę nieładnie), że to *takie cztery litery* i pewnie brak mu piątej klepki. Taki rzadko bywa *kuty na cztery nogi* i to na pewno nie zna niczego *jak swoje pięć palców*.

Nie plećmy *piąte przez dziesiąte* a jeśli coś robimy, to starannie, nie zaś *ni w pięć ni w dziewięć*. Uważajmy, żebyśmy nie byli potrzebni *jak piąte koło u wozu*.

Mamy pięć palców u jednej ręki i prawdopodobnie dlatego pięć i pięść brzmią podobnie (po niemiecku *zehn* to 10, a *Zehe* to palec u nogi).

Pitagorejczycy nazywali 5 liczbą małżeńską, bo jest sumą pierwszej liczby żeńskiej 2 i pierwszej męskiej 3. Liczby miały bowiem swój rodzaj: parzyste żeński, nieparzyste męski, z wyjątkiem nijakiej jedynki.

Do matematyków szczególnie przemawia właśnie **piątka**. Już Platon wiedział, że jest pięć wielościanów foremnych; cztery z nich kojarzył z czterema żywiołami: czworościan – z ogniem, sześcian – z ziemią, ośmiościan – z powietrzem, dwudziestościan – z wodą, a piąty – najbardziej zresztą tajemniczy i odkryty nie przez samego Platona, tylko jego ucznia Teajtosa – dwunastościan był symbolem całego Kosmosu.

Dwa tysiące lat później (ok. 1610 r.) Johannes Kepler po kilkunastoletniej pracy ogłosił swój model kosmologiczny. Za jego czasów znano sześć planet: Merkurego, Wenus, Ziemię, Marsa, Jowisza i Saturna. Kepler związał to z wielościanami foremnymi. Jeśli bowiem na sferze o promieniu orbity Merkurego opisać ośmiościan, a na nim opisać następną sferę, to jej promień odpowiadać będzie promieniowi orbity Wenus. Jeśli na tej drugiej sferze opisać dwudziestościan, a na nim kolejną trzecią sferę, to jej promień odpowiada promieniowi orbity Ziemi. I tak kolejno dla następnych wielościanów foremnych i planet: dwunastościan – Mars, czworościan – Jowisz, sześcian – Saturn. Co najważniejsze: zgadzało się to z danymi obserwacyjnymi. Cóż może bardziej potwierdzać słuszność teorii naukowej niż zgodność z rzeczywistością? Ta prawidłowość utwierdziła Keplera w głębokim przekonaniu, że Bóg jest matematykiem. Niestety, dzisiejsze dokładne pomiary obalają teorię Keplera o związku wielościanów foremnych ze sferami niebieskim…

Kolejnym dziwem liczby pięć jest objętość kuli… w przestrzeni pięciowymiarowej. Przepraszam, nie wytłumaczę, jak ta przestrzeń wygląda. Proszę sobie wyobrażać… dowolnie. Może pamiętasz, Czytelniku, wzór na pole zwykłego koła? Chodzi o pi *r* kwadrat. Jeżeli promień *r* jest równy 1, to pole wynosi *pi*, czyli w przybliżeniu 3,14. Dla kuli wzór jest bardziej skomplikowany (może ktoś pamięta: cztery trzecie *pi r* do trzeciej) – w przybliżeniu 4,19 *r*. W przestrzeni czterowymiarowej rośnie do 4,93, a w pięciowymiarowej aż do 5,28. Potem znowu maleje. Pytanie, dlaczego kula akurat w pięciowymiarowej przestrzeni ma największą objętość, nie ma chyba sensu filozoficznego. A jednak ciśnie się na usta pytanie: dlaczego? Dlaczego Panu Bogu spodobało się stworzyć taką właśnie matematykę?

Każdy pamięta, że w szkole rozwiązywało się równania kwadratowe, czyli drugiego stopnia. Niekiedy nawet trzeciego i czwartego. I tu dziw nad dziwy: nie każde równanie stopnia 5 da się rozwiązać! Podkreślam, że chodzi o pewne równania, bo niektóre można. Niemniej matematyka ma chyba monopol na wykazanie, że czegoś się nie da zrobić. Nie da się i już. Choć trudno to zrozumieć, to właśnie tak jest. Można znajdować coraz to lepsze przybliżenia, ale dokładnego rozwiązania nie znajdziemy, bo się nie da.

Wreszcie i ja sam doświadczyłem magiczności liczby pięć. Częścią mojej pracy habilitacyjnej była klasyfikacja wiązek wektorowych o małych liczbach Cherna (nie będę wyjaśniał, co to znaczy). Z każdą wiązką związane były dwie liczby. Gdy nie przekraczały one 4, wszystko jakoś szło. Gdy nawet jedna była 5 albo więcej, było jasne, że takiej klasyfikacji nie da się zrobić. Na wykładzie habilitacyjnym powiedziałem, że tylko małe zielone ufoludki z Marsa mogą tu coś zobaczyć.

Sześć

Gdzie kucharek sześć, tam nie ma co jeść.

W czasach starożytnych szóstka symbolizowała równowagę i harmonię, wyrażaną przez dwa trójkąty złączone podstawami. Jest liczbą doskonałą. Święty Augustyn w dziele *O państwie Bożym* pisze:

> To ze względu na doskonałość liczby sześć całość stworzenia dokonała została, jak opowiada Pismo Święte, przez sześciokrotne powtórzenie tego samego dnia, czyli w przeciągu sześciu dni. Wszak liczba ta jest pierwszą liczbą, która stanowi sumę swoich części, to jest sumę szóstej części, trzeciej części i połowy, czyli sumą jedynki, dwójki i trójki, które po dodaniu tworzą właśnie sześć.

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$

Liczby doskonałe to liczby, które są równe sumie swoich dzielników właściwych, to znaczy dzielników mniejszych od niej:

$6 = 1 + 2 + 3$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
$496 = 1+ 2+ 4+ 8+ 16+ 31+ 62+ 124+ 248$
$8128 = 1+ 2+ 4+ 8+ 16+ 32+ 64+ 127+ 254+ 508+ 1016+ 2032+ 4064$

Parzyste liczby doskonałe muszą mieć postać $2^n (2^{n+1}–1)$, przy czym $2^{n+1}–1$ musi być liczbą pierwszą (takie liczby pierwsze nazywają się liczbami Mersenne’a), w powyższych przykładach mamy n = 1, 2, 4, 6. Nie wiadomo, czy istnieje nieparzysta liczba doskonała. Próby jej znalezienia się nie powiodły i wykazano, że jeżeli istnieje, to musi być… bardzo duża. Ale dowodu ogólnego nie ma.

W prawie wszystkich kulturach przyjęto nosić pierścionek na serdecznym palcu i nawet to może mieć związek z doskonałością liczby 6. Otóż w starożytnym Egipcie wyobrażeniem liczby 6 była ręka z zagiętym tym właśnie palcem, a ponieważ szóstka jest doskonała, ten palec był najbardziej honorowy. Można wierzyć w to wytłumaczenie, można nie wierzyć, tak jak w całą pozostałą symbolikę liczb.

Siedem

Ja wiem,
Wiem,

Że gór tych
Siedem jest.

Wiem też,
Wiem,
Przejść muszę
Siedem rzek!

I ciągle dal,
Za dalą dal,
Zawieje, śnieżyce i żar, i kurz.
I nie wiem nawet już,
Czy tam gdzieś
Będzie kres.
(…)

Edward Stachura *Za dalą dal*

Znękany swoją sławą niesłychaną,
W tych całych ichnich Zjednoczonych Stanach,
w ideologii wstrętnej i nam złej,
żył Hollywoodu gwiazdor numer jeden,
tak zwany agent 007,
czyli James Bond, szpieg FBI i CIA.
(…)

Włodzimierz Wysocki, *Agent 007*, przekład Michał B. Jagiełło

Tak siedem stanów ziemicy całej
Siedmiu płomieniami jasno gorzały,
Siedm modlitew treści odmiennej
Wyraził lichtarz siedmioramienny.
(…)

Władysław Syrokomla, *Staropolskie roraty*

Mamy siedem darów Ducha Świętego (rozum, inteligencja, rada, męstwo, wiedza, prawość, bojaźń boża). Wielu starszych Czytelników widziało film Ingmara Bergmanna *Siódma pieczęć* (1956), każdy słyszał o siedmiu samurajach, siedmiu wspaniałych i *Siedmiu przeciw Tebom*. Jeśli wybieramy się za *siódmą górę, siódmą rzekę*, to najlepszym wyposażeniem będą *siedmiomilowe buty*. Może zobaczymy tam *siedem cudów świata* i jeżeli tylko nie popełnimy żadnego z *siedmiu grzechów głównych*, to po powrocie będziemy *jak w siódmym niebie*. Wybierzmy jednak dobrego przewodnika, a nie takiego od *siedmiu boleści*. Uważajmy też podczas naszej wycieczki, by nie wydać za dużo pieniędzy, bo potem czekać nas może *siedem lat chudych* i będziemy zgorzkniali, jakbyśmy napili się *octu siedmiu złodziei*.

Siódmy anioł
Jest zupełnie inny
(…)
Jest czarny i nerwowy
Był wielokrotnie karany
Za przemyt grzeszników
(…)

Nic nie ceni swojej godności
I utrzymują go w zastępie
Tylko ze względu na liczbę siedem.

Zbigniew Herbert, *Siódmy anioł*

Tam z-siedmia się brzmienie i tam się z-traja.

Cyprian Kamil Norwid, *Kolebka pieśni*

Bo jest szum na superwysokościach
Jakby z nieba nr 7.

Konstanty Ildefons Gałczyński, *Dziecko się rodzi*

Pierścień nocy nad nami się zamknął
I otwarło się siódme niebo.

Konstanty Ildefons Gałczyński, *Siódme niebo*

Nie spoczniemy,
Nim dojdziemy,
Nim zajdziemy
W siódmy las.

Czerwone Gitary, *Nie spoczniemy*, słowa Agnieszka Osiecka

No tak, siódemka jest bardziej literacka niż matematyczna. Z wiadomości, które są do zrozumienia bez dłuższego wykładu, wybrałem tylko zadanie dla maturzystów (nawet na poziom podstawowy): Rzucamy dwa razy kostką. Udowodnij, że najbardziej prawdopodobną sumą wyników dwóch rzutów jest siedem.

Aha, jeszcze jedna matematyczna własność siódemki. Trójkąt foremny (czyli równoboczny), czworokąt foremny (tj. kwadrat), pięciokąt i sześciokąt dadzą się skonstruować cyrklem i linijką. Siedmiokąt nie!

Osiem

Dla mnie mają tam jeszcze
ósmy krąg.
Ósmy krąg,
w którym nie ma już nic...

Jacek Kaczmarski, *Epitafium dla Włodzimierza Wysockiego*

Czy to Pan Bóg uważa, że ludziska giną?
Poczciwym nie da talarka.
Dla jednych pomyślność odmierza ośminą,
Drugiemu liczy na ziarnka.

Władysław Syrokomla, *Kradzione*

Przejdźmy do liczby osiem. Wybrałem dwa wątki. Pierwszy jest znacznie ciekawszy matematycznie, ale trudniejszy do zrozumienia. Każdy wie, że liczby można zaznaczać na linii prostej – prostą nazywamy wtedy osią liczbową. Już od połowy XVI w. wiemy, że punkty na płaszczyźnie też mogą być liczbami – kto zdawał maturę rozszerzoną, powinien słyszeć o liczbach zespolonych. To właśnie one. Okazuje się, że liczby mogą też wypełniać przestrzeń wymiaru 4 i wymiaru 8. Innych już nie. To jest trudna matematyka.

Inna wyjątkowość liczby osiem jest łatwa do zrozumienia, trudniejsza do przyswojenia sobie z „metafizycznego" punktu widzenia. Być może wszyscy wiedzą, co to jest kwadrat magiczny. Przypomnę, na przykładzie kwadratu widocznego na obrazie Albrechta Dürera *Melancholia* (rys. 2.).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Rys. 2. Kwadrat magiczny.

Sumy czterech liczb wzdłuż każdego wiersza i wzdłuż każdej kolumny są równe 34. Mało tego, sumy po przekątnej też są równe tyle samo. To właśnie znaczy, że jest kwadrat magiczny. Dodatkowo, dwie środkowe liczby dają rok powstania dzieła: 1514. Wszyscy wiemy, jak porusza się konik szachowy. Spójrzmy teraz na większy, sześćdziesięcioczteropolowy kwadrat liczbowy, ułożony w 1888 r. przez Edwina Sturmera.

1	30	47	52	5	28	43	54
48	51	2	29	44	53	6	27
31	46	49	4	25	8	55	42
50	3	32	45	56	41	26	7
33	62	15	20	9	24	39	58
16	19	34	61	40	57	10	23
63	14	17	36	21	12	59	38
18	35	64	13	60	37	22	11

Rys. 3. Problem konika szachowego – kwadrat magiczny E. Sturmera.

Kto chce, może sprawdzić, że sumy ośmiu rzędów poziomych i ośmiu pionowych są równe 260. Jest to zatem kwadrat magiczny. Niestety, sumy wzdłuż przekątnych są inne: 210 i 282 i dlatego nazywamy go niezupełnym. Ale kwadrat Sturmera ma niesamowitą własność: z każdego pola możemy skoczyć na następne konikiem szachowym! Proszę prześledzić: pole nr 1 jest w lewym górnym rogu. Niestety, kwadrat nie jest zamknięty – z ostatniego pola nie można przeskoczyć na pierwsze. Nazwijmy taki kwadrat konikowym. I oto zadanie: Czy dowolny kwadrat można zapełnić liczbami, żeby dostać kwadrat magiczny, konikowy i zamknięty?

Zajęło się tym zadaniem wielu matematyków. Od końca XIX w. zagadnienie „ogryziono" prawie do kości. Wyliczono „wszystko", dla jakich rozmiarów takie kwadraty istnieją, ile ich jest, a dla jakich rozmiarów ich nie może być (na przykład dla nieparzystopolowych)… wszystko, z wyjątkiem przypadku zwykłej szachownicy, to jest kwadratu 8 na 8. Matematycy już zastanawiali się, dlaczego akurat liczba 8 jest tak wyjątkowa!

Magia nie zbladła, gdy Günther Stertenbrink wykazał, że na szachownicy 8 na 8 takiego kwadratu nie ma – w dowodzie użył komputera, który pracował 61 dni i kilka godzin bez przerwy i rankiem 5 sierpnia 2003 r. napisał „Przeszukałem. Nie ma!". Jak zwykle obliczenia zostały sprawdzone przez innego matematyka i dopiero potem ogłoszono, że po blisko 150 latach zadanie Sturmera zostało w pełni rozwiązane. Można się metafizycznie zastanawiać, dlaczego akurat przypadek $n = 8$ był najtrudniejszy. Co tajemniczego jest w liczbie osiem? Dlaczego był to najtrudniejszy przypadek?

Dziewięć

Dzwon za poległych nad Warną
Bił dziewięć razy.
Królowi się zmarło,
A dzwon bił dziewięć razy
O zmierzchu.

Władysław Broniewski, *Dzwon w Płocku*

W geometrii elementarnej liczba 9 występuje przy okazji zdumiewającego okręgu, przechodzącego przez dziewięć charakterystycznych punktów każdego trójkąta: trzy spodki wysokości, trzy środki boków i trzy środki odcinków wysokości od ortocentrum do wierzchołka. Zauważyli to w 1820 r. Charles-Julien Brianchon i Jean Victor Poncelet. Okrąg taki jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt i do trzech okręgów dopisanych oraz ma wiele interesujących własności. Wiele z nich odkrył w 1822 r. nauczyciel niemiecki z Erlangen, Karl Feuerbach, a jeszcze i dziś jest tu co do odkrycia.

O dziewiątce też można by jeszcze długo. Ograniczę się do jeszcze jednego jej „pojawienia się”. Ci z Czytelników, którzy musieli opracowywać dane statystyczne, zetknęli się może ze „staninami”. Słowo jest spolszczeniem zwrotu „standard nine”. Gdy dane, które mamy opracować, układają się według tzw. rozkładu normalnego (a tak jest dla większości danych, które spotykamy w praktyce), dzielimy je według określonego schematu, na dziewięć grup. Dlaczego akurat na dziewięć? Bo tak jest najlepiej! A dlaczego tak jest najlepiej? Nie potrafię Ci, drogi Czytelniku, tego wytłumaczyć bez dłuższego wykładu.

Dziesięć

Czy Pan zdoła w swym pojęciu
Odjąć zero od dziesięciu?

Jan Brzechwa, *Sum*

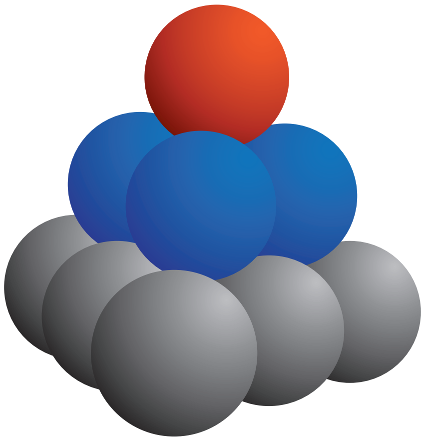
No i jedenastka Anglików będzie musiała grać w dziesiątkę.

Zasłyszane

Najmniejsza liczba dwucyfrowa, 10, ma dobrą konotację. Kojarzy nam się miło z jubileuszami, rocznicami, obchodami – a więc bankietami, paradami wojskowymi i przypinaniem medali: co kto lubi. Bo to przecież taka „okrągła” liczba!

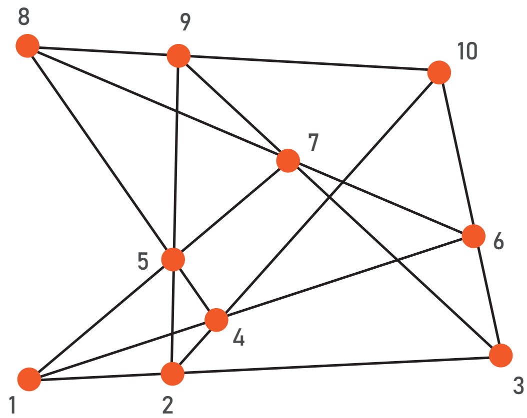
Wiemy, że kapitan Kloss poznał działania Abwehry *jak swoje dziesięć palców* i dzięki jego wskazówkom strzały z czołgu „Rudy” (chyba, że coś tu mylę) *dziesiątkowały* Niemców. Trafię chyba w *dziesiątkę* stwierdzeniem, że obecne spory polityczne w Polsce sprowadzają się do tego, że jedni obawiają się, że będą musieli *płacić dziesięcinę* do Watykanu i stosować się do wszystkich *dziesięciu przykazań dekalogu*. Inni pomstują na to, że nie potrzeba już ani *deka rozumu* – wystarczy być spokrewnionym z odpowiednią osobą ot, *dziesiąta woda po kisielu*, żeby wszystko było już wolno. Nawet kopnąć zawodnika drużyny przeciwnej decymetr powyżej kostki, żeby musiał zejść z boiska, a drużyna będzie musiała grać w *dziesiątkę*. Ale nie *plećmy już piąte przez dziesiąte*, choć niektóre opowieści byłyby na pewno zajmujące, jak w *Dekameronie* Bocaccia i wracajmy do matematyki, żeby Dziekan (łac. *Dekanus*) nie zarzucił nam, że się zajmujemy głupstwami.

Liczba 10 kojarzy się matematykom po pierwsze z tetraktysem (rys. 4.), figurą czczoną przez Pitagorejczyków. Ustawiamy sześć kul w trójkąt, w trzy utworzone dołki wkładamy trzy nowe, a na górę jedną.



Rys. 4. Tetraktys.

Po drugie, dziesiątka jest obecna w ważnej geometrycznie konfiguracji XVII-wiecznego matematyka G. Desargues'a (rys. 5.). Jak ustawić 10 drzew w 10 rzędach, po trzy drzewa w każdym?



Rys. 5. Konfiguracja Desargues'a.

Dziesiątkę spotkamy w wielu innych sytuacjach. Nie jest liczbą łaskawą dla matematyków. W 1782 r. Leonhard Euler postawił przypuszczenie, że nie ma ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu 10 i zadanie rozwiązano to dopiero (obalając przypuszczenie Eulera) w 1959 roku.

Tyle o małych liczbach. Na zakończenie krótka historyjka, którą zna każdy matematyk. Wybitny indyjski matematyk, Srinivasa Ramanujan (1887–1920), leżał w szpitalu. Odwiedził go kolega, Godfrey Hardy. „No, cieszę że cię widzę, przyjechałem taksówką, żeby cię wcześniej zobaczyć". „Taksówką? A jaki był jej numer boczny?" „Nieciekawy, 1729". „Jak to nieciekawy?", zawołał oburzony Ramanujan. „To najmniejsza liczba, którą można przedstawić na dwa sposoby jako sumę sześcianów innych liczb naturalnych!". Istotnie: $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3+9^3$.

Z przytoczonych przykładów można, być może, uważać, że matematycy zajmują się niepotrzebnymi łamigłówkami. Do pewnego stopnia jest to prawda. Ale to, co pozostaje, uzasadnia i usprawiedliwia nas. Po pierwsze, historia uczy, że bardzo wiele najdziwniejszych pomysłów matematycznych znajduje w końcu swoje zastosowanie. Koronnym przykładem jest teoria liczb (nauka o liczbach dużych i małych). Do niedawna traktowana jako czysto teoretyczne poletko, stała się potężnym narzędziem w szyfrowaniu, kodowaniu, podpisie elektronicznym, wyszukiwarkach itp. Po drugie, uczy historia: sama praca nad zagadnieniem bez zastosowań może spowodować rozwój potrzebnych narzędzi matematycznych, potrzebnych gdzie indziej. Szybkie algorytmy służące do wędrówek konika po szachownicy są z pewnością już tajne, bo dają efektywny sposób przeszukiwania danych… i tak dalej.

Poza wszystkim dla matematyka liczby są niezwykle perswazyjne, szczególnie, gdy „puszczają do niego oko" i szepcą: zbadaj mnie, zobacz, jaka jestem ciekawa!