Zagadnienia Filozoficzne
w Nauce
XLVIII (2011), 148–165

Katarzyna Lewandowska
Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie

ROLA AKSJOMATU W MATEMATYCE WSPÓŁCZESNEJ ORAZ W PERSPEKTYWIE DOCIEKAŃ NAD AKSJOMATEM WYBORU

W 1997 roku w trakcie Join Annual Meeting w San Diego Solomon Feferman wygłosił wykład zatytułowany: *Czy matematyka potrzebuje nowych aksjomatów?*[1] Poruszony przez amerykańskiego matematyka i filozofa problem został podjęty w czerwcu 2000 roku na ASL Annual Meeting w Urbana-Campaign, po którym powstała zbiorowa praca Fefermana, Friedmana, Maddy i Steela o takim samym tytule[2]. Praca ta stała się dla nas bodźcem do zastanowienia się nad znaczeniem aksjomatu w matematyce oraz rolą filozofii w wyborze aksjomatu, czyli *de facto* nad wyborem sposobu uprawiania matematyki, na początku dwudziestego wieku oraz dziś. W niniejszym artykule pokażemy, jak filozofia wpływała na kształt matematyki w czasie gdy Zermelo formułował dowód Zasady Dobrego Uporządkowania. Zastanowimy się też nad znaczeniem filozofii matematyki w czasach współczesnych. W naszych analizach skupimy się na głosie Solomona Fefermana i Penelope Maddy w dyskusji nad potrzebą nowych aksjomatów w matematyce.

[1] *Does Mathematics Need New Axioms*? Wykład zawarty w S. Feferman, *Does Mathematics Need New Axioms?*, „American Mathematical Monthly" 106, 1999, s. 99–111.

[2] S. Feferman, P. Maddy, J. Steel, and H. Friedman, *Does Mathematics Need New Axioms?*, „Bulletin of Symbolic Logic" 6, 2000, s. 401–446.

CZY MATEMATYKA POTRZEBUJE NOWYCH AKSJOMATÓW?

Samo zadane przez Fefermana pytanie można rozważać wychodząc z różnych punktów widzenia — inaczej na ten problem będzie patrzył logik, inaczej matematyk nie zajmujący się logiką i jeszcze inaczej filozof matematyki. Co więcej, także na gruncie każdej z tych dziedzin trudno o jedno zgodne rozwiązanie. Feferman chce prowadzić analizy z perspektywy logika lub filozofa[3]:

> Według mnie postawione pytanie jest pytaniem w istocie filozoficznym: *Oczywiście, matematyka potrzebuje nowych aksjomatów* — wiemy to z twierdzeń Gödla — ale wtedy musimy także zapytać: *Jakich aksjomatów potrzebuje matematyka?* i *Dlaczego takich?*[4]

Wybór[5] takiej perspektywy wydaje się być uzasadniony między innymi ze względu na fakt, że wielu (większość) matematyków ignoruje rozważane pytanie. Dla nich matematyka jest sama dla siebie uzasadnieniem, kwestie fundamentalne, dotyczące podstaw danej teorii są tylko lokalne i rozwiązywane według potrzeb matematyki.

Amerykański matematyk i filozof stawia swoje pytanie w dużej mierze w kontekście kłopotów z rozstrzygnięciem Hipotezy Continuum, odwołując się do Kurta Gödla i jego programu znalezienia nowych aksjomatów służących uporządkowaniu nierozwiązanych proble-

[3]Można w tym miejscu zadać sobie pytanie, czy takie podejście jest uzasadnione. Poruszona tutaj kwestia potrzeby nowych aksjomatów jest związana z konkretnymi problemami matematycznymi. Rzetelna próba rozwiązania takowych wymaga biegłej znajomości bardzo zaawansowanych i wyspecjalizowanych pojęć i narzędzi matematycznych, czyli przyjęcia także podejścia matematyka. Może najwłaściwszą perspektywą rozpatrywania pytania o potrzebę nowych aksjomatów powinna być perspektywa filozofującego matematyka?

[4]My own view is that the question is an essentially philosophical one: *Of course mathematics needs new axioms* — we know that from Gödel's incompleteness theorems — but then the questions must be: *Which ones?* and *Why those?* (S. Feferman, P. Maddy, J. Steel, and H. Friedman, *Does Mathematics Need New Axioms?*, „Bulletin of Symbolic Logic" 6, 2000, s. 401–446, s. 402).

[5]W dalszej części naszej pracy zobaczymy, że Feferman nie tylko wybiera perspektywę czysto filozoficzną dla badań na potrzebą nowych aksjomatów w matematyce, ale twierdzi, że to jedno podejście jest właściwe.

mów arytmetyki i teorii mnogości[6]. Dlatego, aby prowadzić dalsze rozważania i poznać właściwy sens poruszonego przez Fefermana problemu, przyjrzymy się wspomnianemu tutaj planowi Gödla.

Austriacki logik i matematyk rozważa ówczesne osiągnięcia w kwestii rozstrzygnięcia Cantorowskiej hipotezy orzekającej, że każdy nieskończony podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest równoliczny albo ze zbiorem liczb naturalnych albo ze zbiorem liczb rzeczywistych. Zwraca przy tym szczególną uwagę na fakt, że jeśli założymy niesprzeczność aksjomatyki ZF, to na jej gruncie nie da się obalić Hipotezy Continuum. Podkreśla jednakże, że taki stan rzeczy nie jest dla niego zadowalający:

> Tylko ktoś, kto (jak intuicjonista) zaprzecza, że pojęcia i aksjomaty klasycznej teorii mnogości mają jakiekolwiek znaczenie (lub jakiekolwiek dobrze określone znaczenie), może być usatysfakcjonowany takim rozwiązaniem; nie zgodzi się z tym nikt, kto wierzy, że te pojęcia i aksjomaty opisują pewną dobrze określoną rzeczywistość. Przy takim założeniu, Cantorowskie przypuszczenie musi być albo prawdziwe albo fałszywe, i jego nierozstrzygalność na gruncie znanych dzisiaj aksjomatów, może oznaczać tylko tyle, że aksjomaty te nie zawierają zupełnego opisu tej rzeczywistości[7].

Gödel nie poprzestaje tylko na zasygnalizowaniu problemu, ale sam próbuje znaleźć rozwiązanie:

> Przede wszystkim aksjomaty teorii mnogości w żaden sposób nie tworzą zamkniętego w sobie systemu, ale raczej przeciwnie, samo pojęcie zbioru, na którym są one oparte sugeruje ich

[6]Program ten jest zawarty między innymi w pracy: K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, „The American Mathematical Monthly”, Vol. 54, No. 9, 1947, s. 515–525.

[7]Only someone who (like the intuitionist) denies that the concepts and axioms of classical set theory have any meaning (or any well-defined meaning) could be satisfied with such a solution, not someone who believes them to describe some well-defined reality. For in this reality Cantor's conjecture must be either true of false, and its undecidability from the axioms as known today can only mean that these axioms do not contain a complete description of this reality. (K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem*, „The American Mathematical Monthly”, Vol. 54, No. 9, 1947, s. 515–525, s. 520).

> rozszerzenie o nowe aksjomaty zapewniające istnienie jeszcze dalszych iteracji operacji „zbioru czegoś". Te aksjomaty mogą być także sformułowane jako postulaty uznające istnienie bardzo dużych liczb kardynalnych lub równoważnie zbiorów o takiej liczbie kardynalnej. [...] Niewiele wiemy o tym dziale teorii mnogości, ale w każdym razie aksjomaty te wyraźnie pokazują, że znany dzisiaj system aksjomatyczny teorii mnogości nie tylko jest niezupełny, lecz także może być zastąpiony (nie całkowicie dowolnie) przez nowe aksjomaty, które są tylko naturalną kontynuacją tych przyjętych dotychczas[8].

Uzyskaliśmy więc pierwszy, ogólny szkic właściwego zrozumienia pytania Fefermana. Rozważany jest pewien problem — kontrowersyjna hipoteza w danej teorii, której na jej gruncie nie potrafimy rozstrzygnąć. Pytamy, czy można wskazać nowe zdania powszechnie akceptowalne — nowe aksjomaty (z zachowaniem podstawowych warunków względnej niesprzeczności i niezależności), z których (wraz z dotychczasowymi) wynikałoby rozważane przypuszczenie lub jego zaprzeczenie. Nie mówimy więc o potrzebie jakichkolwiek aksjomatów, tylko o ich doborze w konkretnym celu — rozstrzygnięciu problematycznej hipotezy.

Kluczowe jest także ustalenie, co rozumiemy pod pojęciem aksjomatu. W wykładzie Fefermana znajdujemy następującą definicję:

> AKSJOMAT — samooczywiste twierdzenie nie potrzebujące dowodu prawdziwości, przyjęte i zatwierdzone w momencie sformułowania[9].

[8]For first of all the axioms of set theory by no means form a system closed in itself, but, quite on the contrary, the very concept of set on which they are based suggests their extension by new axioms which assert the existence of still further iterations of the operation "set of". These axioms can also be formulated as propositions asserting the existence of very great cardinal numbers of (which is the same) of sets having these cardinal numbers. [...] Very little is known about this section of set theory, but at any rate these axioms show crearly not only that the axiomatic system of set theory as known today is incomplete, but also that it can be supplement without arbitrariness by new axioms which are only the natural continuation of the series of those set up so far. (Tamże s. 520).

[9]S. Feferman, P. Maddy, J. Steel, and H. Friedman, *Does Mathematics Need New Axioms?*, „Bulletin of Symbolic Logic" 6, 2000, s. 401–446, s. 402.

Nie jest to jedyne określenie rozważanego przez nas terminu. Często pojęcie to było używane niejednoznacznie i zmieniała się jego interpretacja[10].

PIERWSZA AKSJOMATYKA TEORII MNOGOŚCI

Traktowanie aksjomatów jako samooczywistych twierdzeń, których prawdziwość nie wymaga dowodu, przyjmowanych i zatwierdzanych bez żadnych wątpliwości, jest podejściem wyidealizowanym, dalekim od współczesnej definicji. Aktualnie dla logików i matematyków są to naczelne, wyodrębnione twierdzenia danej teorii, które przyjmuje się bez dowodu, a które są wystarczające (i konieczne) do jej uprawiania[11]. Taki zbiór aksjomatów nie jest „sztywnym szkieletem zasad", dzięki którym można udowodnić wszystkie twierdzenia danej teorii. Ciągłe rozbudowywanie i swego rodzaju „płynność" aksjomatów cechuje historię całej dwudziestowiecznej matematyki, a w sposób najwyraźniejszy — historię Aksjomatu Wyboru.

W tym kontekście przyjrzyjmy się dokładnie procesowi pierwszej aksjomatyzacji teorii mnogości. Należy zwrócić w tym miejscu uwagę na specyficzny charakter teorii zbiorów nieskończonych, tworzonej w głównej mierze przez Georga Cantora w latach 1874–1897. Jest to tak zwana przedaksjomatyczna (albo naiwna) teoria mnogości. Przyczyną takiego określania Cantorowskiej teorii było przede wszystkim używanie przez niego intuicyjnych i nie do końca sprecyzowanych pojęć. Nawet najbardziej podstawowy obiekt — zbiór — nie został

---

[10]Zob. http://ptta.pl/ pef/ pdf/ a/ aksjomat.pdf (11.01.2011).

[11]Feferman dzieli aksjomaty na dwa rodzaje. Pierwszy typ to tzw. aksjomaty strukturalne (ang. *structural axioms*), czyli definicje struktur matematycznych. W odniesieniu do powyższych nie ma sensu mówienie o ich oczywistości, zasługują one jednak na miano aksjomatów, gdyż tworzą podwaliny każdej teorii matematycznej. Nie o takich jednakże aksjomatach mówi Feferman, stawiając swoje pytanie. Drugi rodzaj to aksjomaty podstawowe (fundamentalne, fundacjonalne, ang. *foundational axiom*), czyli takie, które leżą u podstaw wszystkich matematycznych pojęć i teorii — dotyczące na przykład liczb (aksjomaty arytmetyki liczb naturalnych), zbiorów (aksjomaty teorii mnogości). Feferman, przytaczając historię tworzenia Aksjomatyki Peana Liczb Naturalnych i Aksjomatyki Freankla-Zermela teorii mnogości, pokazuje jak krystalizowała się i spełniała potrzeba nowego aksjomatu w matematyce.

przez Cantora dokładnie „zdefiniowany”[12]. Niemiecki matematyk na określenie zbioru używał następującego sformułowania:

> Pod pojęciem zbioru M rozumiemy każde zebranie w jedną całość pewnych dobrze rozróżnionych obiektów m naszego oglądu lub naszych myśli (które to obiekty będziemy nazywać elementami M)[13].

Taka nieprecyzyjna intuicja pojęcia zbioru stała się jedną z przyczyn pojawienia się na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku antynomii teoriomnogościowych. Warto w tym miejscu zauważyć, że już sam Cantor odkrył na gruncie swojej teorii mnogości jedną z takich antynomii — antynomię zbioru wszystkich zbiorów (zwaną antynomią Cantora). Aby zapobiec tej niekomfortowej sytuacji[14], Cantor zaczął rozróżniać zbiory od tak zwanych wielości absolutnie nieskończonych:

> Niektóre wielości mogą być tak zaprojektowane, że zebranie razem wszystkich ich elementów owocuje pojawieniem się sprzeczności, więc nie jest możliwym takie wielości traktować jako jedność, pojmować jako gotową rzecz. Takie wielości nazywam absolutnie nieskończonymi albo sprzecznymi[15].

---

[12]Zbiór należy do pojęć pierwotnych teorii mnogości — nie jest definiowalny. W tym kontekście należy zwrócić uwagę na aksjomaty jako uwikłane definicje pojęć pierwotnych, które nie wprost określają treść tych pojęć. Cantorowi intuicji dotyczącej pojęcia zbioru dostarczały przyjęte dwie podstawowe własności:
— zbiór jest określony przez swoje elementy,
— dla dowolnej własności istnieje zbiór, do którego należą te i tylko te obiekty, które spełniają daną własność,
zwane później odpowiednio: aksjomatem ekstensjonalności i aksjomatem nieograniczonej komprehensji.

[13]Unter eine “Menge” verstehen wir jede Zusammmenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzen. (G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der Trensfiniten Mengenlehre*, „Mathematische Annalen” Bd. 46, 1895, s. 481–512, s. 481).

[14]Pojawienie się antynomii — czyli koniunkcji dwóch zdań sprzecznych między sobą, z których każde da się uzasadnić (dowieść), czyni daną teorię bezwartościową poznawczo. Bowiem jeżeli w obrębie jakiejś teorii da się udowodnić dwa zdania wzajemnie sprzeczne, to da się udowodnić każde zdanie.

[15]Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein dass die Annahme eines „Zusammenseins” aller ihrer Elementen auf einen Widerspruch frucht, so dass es unmöglich

Georg Cantor budując swoją teorię mnogości niejednokrotnie formułował twierdzenia, których nie tylko nie uzasadniał, ale twierdził, że nie potrzebują one dowodu, gdyż są prawami fundamentalnymi, prawami logiki. Jednym z nich jest dychotomia (trychotomia) liczb kardynalnych sformułowana przez niego w 1878 roku. Oczywistym było dlań, że jeśli rozważymy dwa zbiory M, N, różnych mocy, to albo M będzie równoliczny z właściwym podzbiorem N albo na odwrót, czyli albo M jest mniejszej mocy niż N albo odwrotnie[16]. Dla Cantora (przynajmniej początkowo) własność ta wynikała wprost z definicji równoliczności zbiorów. Co więcej, nie zdawał on sobie sprawy ani z faktu, że wprowadził porządek liniowy (zupełny) $\leq$ na klasie liczb kardynalnych[17] ani z doniosłych konsekwencji wynikających z tej własności[18].

Drugim takim zagadnieniem była przełomowa Zasada Dobrego Uporządkowania. Dla Cantora zasada ta była bardzo istotna: uważał

ist, die Vielheit als Einheit, als ein „fertiges Ding" aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich absolut unendliche oder inkonsistente Vielheiten. (G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, (red.) E. Zermelo, Berlin, 1932, s. 443; list Georga Cantora do Richarda Dedekinda 28 lipca 1899 rok).

[16]Sind die beiden Mannigfaltigkeiten M und N nicht von gleicher Mächtigkeit, so wird entweder M mit einem Bestandtheile von N oder es wird N mit einem Bestandtheile von M gleiche Mächtigheit haben; im ersteren Falle nennen wir sie die Mächtigheit von M kleiner, im zweiten Falle nennen wir sie grösser als die Mächtigheit von N. (G. Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Berlin, 1878, s. 242–258, s. 242).

[17]Wprowadzić porządek liniowy (zupełny) na danym zbiorze to określić na nim relację zwrotną, przechodnią, antysymetryczną i spójną. Prawo dychotomii liczb kardynalnych to właśnie warunek spójności relacji $\leq$, czyli porównywalności dowolnych dwóch liczb kardynalnych. Prawo trychotomii liczb kardynalnych orzeka, że dla dowolnych dwóch liczb kardynalnych α, β zachodzi $\alpha < \beta$ lub $\beta < \alpha$ lub $\alpha = \beta$, gdzie relacja $<$ oznacza $\leq$ i $\neq$.

[18]Okazało się, iż dychotomia (trychotomia) liczb kardynalnych jest równoważna Aksjomatowi Wyboru. Warto w tym miejscu podkreślić osiągnięcia polskich matematyków i logików — Wacława Sierpińskiego i Alfreda Tarskiego — w arytmetyce liczb kardynalnych. Tarski, opierając się na pracach Sierpińskiego, pokazał wiele różnych własności liczb kardynalnych równoważnych Aksjomatowi Wyboru. Zob. A. Tarski, *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix*, „Fundamenta Mathematicae", 1924, s. 147–154.

on, że każdy dobrze zdefiniowany zbiór musi się dać dobrze uporządkować[19].

> Pojęcie dobrze uporządkowanego zbioru ma podstawowe znaczenie dla całej teorii zbiorów. Zawsze jest możliwym każdy dobrze zdefiniowany zbiór dobrze uporządkować; myślę, że do tego podstawowego i przełomowego, szczególnie godnego uwagi przez swoją uniwersalność, niezwykłego prawa myśli wrócę w następnych pracach[20].

Od 1895 roku Cantor nie traktował już Zasady Dobrego Uporządkowania jako oczywistej, lecz jako twierdzenie, które należy udowodnić. To właśnie miał być jego ostatni wkład w matematykę. W 1897 wierzył, że udało mu się przeprowadzić poprawny dowód. Jednakże nie został on uznany za przekonywający, przynajmniej przez Davida Hilberta. Problem pozostał nierozwiązany. Sama koncepcja Cantora zasadniczo nie cieszyła się zbyt dużym zainteresowaniem wśród matematyków (między innymi przez wspomniane tutaj mankamenty jego teorii). Dopiero w 1900 roku Hilbert zwrócił uwagę na koncepcję dobrego uporządkowania zbioru $\mathbb{R}$, przedstawiając ją na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu jako pierwszy (wraz z Hipotezą Continuum), spośród 23 kluczowych problemów dla dwudziestowiecznej matematyki. Właśnie na początku dwudziestego wieku, w 1904 roku Ernst Zermelo jako pierwszy dowiódł Zasady Dobrego Uporządkowania. Oparł on swoje rozumowanie na Aksjomacie Wyboru:

---

[19] Dobrze uporządkować zbiór, tzn. wprowadzić na nim relację zwrotną, przechodnią, antysymetryczną i spójną oraz taką, że każdy podzbiór ma element najmniejszy.

[20] Der Begriff der wohlgeordneten Menge weist sich als fundamental für die ganze Mannigfaltigkeitenslehre aus. Dass es immer möglich ist, jede wohldefinirte Menge in die Form einer wohlgeordneten Menge zu bringen, auf dieses, wie mir scheint, grundlegende und folgenreiche durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Dankgesetz werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen. (G. Cantor, *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten V*, „Mathematische Annalen" 21, 1883, s. 545–591, s. 550).

Niech $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ *oraz* $\{X_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ *będzie rodziną niepustych zbiorów, wówczas istnieje odwzorowanie* $\tau\colon \mathfrak{J} \to \bigcup_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ *takie, że* $\tau(j) \in X_j$ *dla dowolnego* $j \in \mathfrak{J}$[21].

Zermelo, jak pisze w swoim artykule Feferman, uzasadnił traktowaną wcześniej jako podstawową i oczywistą Zasadę Dobrego Uporządkowania przy pomocy innej, bardziej ewidentnej i podstawowej zasady — Postulatu Wyboru.

Można zastanawiać się, czy faktycznie tak należy ocenić dokonanie Zermela. Analiza historii i prehistorii Aksjomatu Wyboru pokazuje, że Zermelo, podając swój Postulat, wypowiedział głośno milczące założenie stosowane niejawnie przez wielu matematyków w drugiej połowie dziewiętnastego wieku[22]. Wysłowienie sformułowania Aksjomatu Wyboru wskazuje, że teorie matematyczne buduje się często na niewypowiedzianych założeniach, które są poza wszelką intuicją — milczące i ukryte. Zermelo wykazał, iż Aksjomat Wyboru implikuje Zasadę Dobrego Uporządkowania. Uważał przy tym, że jego Postulat Wyboru jest oczywisty i nie podlega dyskusji, a Cantorowska zasada wymaga uzasadnienia. Od dawna wiemy, że oba twierdzenia są równoważne.

Dla Zermela czysto obiektywny status jego Postulatu był oczywisty, natomiast dla większości matematyków forma wprowadzonego Aksjomatu była nie do przyjęcia — postulowała przecież istnienie bytu ogólnego, idealnego, bez podania metody jego konstrukcji. Warto zdać sobie sprawę, że krytyka Postulatu Zermela miała charakter przede wszystkim filozoficzny[23]. Pierwsza wypowiedź Aksjomatu Wyboru wywołała dyskusję nad kryteriami istnienia obiektów matematycznych,

[21] Zermelo wprowadzoną przez siebie zasadę nazywał Postulatem Wyboru i sformułował ją w następującej formie:
Dla każdej rodziny $\mathfrak{M}$ *niepustych podzbiorów dowolnego zbioru* M *istnieje funkcja* $\gamma\colon \mathfrak{M} \mapsto M$ *taka, że* $\gamma(M') \in M'$ *dla dowolnego* $M' \in \mathfrak{M}$.
Aksjomat Wyboru i Pewnik Wyboru to późniejsze określenia Postulatu Zermela. W niniejszym artykule wszystkich tych określeń będziemy od tej pory używać zamiennie.

[22] Zob. G.H. Moore, *Zermelo's Axiom Choice, Its Origins, Development and Influence*, Springer Verlag, 1982.

[23] W późniejszym czasie przerodziła się w krytykę o charakterze bardziej matematycznym, zwrócono bowiem uwagę na paradoksalne i nieintuicyjne, problematyczne twierdzenia, których uzasadnienie jest oparte na Postulacie Wyboru.

naturą dowodu matematycznego — dopuszczalnymi metodami w matematyce. Podkreślenia wymaga także fakt, że samo pojawienie się tego aksjomatu doprowadziło do uformowania się poglądów filozoficznych takich matematyków jak Rene Baire, Emile Borel czy Henri Lebesgue[24]. Zauważamy silne sprzężenie: z jednej strony uznanie lub odrzucenie Aksjomatu Wyboru było związane z poglądami filozoficznymi (uznaniem lub odrzuceniem konstruowalności jako koniecznego warunku istnienia bytów matematycznych), z drugiej strony, niejednokrotnie Postulat Wyboru stawał się bodźcem do podjęcia kwestii filozoficznych i deklaracji swoich poglądów w sprawie natury obiektów badanych przez matematykę.

Zermelo, widząc jak wielką dyskusję wywołało wprowadzone przez niego stwierdzenie, w 1908 roku w artykule *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*[25] podał pierwszą aksjomatykę teorii mnogości. Należy w tym miejscu podkreślić, że wprowadzone aksjomaty miały jako pierwszorzędny cel uprawomocnić dowód Zasady Dobrego Uporządkwania[26]. Niejako przy okazji został rozwiązany problem znanych antynomii teoriomnogościowych. Pierwsza aksjomatyzacja teorii mnogości powstała z pobudek czysto pragmatycznych, nie zaś z pragnienia uniknięcia paradoksów i uratowania znaczenia teorii mnogości jako podstawowej dziedziny matematyki. Zermelo wprowadził siedem aksjomatów: ekstensjonalności, zbiorów elementarnych, wyróżniania, zbioru potęgowego, unii, wyboru i nieskończoności.

Szybko okazało się, że wprowadzona aksjomatyzacja nie spełniała oczekiwań Zermela. Niewielu matematyków akceptowało wszystkie jego postulaty. Główną przyczyną takiego stanu rzeczy było zaniedbanie przez Zermela podania satysfakcjonujących podstaw logicz-

[24]Zob. G.H. Moore, *Zermelo's Axiom Choice, Its Origins, Development and Influence*, Springer Verlag, 1982. Warto zwrócić uwagę na interesujący fakt stosowania niejawnie Aksjomatu Wyboru przez wymienionych tutaj francuskich konstruktywistów, którzy jawnie odrzucali Postulat Wyboru.

[25]E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, „Mathematische Annalen" 65, 1908, s. 261–281.

[26]Taką tezę można wysunąć analizując wstęp artykułu Zermela. Do takich wniosków dochodzi także G. Moore w swojej monografii.

nych. Dopiero w 1922 Thoralf Skolem i Abraham Freankl (niezależnie) poprawili, opierając się na logice pierwszego rzędu, teorię Zermela. Zmienili aksjomat wyróżniania, nieskończoności i dodali aksjomat schematu zastępowania[27]:

(1) Aksjomat Ekstensjonalności
Jeżeli dwa dowolne zbiory X, Y *mają takie same elementy, to* $X = Y$.

(2) Aksjomat Pary
Dla dowolnych a, b *istnieje zbiór* $\{a, b\}$ *zawierający dokładnie* a, b.

(3) Aksjomat Schematu Wyróżniania
Jeśli P *jest własnością (z parametrem* p*), wtedy dla dowolnego* X *i* p *istnieje zbiór* $Y = \{u \in X\colon P(u, p)\}$*, zawierający tylko te elementy* X*, które spełniają własność* P.

(4) Aksjomat Sumy
Dla dowolnego X *istnieje zbiór* $Y = \bigcup X$ *— suma wszystkich elementów* X.

(5) Aksjomat Zbioru Potęgowego
Dla dowolnego X *istnieje zbiór* $Y = P(X)$.

(6) Aksjomat Nieskończoności
Istnieje zbiór nieskończony.

(7) Aksjomat Schematu Zastępowania
Jeśli f *jest funkcją, wtedy dla dowolnego* X *istnieje zbiór* $Y = f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}$.

(8) Aksjomat regularności
Każdy niepusty podzbiór ma element minimalny[28].

[27] Za Thomasem Jechem, zob. T.J. Jech, *Set Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1997. Podany przez Skolema i Fraenkla zbiór aksjomatów nazywa się powszechnie Aksjomatyką Fraenkla-Zermela i ozn. ZF lub ZFC (jeśli dołączy się Aksjomat Wyboru).

[28] Aksjomat regularności jest nazywany także aksjomatem ufundowania i orzeka, że każdy zbiór posiada element przecinający się pusto z nim samym.

(9) Aksjomat Wyboru
Niech $\mathfrak{J} \neq \varnothing$ *oraz* $\{X_j\}_{j\in\mathfrak{J}}$ *będzie rodziną niepustych zbiorów, wówczas istnieje odwzorowanie* $\tau\colon \mathfrak{J} \to \bigcup_{j\in\mathfrak{J}} X_j$ *takie, że* $\tau(j) \in X_j$ *dla dowolnego* $j \in \mathfrak{J}$.

KIEDY „STWIERDZENIE" JEST AKSJOMATEM?

Feferman zastanawia się dlaczego wprowadzone przez Fraenkla postulaty zasługują na miano aksjomatów — a w szczególności, dlaczego Aksjomat Wyboru znalazł się wśród nich. Pyta o kryterium uznania jakiejś zasady za aksjomat. Feferman na to nie odpowiada.

Natomiast próbę odpowiedzi podejmuje Penelope Maddy. W swoich dwóch artykułach zatytułowanych *Believing in axioms*[29] wskazuje, jak można „usprawiedliwiać" uznanie danych twierdzeń za aksjomaty[30]. Wprowadza rozróżnienie uzasadnień danego aksjomatu na oparte na wewnętrznych lub zewnętrznych argumentach[31]. Wewnętrzne uzasadnianie (ang. *justification*) to właściwie uznanie danego stwierdzenia jako samooczywistego, ewidentnego. Na przykład głównym argumentem przemawiającym za uznaniem aksjomatu ekstensjonalności jest jego samoistne wynikanie z pojęcia zbioru. Uza-

[29]P. Maddy, *Believing in axioms I*, „The Journal of Symbolic Logic", Vol. 53, No. 2, 1988, s. 481–511. P. Maddy, *Believing in axioms II*, „The Journal of Symbolic Logic", Vol. 53, No. 3, 1988, s. 736–764.

[30]Maddy zwraca uwagę na pewną znamienną cechę aksjomatów. Okazuje się (co zdaje się obrazować właśnie historia Aksjomatu Wyboru), że kryterium samooczywistości, ewidentności wcale nie jest wystarczające do uznania, że dane orzeczenie jest aksjomatem. Takie cechy jak samooczywistość, ewidentność danej zasady mogą (ale nie muszą) być jedynie bodźcem do wysunięcia propozycji uznania jej za aksjomat. Maddy pokazuje, że w matematycznym uzasadnianiu, czy raczej usprawiedliwianiu aksjomatów, opieramy się na metodologii właściwej tworzeniu teorii naukowych o prawach natury. Kluczowym bowiem narzędziem w ręku matematyka okazuje się być badanie konsekwencji, jakie niesie ze sobą przyjęcie danego kandydata na aksjomat, zarówno w danej teorii (na gruncie której jest podane owo twierdzenie) jak i całej matematyki.

[31]Jest jeszcze jeden sposób — po prostu uznanie danego twierdzenia jako niepisanej, ogólnej zasady (ang. *rule of thumb*). Takie „wyssane z palca" zasady związane są z intuicyjnym, przedteoretycznym podejściem do danej teorii.

sadnienie zewnętrzne to „naśladowanie” uzasadniania hipotez naukowych — poprzez badanie konsekwencji przyjęcia danego twierdzenia jako obowiązującego aksjomatu. W zewnętrznym podejściu podkreśla się rolę aksjomatu w dostarczaniu nowych, prostszych dowodów starych twierdzeń, w pewnej unifikacji poprzednich wyników danej teorii z nowymi osiągnięciami, zapewnianiu odpowiedniej siły dowodowej potrzebnej w rozwiązywaniu problemów pozostawionych otwartymi przez poprzedników[32].

Feferman chce ostatecznie uzasadnić swoje stwierdzenie, że pytanie o potrzebę nowych aksjomatów w matematyce jest pytaniem *stricte* filozoficznym[33]. Jeśli rozważymy je w kontekście rozstrzygnięcia Hipotezy Continuum, to według Fefermana matematyka nie potrzebuje żadnych nowych aksjomatów, bowiem Cantorowskie przypuszczenie jest z natury niejasne i samo continuum nie jest poprawnie określonym obiektem matematycznym[34].

---

[32]Głównym celem rozważań Maddy jest ukazanie błędności bardzo popularnego stwierdzenia, że wszystkie aksjomaty ZFC zostały uzasadnione na mocy wewnętrznej argumentacji, podczas gdy próby usprawiedliwienia przyjęcia nowego aksjomatu (np. w kontekście Hipotezy Continuum) są uzasadniane na mocy zewnętrznej argumentacji. Część aksjomatów ZFC nie tylko nie została przyjęta na mocy samego kryterium ich samooczywistości, ale nawet trudno jest jednoznacznie wskazać granicę między wewnętrznym i zewnętrznym uzasadnieniem. Najlepiej widać to na przykładzie Aksjomatu Wyboru. Historia pokazuje, że dla bardzo wielu matematyków bodźcem do jego przyjęcia było poznanie jego roli i znaczenia dla możliwości uprawiania matematyki. Bowiem z upływem czasu uświadomiono sobie, że wiele dyscyplin matematycznych (topologia, analiza, algebra) „psuje się” już na poziomie pojęciowym, jeśli odrzucimy Pewnik Wyboru. Zatem jego uznanie związane jest z pobudkami czysto matematycznymi, nie filozoficznymi; abstrahuje się od konsekwencji natury filozoficznej (choć należy pamiętać, że zasadniczo odrzucenie Aksjomatu Wyboru spowodowane jest preferencjami filozoficznymi).

[33]Takie podejście nie daje jednoznacznej odpowiedzi na zadane pytanie, ale tyle odpowiedzi, ile jest różnych filozofii matematyki.

[34]My own view — as is widely known — is that the Continuum Hypothesis is what I have called an “inherently vague” statement, and that the continuum itself, or equivalently the power set of the natural numbers, is not a definite mathematical object. (S. Feferman, P. Maddy, J. Steel, and H. Friedman, *Does Mathematics Need New Axioms?*, „Bulletin of Symbolic Logic” 6, 2000, s. 401–446, s. 405). Feferman wskazuje argumenty, które mogą stać się bodźcem do zastanowienia się właśnie nad kwestią określoności i poprawnej definiowalności Hipotezy Continuum. Frapujący

Z drugiej strony, jeśli zastanowimy się nad potrzebą nowych aksjomatów w kontekście innych otwartych problemów — na przykład milenijnych — to nie ma według Fefermana cienia dowodu, że matematycy będą potrzebować jakichkolwiek aksjomatów spoza ZFC, by je rozwiązać. Wcześniej czy później zostaną one rozstrzygnięte na bazie budowanych współcześnie teorii matematycznych, opartych na dotychczas powszechnie uznawanych aksjomatach fundacjonalnych. Choć, jak pokazuje historia Twierdzenia Fermata, może upłynąć dużo czasu, zanim znajdziemy ich rozwiązanie.

Na tle tych rozważań, filozofia staje się istotna w dyskusji nad potrzebą nowych aksjomatów w matematyce oraz sposobem uzasadnienia uprawiania teorii mnogości i matematyki. Według Fefermana powszechnie przyjmowane stanowisko platonizmu matematycznego nie jest satysfakcjonującym usprawiedliwieniem matematyki, a w szcze-

może być na przykład fakt, że Cantorowska hipoteza nie doczekała się rozwiązania pomimo istotnego rozwoju dziedzin teorii mnogości w ramach których miały być sformułowane nowe aksjomaty mające ją rozstrzygnąć. Dla niektórych, zastanawiające może być, dlaczego Hipoteza Continuum nie została umieszczona na liście problemów milenijnych ogłoszonych przez Clay Mathematics Institute 24 maja 2000 roku. Chcemy w tym miejscu podkreślić, że taka sytuacja nie dziwi matematyków. Dla nich Hipoteza Continuum jest rozwiązana — zgodnie z twierdzeniem Cohena jest ona niezależna od aksjomatyki ZF. Jest to zasada interesująca głównie specjalistów z zakresu teorii mnogości i na jej gruncie jest ciągle „intensywnie" badana. Wspomnieć należy w tym miejscu chociażby Wacława Sierpińskiego, który podał około stu twierdzeń dotyczących wewnętrznej struktury prostych i płaszczyzny równoważnych Hipotezie Continuum i w 1947 roku udowodnił, że Uogólniona Hipoteza Continuum implikuje Aksjomat Wyboru. Dla wielu dyscyplin matematycznych („odległych" od teorii mnogości) Hipoteza Continuum nie ma wielkiego znaczenia (z wyłączeniem teorii miary, która pomimo iż zaliczana do analizy matematycznej jest bardzo silnie ugruntowana w teorii mnogości i istotnie zależy zarówno od Hipotezy Continuum jak i od Pewnika Wyboru. — Zob. D.H. Fremlin, *Measure theory*, vol. 5: *Set — Theoretic Measure Theory*, pt. I, pt. II, Torres Fremlin, Colchester, 2008.). Jednakże, w żadnym razie nie można powiedzieć, że Hipoteza Continuum jest traktowana przez matematyków jako źle zdefiniowany problem. Argumentacja Fefermana, że idea pojęcia zbioru potęgowego zbioru liczb naturalnych, którą posiadamy, nie jest wystarczająca dla właściwego określenia tego obiektu, nie wydaje się być satysfakcjonująca dla matematyków w ogóle, a zwłaszcza dla uprawiających teorię mnogości. Co więcej, w świetle powyższego uzasadnienia Fefermana, również Aksjomat Wyboru powinien być niejasny, źle określony. Amerykański matematyk i filozof ten problem przemilcza, pomija.

gólności usprawiedliwieniem ewentualnej określoności pojęcia continuum. Należy szukać nowej filozofii, która mogłaby wytłumaczyć obiektywność tej dziedziny.

Przedstawione powyżej stanowisko Fefermana to tylko jeden z wielu głosów w debacie nad potrzebą nowych aksjomatów w matematyce. Odmienne poglądy prezentuje Penelope Maddy. Analizując stanowisko Fefermana, wskazuje pewne jego sądy i założenia, z którymi jej zdaniem, nie do końca można się zgodzić.

Po pierwsze, według Maddy podany przez Fefermana warunek (niewystarczający i niesatysfakcjonujący) przyjęcia Platońskiego stanowiska w filozofii matematyki nie jest jedynym możliwym założeniem mogącym uzasadnić szeroko rozumianą działalność matematyków (obejmującą także badania nad Hipotezą Continuum)[35]. Jej zdaniem uprawianie teorii mnogości w szczególności i uprawianie matematyki w ogóle nie potrzebuje uzasadnienia na gruncie filozoficznym. Samo usprawiedliwienie powinno pochodzić z wnętrza, być sformułowane w prostych kategoriach, których znaczenie jest najbardziej skuteczne w odniesieniu do odpowiednich bytów matematycznych. Rolą filozofii nie jest krytykowanie czy uzasadnianie sposobu uprawiania matematyki. Pozostaje jej tylko próba zrozumienia i opisu pracy matematyka[36].

Z tego naturalistycznego punktu widzenia początkowe pytanie — czy matematyka potrzebuje nowego aksjomatu — jest bezcelowe. Właściwiej byłoby zapytać, czy poszczególne aksjomaty są pomocne w poszczególnych działaniach matematycznych, czy pomogą osiągnąć wyznaczone cele[37]. Ponadto, jeśli przyjmiemy takie stanowisko, to nie

[35]Maddy proponuje odcięcie się od patrzenia na aksjomaty w kategorii konieczności, bezwarunkowej prawdziwości, uważając to za staromodne. Mówi, że na pytanie skąd wiemy, że są konieczne, jedyną poprawną odpowiedzią jest, że nie wiemy.

[36]Filozofię matematyki można zatem traktować jako dyscyplinę o charakterze normatywnym (takie podejście dominowało do połowy XX wieku) lub deskryptywnym jako opis rzeczywistych procedur (przyjmowane od czasów Imre Lakatosa).

[37]Uzasadniając swój pogląd, Maddy zauważa, że nigdy w historii nie miała miejsca sytuacja, że matematycy tworząc teorie zastanawiali się czy matematyka potrzebuje np. nowych aksjomatów geometrii nieeuklidesowych. Rozwój dziewiętnastowiecznej i dwudziestowiecznej matematyki obrazuje ciągłe próby wyzwalania się z ograniczania matematyki, chęci uprawiania czystej matematyki, w której główną rolę odgrywa in-

musimy się martwić czy Hipoteza Continuum jest jasnym, dobrze określonym problemem, nie musimy udowadniać, że istnieje jej poprawne rozstrzygnięcie.

Widzimy, że jeśli w ramach naturalizmu zapytamy o powody dla których przyjmujemy nowe aksjomaty, to kluczową okaże się argumentacja zewnętrza. Wydaje się, że ta obserwacja jest drugim z głównych punktów, w których podejścia Maddy i Fefermana zasadniczo się różnią. Co prawda Feferman nie sprzeciwia się wprost argumentacji zewnętrznej, jednakże daje nam do zrozumienia, że dla aksjomatów fundacjonalnych kluczowe jest uzasadnienie wewnętrzne. Z kolei dla Maddy, skuteczność i efektywność aksjomatów są wystarczające do uznania ich zasadności.

FILOZOFIA MATEMATYKI DZIŚ

Feferman i Maddy dają diametralnie różne odpowiedzi na pytanie o potrzebę aksjomatów, a co za tym idzie prezentują odmienne zdanie na temat roli filozofii w uprawianiu matematyki. Widzimy zatem, że są filozofowie — jak Feferman, którzy twierdzą, że do przyjęcia (uzasadnienia) nowego aksjomatu potrzebna jest właśnie filozofia. Co więcej, niektórzy sądzą, iż sama potrzeba nowego aksjomatu wynika z filozoficznej refleksji. Z drugiej strony jest Penelope Maddy i jej naturalistyczny pogląd. Nie mamy zatem jednej zgodnej odpowiedzi na pytanie o rolę filozofii w wyborze aksjomatów. Nie mamy wspólnego poglądu na związek filozofii matematyki i matematyki w czasach współczesnych.

Nie podlega jednakże dyskusji, że na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku rozważania filozoficzne odgrywały istotną rolę w „codziennej” praktyce matematycznej, w rozwoju matematyki. Silna zależność matematyki od analiz filozoficznych była wyraźnie widoczna. Natomiast dzisiaj trudno mówić z perspektywy matematyka

tuicja matematyka i wolność. Według Maddy matematycy powinni iść w każdą stronę, w którą poniesie ich intuicja matematyczna. Dlatego pytanie o potrzebę nowych aksjomatów należy zastąpić pytaniem o korzyści, jakie będzie czerpać matematyka z tych aksjomatów.

o istotnej zależności matematyki od filozofii. Dla matematyka rozważania filozoficzne rozstrzygające status obiektów matematycznych nie mają w praktyce żadnego znaczenia i zasadniczo w ogóle nie są dla niego interesujące[38]. W szczególności, w kontekście wielości różnych modeli teorii mnogości i matematyki, filozoficzny aspekt pytania o potrzebę aksjomatów przestaje mieć jakiekolwiek znaczenie. W pewnym sensie można powiedzieć, że większość współczesnych matematyków pracuje tak, jak gdyby byli platonikami — niejako odkrywając i badając obiektywnie istniejące obiekty. Nie zajmują się oni jednakże tym, co niesie ze sobą realistyczne stanowisko, są tylko „jak gdyby realistami". Jeżeli na terenie matematyki jest podejmowany jakikolwiek dyskurs filozoficzny, to jest on podejmowany w głównej mierze przez filozofów.

Pada w tym miejscu pytanie czy można badać kwestie filozoficzne pojawiające się na gruncie matematyki bez znajomości wyników tej dziedziny. Naszym zdaniem zdecydowanie bardziej wartościowa jest filozofia matematyki uprawiana w kontekście matematyki — czyli zakładająca dobrą znajomość przynajmniej jej podstaw. Tu jednakże znowu napotykamy na poważny problem — jak wyznaczyć tę „podstawę programową" w perspektywie ciągłej, wykładniczej ekspansji matematyki? Już od wielu lat nie da się mówić o całościowej wiedzy matematycznej. Czy zatem można rozważać holistyczną filozofię matematyki? Jedynym wyjściem wydaje się być uprawiane filozofii matematyki na gruncie poszczególnych dyscyplin matematycznych. To swoiste wyspecjalizowanie pozwoli filozofowi dobrze poznać podstawowe pojęcia i techniki dowodowe danej dziedziny (zgłębić jej metodologię) i da mu szanse dokonywania ciekawych obserwacji i interpretacji, równocześnie chroniąc go przed zarzutem zajmowania się czymś,

[38]Nie chcemy w tym miejscu całkowicie wykluczyć jakiejkolwiek roli filozofii w uprawianiu matematyki. Są przecież matematycy, dla których kwestie filozoficzne mają duże znaczenie — dają ogląd na to czym tak naprawdę zajmuje się matematyka, jak należy ją uprawiać. Można także rozważać ukrytą (nieuświadomioną) obecność filozofii przejawiającą się przykładowo w wyborze narzędzi czy metodologii pracy matematycznej.

Ciekawe analizy dotyczące filozofii matematyki w ogóle, można znaleźć w K. Wójtowicz, *O matematyce i filozofii matematyki*, „Zagadnienia filozoficzne w nauce" XXIII, 1998, s. 53–66.

na czym się nie zna. Taka „nowa" filozofia ma niewiele wspólnego z filozofią matematyki uprawianą jeszcze na początku minionego stulecia. Do tamtej sytuacji nie ma jednakże powrotu. Dodatkowo, w kontekście zaniedbywania, a nawet celowego odrzucania przez matematyków kwestii filozoficznych, próba uprawiania filozofii poszczególnych dyscyplin matematycznych zdaje się być bardzo cenna. Możliwy bowiem będzie równorzędny dyskurs między matematykiem a filozofem (w obrębie danej gałęzi matematyki), mogący przynieść ciekawe wyniki.

SUMMARY

THE ROLE OF AXIOMS IN CONTEMPORARY MATHEMATICS AND IN VIEW OF INVESTIGATIONS ON AXIOM OF CHOICE

We show how philosophy effected the shape of mathematics when the proof of Well-Ordering Principle was formulated by Ernst Zermelo. We also consider the significance of philosophy of mathematics today. We concentrate on Solomon Feferman and Penelope Maddy attitude in the recent debate on the need of new axioms in mathematics.