Prace z równań różniczkowych w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”

Jan Koroński

Instytut Matematyki, Wydział Fizyki,
Matematyki i Informatyki, Politechnika Krakowska

Papers on differential equations in the *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*

Abstract

This paper concerns the general characteristics of the Natural Science Society in Paris and the *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*. Moreover, in the context of the development of the theory of differential equations in the world, we present in this paper the articles of Y. Villarceau (1813), W. Zajączkowski (1837–1898) and W. Folkierski (1842–1904) on differential equations, which were published in *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*.

Key words:

differential equations, *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*, papers on differential equations in *Memoirs of the Natural Science Society in Paris*

1. Ogólna charakterystyka Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu i jego „Pamiętnika"

Po zamknięciu Szkoły Głównej Warszawskiej związanym z upadkiem powstania styczniowego (1863) Polacy przebywający na emigracji w Paryżu powołali do istnienia Szkołę Wyższą Polską zwaną Szkołą Montparnaską (była zlokalizowana przy bulwarze Montparnasse). Miała ona początkowo charakter zakładu dobroczynnego: swoim uczniom niejednokrotnie zapewniała nieodpłatnie naukę, zakwaterowanie i wyżywienie[1]. Miała zastąpić l'École Polytechnique osobom nieposiadającym obywatelstwa francuskiego, głównie Polakom. Nauczali w niej m.in. Henryk G. Niewęgłowski (1807–1881), Eduardo Juan Habich (1835–1909), Kazimierz Szulc (1869–1871), Adolf E. Sągajło (1806–1877) i Władysław Folkierski (1842–1904). W 1870 roku władze francuskie zamknęły szkołę. Po przymusowym zaprzestaniu działalności Szkoły Montparnaskiej w tym samym roku powstało w Paryżu Towarzystwo Nauk Ścisłych[2]. Jego głównym celem było publikowanie w języku polskim ory-

[1] J. Dianni, A. Wachułka, *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1963.

[2] Tamże; W. Folkierski, *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu*, „Prace Matematyczno-Fizyczne" 1895, nr 6, s. 151–175; Z. Pawlikowska-Brożek, *Matematyka*, [w:] *Zarys dziejów nauk przyrodniczych w Polsce*, red. J. Kuryłowicz, F.W. Sawicka, E. Szczepańska, E. Turyn, H. Wojdowska, Wiedza Powszechna, Warszawa 1983; „Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej", seria C, z. 18, Warszawa 1974 (tom poświęcony Towarzystwu Nauk Ścisłych w Paryżu).

ginalnych prac naukowych i dydaktycznych polskich autorów[3]. Towarzystwo istniało do roku 1882 i wydało 12 tomów „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" zawierających prace około 40 autorów. Z inicjatywy Towarzystwa opublikowano także 18 tomów dzieł dydaktycznych. Tak obfity dorobek Towarzystwa był możliwy dzięki inicjatywie i finansowemu wsparciu wybitnego mecenasa nauk, Jana Kantego Działyńskiego (1829–1880). „Pamiętnik" zawiera głównie oryginalne prace polskich matematyków (działających zarówno w kraju, jak i na emigracji) z zakresu rachunku różniczkowego i całkowego, równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, geometrii analitycznej, algebry wyższej z uwzględnieniem nowej wówczas teorii wyznaczników i teorii funkcji analitycznych. Drukowano tu również bardzo rozbudowane recenzje dzieł dydaktycznych. Ponadto sporadycznie publikowano wartościowe prace obcych matematyków, np. pracę habilitacyjną Bernharda Riemanna. Znaczna część prac wydrukowanych w „Pamiętnikach" dotyczyła fizyki, budownictwa, biologii i innych nauk przyrodniczych[4].

[3] W. Więsław, *Polskojęzyczne publikacje matematyczne po roku 1800. Rola wydawnictw „Wiadomości Matematycznych"*, [w:] *Matematycy polskiego pochodzenia na obczyźnie. Materiały konferencyjne z XI Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 5–9 maja 1997*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1998, s. 237–247.

[4] „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. I–XII, Wydawnictwo Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1870–1881 (egzemplarze dostępne np. w Bibliotece Jagiellońskiej w Krakowie).

W Towarzystwie Nauk Ścisłych w Paryżu bardzo aktywnie działali pracujący na obczyźnie matematycy polscy, a wśród nich wspomniani już H.G. Niewęgłowski, A.E. Sągajło, W. Folkierski oraz Władysław Gosiewski (1844–1911). Gosiewski był bardzo płodnym matematykiem. W „Pamiętniku" opublikował kilka rozpraw z matematyki i teorii sprężystości, kierując później swe zainteresowania ku mechanice cząsteczkowej. W 1872 roku powrócił do kraju i zajął się pracą nauczycielską w szkolnictwie niższego szczebla i pracą biurową, skromnie korzystając dalej ze swego nieprzeciętnego talentu naukowego. Oprócz matematyków przebywających w Paryżu w „Pamiętniku" drukowali również swoje prace matematycy z czynnych ośrodków naukowych w kraju, m.in. Wawrzyniec Żmurko (1824–1889), Władysław Zajączkowski (1837–1898) i Władysław Kretkowski (pseudonim Trzaska) (1840–1914) ze Lwowa, Marian A. Baraniecki (1848–1895) z Warszawy oraz przebywający w Petersburgu Julian K. Sochocki (1842–1927).

Ciekawą formą działalności Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu było ogłoszenie dwóch konkursów. Jeden nosił tytuł *Krytyczne i umiejętne dzieł matematycznych Hoene-Wrońskiego najprostsze i najściślejsze ocenienie*, a drugi przeprowadzono w 1873 roku, wyznaczając nagrodę za opracowanie bibliografii piśmiennictwa polskiego dotyczącego matematyki, fizyki i ich zastosowań. Drugi konkurs nawiązywał do wydrukowanej nakładem Biblioteki Kórnickiej w 1873 roku w Krakowie *Bibliografii piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki, oraz ich zastosowań* Teofila Żebrowskiego (1800–1887), która zawierała chronologicznie opracowaną bibliografię do roku 1830. Trudu opracowania tego tematu po roku 1830 nikt się nie podjął do dnia dzisiejszego. Pierwszy konkurs także nie przyniósł oczekiwanych rezultatów. Poza konkursem opublikowano dwa artykuły: tłumaczenie pracy Arthura Cayleya z „Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics” z 1873 roku pt. *O twierdzeniu Wrońskiego* oraz powstały w wyniku reakcji na ten pierwszy tekst autorstwa Abla Transona *Uwagi nad objawem naukowym z powodu wzoru ogłoszonego przez Wrońskiego w 1812 r. i dowiedzionego przez Cayleya w 1873*. Oba artykuły dotyczą tzw. prawa najwyższego – tak nazwał Wroński (1778–1853) swoje twierdzenie, z którego wynika wiele szczegółowych twierdzeń i wzorów matematycznych. O znaczeniu twierdzenia Wrońskiego dla matematyki świadczy jeszcze jedna praca Transona pt. *Prawo szeregów Wrońskiego – jego foronomia*, która powraca do twierdzenia Wrońskiego, a także jedna z prac naukowych Stefana Banacha (1892–1945), który udowodnił pewne twierdzenie z analizy funkcjonalnej, korzystając z metody zawartej w dowodzie twierdzenia Wrońskiego.

2. Prace matematyczne w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”

„Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu” zawiera ogółem 91 artykułów z zakresu matematyki, astronomii, fizyki, mechaniki technicznej, budownictwa, chemii, biologii, anatomii zwierząt, techniki i geografii. W tej liczbie 44 prace dotyczą matematyki z geometrią wykreślną, recenzjami dzieł dydaktycznych i notkami konkursowymi włącznie. Po odliczeniu pięciu prac obcych matematyków (Yvona Villarceau [1813–1883] – t. XII, Bernharda Riemanna [1826–1866] – t. IX, Abla Transona [1805–1876] – dwie prace w t. VIII i Arthura Cayleya [1821–1895] – t. IV) oraz czterech not konkursowych i trzech recenzji dzieł dydaktycznych pozostają 32 oryginalne prace z matematyki autorów polskich. Poniżej podajemy pełną listę artykułów dotyczących matematyki w poszczególnych tomach „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu".

Tom I

1. W. Gosiewski: *O funkcyach jednorodnych i jednogatunkowych*
2. W. Żmurko: *Dowód na twierdzenie Hessego o wyznaczniku funkcyjnym*
3. W. Żmurko: *Przyczynek do teorii największości i najmniejszości funkcyj wielu zmiennych*
4. J.N. Franke: *O względnościach wykreślnych zachodzących między rzutami systemów geometrycznych*
5. W. Kretkowski – Trzaska: *O niektórych własnościach pewnego rodzaju funkcyj jednej zmiennej urojonej*
6. W. Kretkowski – Trzaska: *O pewnem zastosowaniu wyznaczników funkcyjnych*
7. W. Kretkowski – Trzaska: *O nakreśleniu do trzech kół danych leżących na powierzchni jednej kuli, czwartego koła stycznego leżącego na tejże powierzchni*

8. W. Gosiewski: *Rozbiór krytyczny dzieł p. G.H. Niewęgłowskiego; Studyum pierwsze Arytmetyka; Studyum dr[u]gie Geometrya*
9. Program przedstawionego do konkursu przez Towarzystwo Nauk Ścisłych zadania: *Ocenienie prac matematycznych H. Wrońskiego*
10. W. Gosiewski: *O funkcyjach jednoczesnych i jednogatunkowych – nota do twier. VI, Roz. II, 17*

Tom II

1. W. Gosiewski: *Kilka uwag o liczbie różnych wartości, jakie funkcya może przybierać w skutku przestawień zmiennych do niej wchodzących*
2. W. Kretkowski – Trzaska: *Kilka uwag tyczących się funkcyj wielowymiarowych*
3. W. Kretkowski – Trzaska: *Dowód pewnego twierdzenia tyczącego funkcyj wielowymiarowych okresowych*
4. A. Sągajło: *Rozbiór krytyczny dzieła p. Folkierskiego pt. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego, Tom pierwszy, Rachunek różniczkowy*
5. W. Gosiewski: *Przegląd krytyczny dzieła p. G.H. Niewęgłowskiego pod tytułem: Trygonometrya etc.*

Tom III

1. W. Folkierski: *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych*

Tom IV

1. W. Puchewicz: *Teorya funkcyj zmiennej złożonej*
2. A. Cayley: *O twierdzeniu Wrońskiego*
3. Sprawozdanie z konkursu naznaczonego przez Towarzystwo Nauk Ścisłych: *Ocenienie prac matematycznych H. Wrońskiego*
4. Program przedstawionego do konkursu przez Towarzystwo Nauk Ścisłych zadania: *Ułożenie bibliografii piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosowań, od roku 1831 aż do najnowszych czasów*

Tom V

1. K. Maszkowski: *Perspektywa rzutowa jako wynik rzutów prostokątnych na płaszczyzny ukośnie względem siebie położone*

Tom VI

1. W. Zajączkowski: *O równaniu różniczkowem* $Xdx + X_1dx_1 + \ldots + X_ndx_n = 0$*, całkowalnem przez jedno równanie pierwotne*

Tom VII

1. K. Hertz, S. Dikstein: *Teorya liczb złożonych i ich funkcyj*
2. M.A. Baraniecki: *Rozwinięcie na ułamek ciągły stosunku dwóch całek eliptycznych pierwszego i drugiego gatunku*
3. M.A. Baraniecki: *O przedstawieniach wymiernych*
4. A. Sągajło: *Kilka zadań geometryi analitycznej wyłożonych podług najnowszych metod analizy nowoczesnej*

Tom VIII

1. M.A. Baraniecki: *Dowód jednego zasadniczego twierdzenia odnoszącego się do hypergeometrycznych funkcyj*
2. A. Sągajło: *Krótka wiadomość o przedniejszych poszukiwaniach analizy nowoczesnej nad kołem stycznem do trzech kół danych*
3. A. Transon: *Uwagi nad objawem naukowym z powodu wzoru ogłoszonego przez Wrońskiego w roku 1812 i dowiedzionego później przez p. Cayley w roku 1873*
4. A. Transon: *Prawo szeregów Wrońskiego (jego foronomia)*
5. M.A. Baraniecki: *Zasadnicze wnioski geometryczne z teoryi algebraicznej form kwadratowych podwójnych*

Tom IX

1. B. Riemann: *O hypotezach, które służą za podstawę geometrii, rozprawa p. Riemanna, przetłomaczona i objaśniona przypiskami przez S. Diksteina i W. Gosiewskiego*

Tom X

1. Sochocki: *Wyznaczanie stałych mnożników we wzorach dla linijnej transformacji funkcyi θ. – Sumy Gaussa i prawo wzajemności symbolów Legendre'a*
2. M.A. Baraniecki: *O tworzeniu systemu sprzężonego podstawień liniowych...*
3. M.A. Baraniecki: *O wyznaczaniu spólnych pierwiastków dwóch równań danych przy pomocy rugownika tych równań*
4. Władysław Kretkowski – Trzaska: *O mnożeniu funkcji kołowych i hiperbolicznych*

5. W. Kretkowski – Trzaska: *Dowód pewnego wzoru Lame'go*
6. M. Szystowski i A. Martynowski: *Rachunek wykreślny na płaszczyźnie*

Tom XI

1. K. Hertz: *O funkcjach nie mających pochodnych*
2. W. Żmurko: *Badania w dziedzinie nauki o równaniach oparte na poglądach analityczno-geometrycznych*

Tom XII

1. M. Szystowski: *Rachunek wykreślny na płaszczyźnie, Część II*
2. S. Rychlicki: *O przekształceniu kwadratowem*
3. W. Gosiewski: *O rożniczkowaniu i całkowaniu funkcji rzeczywistej jednej zmiennej niezależnej*
4. Władysław Kretkowski – Trzaska: *Rozwiązanie pewnego zadania z geometryi wielowymiarowej*
5. M.Y. Villarceau: *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych*
6. M.A. Baraniecki: *Ocena książki pod tytułem Algebra przez G.H. Niewęgłowskiego*

Z powyższej listy wynika, że w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" opublikowało swoje prace 15 matematyków polskich i pięciu obcych. Rekordzistą okazał się W. Kretkowski (8 prac), na drugim miejscu jest M.A. Baraniecki (7 prac), na trzecim W. Gosiewski (6 prac). W dalszej kolejności można wymienić A. Sągajłę i W. Żmurkę, którzy ogłosili odpowiednio trzy i dwie prace. Pozostali polscy autorzy wydali po jednej pracy samodzielnej, a niektórzy dodatkowo po drugiej współautorskiej. Równaniom różniczkowym poświęcono trzy prace. Ich autorami są Folkierski, Zajączkowski i Villarceau. W dalszym ciągu omówimy bardziej szczegółowo prace z równań różniczkowych.

3. Praca Yvona Villarceau *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”, t. XII, Paryż 1881

Tekst Villarceau jest jedyną pracą matematyczną w tomie dwunastym „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”. Jest to tłumaczenie z języka francuskiego pracy *De la théorie des sinus des orders supérieurs à l'intégration des équations linéaires*, która była przedstawiona Francuskiej Akademii Nauk 5 kwietnia i 29 maja 1880 roku oraz na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu w dniu 4 czerwca 1880 roku. Jej autor był astronomem francuskim i rozważał problem zgięcia lunet podpartych w jednym miejscu. Takie trudności po inżyniersku rozwiązywano wówczas metodą kolejnych przybliżeń. Villarceau sprowadził rozwiązanie rozważanej kwestii do rozwiązania dwumiennego równania różniczkowego zwyczajnego o stałych współczynnikach rzędu czwartego. Rozwiązując to równanie, zauważył, że wykorzystując tzw. sinusy rzędów wyższych (według ówczesnej polskiej terminologii – wstawy rzędów wyższych), które rozważał 60 lat wcześniej polski matematyk Józef Maria Hoene-Wroński, rozwiązanie rozważanego równania różniczkowego można natychmiast wypisać w jawnej postaci. Następnie Villarceau przeniósł ten sposób rozwiązania na liniowe jednorodne dwumienne równania różniczkowe zwyczajne rzędu *m*-tego postaci:

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \pm r^m\eta = 0 \ ,$$

gdzie *m* jest dowolną liczbą naturalną większą lub równą dwa, a potem przedstawił metodę rozwiązywania dwumianowych liniowych niejednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych rzędu *m*-tego o stałych współczynnikach następującej postaci:

$$\frac{d^m\eta}{dx^m} \pm r^m\eta = V$$

metodą uzmienniania stałych. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego Villarceau uzyskuje w postaci:

$$\eta = C_0\phi_0 rx + C_1\phi_1 rx + C_2\phi_2 rx + \ldots C_{m-1}\phi_{m-1} rx$$

gdzie

$$\phi_0 rx,\ \ \phi_1 rx,\ \ \phi_2 rx, \ldots, \phi_{m-1} rx$$

oznaczają sinusy (wstawy) rzędu m – 1-go. Wskaźnik zero służy tu do oznaczenia kosinusa (według ówczesnej polskiej terminologii – dostawy).

Metoda Villarceau zaprezentowana w pracy *De la théorie des sinus des ordres supérieurs à l'intégration des équations linéaires* wpisuje się w ogólny nurt poszukiwania przez wielu matematyków XVIII i XIX wieku postaci rozwiązania równania różniczkowego liniowego jednorodnego i niejednorodnego rzędu *m*-tego o stałych współczynnikach[5]. Dla rozwiązywania równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach zasadnicze znaczenie ma praca Leonharda Eulera z 1743 roku pt. *O całkowaniu równań różniczkowych wyższych rzędów*. Stosując podstawienie wykładnicze

$$y = e^{px},$$

Euler otrzymał wielomian charakterystyczny odpowiadający badanemu rozwiązaniu. W tej pracy przeanalizował on wszystkie przypadki pierwiastków wielomianu charakterystycznego, tj. oprócz różnych pierwiastków rzeczywistych uwzględnił również wielokrotne pierwiastki rzeczywiste i pierwiastki zespolone, przy czym posługiwał się podstawieniami postaci

$$y = e^{kx}u.$$

[5] R. Bujakiewicz-Koreńska, J. Koroński, *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, [w:] *Matematyka czasów Weierstrassa. Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 28 maja – 2 czerwca 2001 roku*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.

W ten sposób pomimo niedoprecyzowanego jeszcze ówcześnie pojęcia liniowej niezależności funkcji Euler uzyskał sposób na otrzymywanie ogólnych rozwiązań dla równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach. W 1753 roku podał pewien sposób rozwiązywania równań różniczkowych liniowych niejednorodnych o stałych współczynnikach. Sposób Eulera opiera się na zastosowaniu czynnika całkującego i kolejnego obniżania rzędu równania. Inny sposób, polegający na sprowadzeniu równania niejednorodnego do układu równań liniowych rzędu pierwszego, podał w 1750 roku Jean le Ronde d'Alembert. Wykazał on także później, że rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania liniowego jednorodnego i jakiegokolwiek rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Problemem, jakie kombinacje liniowe tworzą rozwiązanie ogólne równania liniowego jednorodnego, zajmował się następnie Joseph Louis Lagrange i inni matematycy XIX wieku. Metodę wariacji stałych dla równań różniczkowych liniowych niejednorodnych wprowadził w 1777 roku Lagrange. W szczególnych przypadkach była ona znana matematykom dużo wcześniej. Euler zastosował tę metodę już w 1739 roku do rozwiązywania równania różniczkowego niejednorodnego rzędu drugiego. Metodę tę stosowali również Daniel Bernoulli, Pierre Simon de Laplace i ich następcy.

Wobec powyższych uwag o rozwoju metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych należy stwierdzić, że omawiana powyżej praca Villarceau o rozwiązywaniu pewnej szczególnej klasy równań różniczkowych liniowych niejednorodnych ma charakter przyczynkowy na tle rozwoju metod rozwiązywania równań różniczkowych liniowych rzędów wyższych i z jednej strony nawiązuje do aktualnego stanu wiedzy sprzed wieku, a z drugiej stosuje pewne pojęcia wprowadzone przez J.M. Hoene-Wrońskiego rozważane ponad 60 lat wcześniej. Zapewne ta druga okoliczność spowodowała, że praca Villarceau ukazała się drukiem w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu" w polskiej wersji językowej.

4.Praca Władysława Zajączkowskiego *O równaniu różniczkowem $Xdx + X_1dx_1 + \ldots + X_ndx_n = 0$, całkowalnem przez jedno równanie pierwotne*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. VI, Paryż 1875

Władysław Zajączkowski był jednym z najwybitniejszych matematyków polskich XIX wieku. Studiował matematykę i fizykę na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie, gdzie w 1861 roku uzyskał stopień doktora, a w 1862 habilitował się. Była to pierwsza habilitacja matematyczna w Polsce. Początkowo pracował na UJ, potem w Szkole Głównej w Warszawie, a ostatnie 21 lat życia spędził we Lwowie, gdzie od 1877 roku był profesorem zwyczajnym w ówczesnej Akademii Technicznej. Był autorem bardzo obszernej i pierwszej polskiej monografii z równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych wydanej przez Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu w 1877 roku. Wydał drukiem blisko 50 publikacji naukowych, w tym 10 książek naukowych i podręczników (skryptów) akademickich oraz kilka podręczników szkolnych wznawianych dwu- i trzykrotnie. W czasopismach matematycznych ogłosił ponad 25 prac naukowych[6].

W dalszym ciągu szczegółowo przeanalizujemy pracę Zajączkowskiego, która jest jedyną pracą matematyczną w tomie szóstym „Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu". Zajączkowski rozważa w niej warunki całkowalności równania różniczkowego postaci

$$(1)\ Xdx + X_1dx_1 + X_2dx_2 + \ldots + X_ndx_n = 0,$$

w którym współczynniki $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ zależą od $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie jedna z tych zmiennych, a mianowicie np. zmienna x, jest zmienną zależną, a pozostałe są zmiennymi niezależnymi. Równanie pierwotne, o którym jest mowa w tytule, jest postaci

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, C) = 0,$$

z dowolną stałą C i jest całką ogólną równania wypisanego w tytule pracy Zajączkowskiego. Omawiany tekst składa się z siedmiu części. W pierwszej Zajączkowski referuje, co w kwestii całkowania rozważanego równania zostało już zrobione

[6] Zob. J. Koroński, *Władysław Zajączkowski (1837–1898) i jego monografia z równań różniczkowych*, „Antiquitates Mathematicae" 2009.

przez innych matematyków. Na początku przytacza wyprowadzenie warunków całkowalności rozważanego równania otrzymane przez Eulera w *Institutiones calculi integralis* vol. III. Euler formułuje warunki konieczne i wystarczające całkowalności omawianego równania. Jeżeli mianowicie współczynniki tego równania spełniają następujące warunki:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + X_k \frac{\partial X_i}{\partial x} - X_i \frac{\partial X_k}{\partial x} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n-1,\ i < k \leq n,$$

to rozważane równanie różniczkowe jest całkowalne i całka ogólna tego równania może być wyznaczona w następującej postaci tzw. równania pierwotnego:

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, C) = 0.$$

W części drugiej Zajączkowski omawia metodę Eulera całkowania równania różniczkowego (1). W części trzeciej przedstawia pewne uproszczenie metody Eulera, którą zaproponował Natani w „Crelle Journal” (t. LVIII, s. 304). Chodzi o to, że w metodzie Eulera jest pewna niedogodność. Mianowicie kolejne równanie różniczkowe, do którego sprowadza się całkowanie równania danego, może być utworzone dopiero po scałkowaniu wszystkich równań poprzednich. Zajączkowski w tej kwestii pisze tak:

> Tę niedogodność można usunąć, gdy zamiast całki ogólnéj szukać będziemy całki nazwanéj przez Jacobiego (Crelle Journal,

> tom LVII) główną, tj. gdy za stałą całkowania brać będziemy wartość początkową zmiennéj zależnéj, czyli wartość dowolną, którą zmienna zależna przyjmuje przy wartości szczególnéj na zmienną niezależną.

Część czwarta omawianej pracy Zajączkowskiego zawiera metodę Emila du Bois-Reymonda („Crelle Journal", t. LXX, s. 299–313), którą potem sprowadza do przypadku układu równań postaci:

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i ,$$

do którego daje się sprowadzić równanie (1), co rozwinął A. Mayer („Mathematische Annalen", t. V, s. 418–470). Metodę Du Bois-Reymonda uogólnił Zajączkowski, jak sam o tym pisze, nie znając wtedy jeszcze pracy Mayera.

W ostatnich trzech częściach omawianej pracy Zajączkowski przechodzi do rozwiązań osobliwych. W części piątej czytamy:

> Prócz całki ogólnéj, zawierającéj jedną stałą dowolną, posiada uważane równanie niekiedy tak zwane rozwiązania osobliwe, przez które rozumiemy takie całki, które nie zawierają stałéj dowolnéj i nie mieszczą się w całce ogólnéj, tj. nie dają się otrzymać z całki ogólnéj przez podstawienie jakiéjś wartości szczególnéj za ilość stałą dowolną.

W tej części Zajączkowski omawia związek między całką ogólną postaci

$x = f(x_1, x_2, ..., x_n, C) = 0$, lub $F(x, x_1, x_2, ..., x_n, C) = 0$,

a rozwiązaniem osobliwym równania cząstkowego postaci:

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i .$$

Związek ten jako pierwszy w przypadku dwóch zmiennych niezależnych podał Lagrange (*Leçons sur le calcul des fonctions*). W pracy Zajączkowskiego na temat rozwiązania osobliwego, gdy znana jest całka ogólna równania różniczkowego, czytamy:

> Aby przekonać się, czy jakaś całka, niezawierajaca w sobie stałéj dowolnéj, jest lub też nie jest rozwiązaniem osobliwém, dość tylko z całki ogólnéj wyrugować jedną zmienną za pomocą całki badanéj. Jeżeli wartość na C z wypadku rugowania wypływająca jest funkcyą pozostałych zmiennych, wtedy całka badana będzie rozwiązaniem osobliwém.

W szóstej części pracy Zajączkowski zajmuje się rozwiązaniami osobliwymi rozważanego równania

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i ,$$

gdy nie jest znana postać całki ogólnej tego równania różniczkowego. Formułuje i udowadnia następujące twierdzenie:

„*Jeżeli*

$$y = y(x, x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

jest całką równania różniczkowego

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i,$$

zawierającą w sobie zmienną x, i jeżeli toż równanie różniczkowe zamieni się na

$$dy = \sum_{i=1}^{n} Y_i dx_i,$$

gdy w niém za x wprowadzimy y za pomocą związku

$$y = y(x, x_1, x_2, ..., x_n)$$

natenczas całka y = 0 *będzie lub téż nie będzie rozwiązaniem osobliwém, według tego, czy przy wartości y* = 0 *wraz z funkcyami Y przynajmniéj jedna z całek*

$$\int_0^y \frac{dy}{Y_i}, i = 1,2,...,n,$$

wziętych cząstkowo względem y, *przywiedzie się do zera lub téż nie*".

Twierdzenie to jako pierwszy w przypadku równań rzędu pierwszego z dwiema zmiennymi niezależnymi udowodnił Augustin Louis Cauchy (Moigno, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, vol. II, s. 445). Dowód zawarty w omawianej pracy jest uogólnieniem dowodu dla twierdzenia Cauchy'ego, jaki podał George Boole (*Treatise on differential equations*, [w:] *Supplementary volume*, s. 28). Dowód ten jest oryginalnym wynikiem Zajączkowskiego i jest niewątpliwie interesującym przyczynkiem w teorii równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu.

W ostatniej, siódmej części pracy Zajączkowski rozważa zagadnienie wyprowadzenia rozwiązania osobliwego z samego równania różniczkowego. Uogólnił tu znany wynik Eulera (*Institutiones calculi integralis*, vol. I, problema 72) z przypadku dwóch na przypadek wielu zmiennych niezależnych. Udowodnił następujące twierdzenia:

I. „*Jeżeli* $y = 0$ *jest rozwiązaniem osobliwém równania*

$$dy = \sum_{i=1}^{n} Y_i dx_i ,$$

wtedy równanie $y = 0$ *uczyni zadość przynajmniéj jednemu z pomiędzy n równań*

$$\frac{\partial y_i}{\partial y} = \infty, i = 1,2,\ldots,n."$$

oraz

II. „*Rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego*

$$dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i ,$$

zawierające w sobie zmienną x, uczyni zadość przynajmniéj jednemu z pomiędzy n równań warunkowych:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x} = \infty, i = 1,2,\ldots,n."$$

Z ostatniego twierdzenia wynika, że rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego postaci

$$Xdx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n = 0,$$

(które można sprowadzić do równania), $dx = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$

spełnia przynajmniej jeden z następujących warunków:

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{X_i}{X_h}\right) = \infty,\ h = 0,1,2,\ldots,n-1,\ h < i \le n."$$

Powyższe twierdzenia znał już Laplace, który wyprowadził je poprzez rozwinięcia w szeregi, jak to można przeczytać w pracy Louisa Houtaina *Des solutions singulières des équations différentielles*. Zajączkowski uzyskał powyższe twierdzenia w bardziej elegancki sposób.

5. Praca Władysława Folkierskiego *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu”, t. III, Paryż 1872

Władysław Folkierski studiował inżynierię w Szkole Politechnicznej w Karlsruhe i w Paryskiej Szkole Dróg i Mostów. Studiował również nauki ścisłe na Sorbonie i w Collège de France, gdzie uzyskał licencjat z nauk matematycznych i fizycznych. Był sekretarzem Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu oraz redaktorem tamtejszych „Pamiętników”. W latach 1868–1871 wykładał mechanikę w Szkole Montparnaskiej. Następnie od 1873 roku przez 15 lat pracował w Peru przy budowie kolei i fortyfikacji. Był profesorem mechaniki na Uniwersytecie w Limie, gdzie otrzymał doktorat honorowy. Kilkanaście lat przed śmiercią powrócił do kraju, zatrzymując się po drodze w Paryżu i podejmując bezskuteczne starania o katedrę w Szkole Politechnicznej we Lwowie. Na uwagę zasługują dwa tomy *Zasad rachunku różniczkowego całkowego*, które wydał w 1870 i 1873 roku. Poszerzone wydanie drugie tego dzieła ukazało się w serii *Biblioteka Matematyczno-Fizyczna* w Warszawie w 1904 (tom I) i 1909 (tom II) roku. Folkierski swoje prace publikował w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu” (jeden artykuł) i w „Roczniku Inżynierskim” w Peru. W tomie trzecim „Pamiętnika” znajduje się jego praca dotycząca równań różniczkowych. Jest ona dosyć obszerna (liczy 30 stron) i zawiera bardzo skomplikowaną symbolikę, przez co nie jest łatwa w czytaniu. Dobrze charakteryzuje ją wstęp napisany przez samego autora, który zacytujemy w całości:

> Równania o różniczkach częściowych pozostają do téj pory najważniejszém, a dziś jeszcze w zupełności nierozwiązanem zadaniem analizy. Wszelki postęp, jaki nauka na téj drodze uczynić może, pominiętym być nie powinien: każde nieledwie nowe równanie przez scałkowanie pociąga za sobą rozwiązanie całego szeregu zadań mechaniki, fizyki, geometryi, wstrzymane niedostatkiem ogólnych metod całkowania tego rodzaju równań. Zadania mechaniki i będącéj dalszém jéj zastosowaniem fizyki matematycznéj sprowadzają się zwykle do układu równań zwanych jednoczesnemi (symultanées); jeżeli liczba zmiennych wchodzących w te równania jest o jedność większą niż liczba równań, w takim razie jedna z tych zmiennych może być wziętą za zmienną niezależną, inne będą jéj funkcyami, a zadanie zostanie sprowadzoném do scałkowania równania o jednéj zmiennéj niezależnéj takiego rzędu, jaka jest liczba równań, za pomocą znanych sposobów rachunku całkowego.
>
> Jeżeli liczba zmiennych wchodzących w układ równań jednoczesnych przewyższa liczbę równań o więcéj niż o jedność, zadanie zostaje więcéj złożoném: zadanie to jest przedmiotem pierwszéj części niniéjszego artykułu. Było już ono traktowaném przez wielu pierwszorzędnych uczonych: Jacobi podał w nieśmiertelnéj swéj pracy o równaniach różniczkowych twierdzenie [Metoda novus aequaationum differentialium partialium inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi], którego

wnioskiem jest sposób całkowania powyższego rodzaju równań w pewnych przypadkach. P. Clebsch także dotknął pierwszéj części tego zadania [Über das Pfaffsche Problem] przy okoliczności innego zadania, zwanego zadaniem Pfaffa. Równocześnie Boole, znakomity matematyk angielski, podał te same prawie wypadki odmiennym nieco sposobem [On the differential Equations].

Stosując metodę Jacobiego do ogólnie postawionego zadania, otrzymałem kilka twierdzeń, które w bardzo prosty, od razu zastosować się dający sposób, rozwiązują je we wszystkich przypadkach, w których rozwiązanie to można sprowadzić do równań różniczkowych zwyczajnych. Gdy już praca ta ukończoną i kilku uczonym francuskim komunikowaną była, w rok później P. Clebsch ogłosił zastosowanie téjże metody Jacobiego do tegoż samego zadania [Ueber die simultane Integration linearer part. Differentialgleichungen]. Odmienną nieco drogą dochodzi on do tych samych prawie wypadków: podaję jednak swoje w pierwotnéj całości, bo droga, jakiéj użyłem, zdaje mi się naturalniéjszą i przystępniejszą; pozostaje przy tem parę nowych twierdzeń, a wszystko służyć może jako wstęp do drugiéj części tego artykułu.

W téj drugiej części stosuję otrzymane wypadki do równań różniczkowych częściowych wyższych rzędów od pierwszego; zastosowania tego nie znalazłem w powyżéj wymienionych pracach, podaję je więc jako zupełnie nowe.

6. Podsumowanie

Lata siedemdziesiąte i osiemdziesiąte XIX wieku w rozwoju równań różniczkowych były czasem, kiedy zakończył się etap początkowy rozwoju równań różniczkowych zwyczajnych, który trwał do końca lat trzydziestych XVIII wieku, nadal kontynuowano kolejny etap rozwoju równań różniczkowych, a jednocześnie rozpoczynał się kolejny – trzeci już etap rozwoju równań różniczkowych[7]. W czasie etapu początkowego gromadzono materiał dotyczący rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, lecz rezultaty były przypadkowe i fragmentaryczne, a sformułowania problemów niezadowalająco ścisłe. Następny etap rozwoju równań różniczkowych, w czasie którego równania różniczkowe przekształciły się w odrębną dziedzinę analizy matematycznej, trwał około stu lat, gdzieś do lat czterdziestych XIX wieku. Punktem zwrotnym w teorii równań różniczkowych były rezultaty otrzymane przez Mariusa Sophusa Lie (1842–1899), który w 1873 roku zastosował do równań różniczkowych żywo rozwijającą się wtedy teorię grup ciągłych przekształceń. W ten sposób Lie uzyskał ogólną metodę obejmującą rozmaite, na pozór zupełnie inne i przypadkowe sposoby sprowadzania różnych typów równań różniczkowych zwyczajnych do równań całkowalnych przez kwadratury. Dzięki temu zbadał wiele typów równań różniczkowych, którym odpowiadają stosowne przekształcenia ciągłe. Doprowadziło to w konsekwencji do

[7] R. Bujakiewicz-Korońska, J. Koroński, dz. cyt.

możliwości klasyfikowania równań różniczkowych w zależności od odpowiadających im przekształceń infinitezymalnych. Wreszcie w drugiej połowie XIX i na początku XX wieku centralnymi zagadnieniami równań różniczkowych zwyczajnych stały się problemy jakościowej teorii równań różniczkowych.

Z końcem lat czterdziestych XVIII wieku nastąpił gwałtowny rozwój równań różniczkowych cząstkowych, tzw. równań fizyki matematycznej, które następnie badano intensywnie przez kolejne dwa stulecia i które miały istotny wpływ na rozwój zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych. Centralnym problemem XIX wieku w równaniach różniczkowych cząstkowych były zagadnienia graniczne dla równań fizyki matematycznej, w szczególności teoria przewodnictwa cieplnego. W związku z tym rozwinęła się teoria potencjału jako nowa możliwość konstrukcji rozwiązań rozważanych zagadnień granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych. Trzeba tu zauważyć, że precyzyjnie zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace’a rozwiązał dopiero Henri Poincaré (1854–1912) w 1890 roku. Również istotne rezultaty dla rozwoju zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace’a na przełomie XIX i XX wieku osiągnął Stanisław Zaręba (1863–1942). W 1842 roku Cauchy i niezależnie od niego w 1874 roku Zofia Kowalewska wykazali, że zagadnienie Cauchy’ego (używając współczesnej terminologii) dla równań różniczkowych cząstkowych jest lokalnie jednoznacznie rozwiązywalne w klasie funkcji analitycznych. Potem Siméon Poisson dla przypadku dwuwymiarowego i Gustav Kirchhoff (1824–1887) w przypadku przestrzeni trójwymiarowej, przy zwykłych założeniach regularnościowych, wykazali, że zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego jest lokalnie jednoznacznie rozwiązywalne. Rozwiązania te wyrażają się poprzez wzory całkowe Poissona i Kirchhoffa i są odpowiednikami wzoru d'Alemberta dla przypadku jednowymiarowego przestrzennie równania struny[8].

Na tle zarysowanego powyżej stanu rozwoju równań różniczkowych w świecie nasuwają się następujące wnioski w kontekście analizowanych wcześniej prac z równań różniczkowych opublikowanych w „Pamiętniku Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu":

1. Praca Yvona Villarceau *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych* („Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. XII, Paryż 1881) jest małoznaczącym przyczynkiem z punktu widzenia rozwoju idei równań różniczkowych zwyczajnych, gdyż sposób szukania rozwiązań szczególnych dla równań różniczkowych liniowych jednorodnych podał sto kilkadziesiąt lat wcześniej (w 1743 roku) Euler, a metodę wariacji stałych dla równań różniczkowych liniowych niejednorodnych wprowadził w 1777 roku Lagrange.

2. Praca Władysława Zajączkowskiego *O równaniu różniczkowem* $Xdx + X_1dx_1 + ... + X_ndx_n = 0$, *całkowalnem przez jedno równanie pierwotne* („Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. VI, Paryż 1875) jest istotnym i interesują-

[8] Tamże.

cym przyczynkiem do teorii równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. W tej pracy Zajączkowski nie tylko dokonuje przeglądu głównych rezultatów dotyczących teorii rozważanej klasy równań cząstkowych rzędu pierwszego, ale uogólnia pewne rezultaty swoich poprzedników, uzyskując oryginalne twierdzenia ściśle i elegancko udowodnione. W ogóle rozważana tutaj paca Zajączkowskiego, jak i inne jego artykuły, jest napisana jasno i niemal współczesnym językiem. Ta uwaga odnosi się również do jego obszernej, 900-stronicowej monografii z równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.

3. Praca Władysława Folkierskiego *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych* („Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. VI, Paryż 1875) jest również interesującym przyczynkiem w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Jej autor w pierwszej części referuje wyniki swoich poprzedników odnoszące się do równań cząstkowych rzędu pierwszego i podaje niezależnie od nich pewne oryginalne twierdzenia, uzyskane niemal równocześnie i niezależnie od podobnych wyników Clebscha w kontekście metody Jacobiego. Wyniki Folkierskiego zawierają również nowe twierdzenia nieznane Clebschowi, a twierdzenia, które zawarł także Clebsch w swojej pracy wydrukowanej rok wcześniej, u Folkierskiego uzyskane są w inny, naturalniejszy sposób. Druga część pracy Folkierskiego zawiera pewne zupełnie nowe wyniki dla równań cząstkowych rzędu wyższego niż jeden. Rezultaty te otrzymał on, stosując twierdzenia uzyskane w pierwszej części swojej pracy.

Zarówno praca Zajączkowskiego, jak i Folkierskiego nawiązywały do aktualnie rozważanej w świecie problematyki z równań cząstkowych. Obie zawierały nowe wyniki. Ich znaczenie było niewątpliwie ograniczone przez to, że obie wyszły drukiem w języku polskim i nie wnosiły jakichś przełomowych idei do równań różniczkowych.

Powyższe informacje skłaniają autora niniejszego opracowania do sformułowania konkluzji, że poziom równań różniczkowych w Polsce w drugiej połowie XIX wieku nie był taki zły, jak to się do tej pory wydawało. Być może i w innych dziedzinach matematyki mamy zapomnianych wybitnych matematyków polskich, którzy są autorami wartościowych i mało znanych prac. Ten stan rzeczy należy zmienić. Można to osiągnąć tylko wtedy, gdy specjaliści z określonych dziedzin matematyki zechcą poświęcić troszkę swojego czasu na przeglądnięcie i skomentowanie dziewiętnastowiecznych wyników swoich poprzedników.

Bibliografia

Bujakiewicz-Korońska R., Koroński J., *Równania różniczkowe do końca XIX wieku*, [w:] *Matematyka czasów Weierstrassa. Materiały XV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 28 maja – 2 czerwca 2001 roku*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2002, s. 125–140.

Dianni J., Wachułka A., *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1963.

Folkierski W., *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu*, „Prace Matematyczno-Fizyczne" 1895, nr 6, s. 151–175.

Folkierski W., *O równaniach różniczkowych częściowych jednoczesnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. III, Paryż 1872.

Koroński J., *Władysław Zajączkowski (1837–1898) i jego monografia z równań różniczkowych*, „Antiquitates Mathematicae" 2009.

Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, t. I–XII, Wydawnictwo Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu, Paryż 1870–1881 (egzemplarze dostępne np. w Bibliotece Jagiellońskiej w Krakowie).

Pawlikowska-Brożek Z., *Matematyka*, [w:] *Zarys dziejów nauk przyrodniczych w Polsce*, red. J. Kuryłowicz, F.W. Sawicka, E. Szczepańska, E. Turyn, H. Wojdowska, Wiedza Powszechna, Warszawa 1983.

„Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej", seria C, z. 18, Warszawa 1974 (tom poświęcony Towarzystwu Nauk Ścisłych w Paryżu).

Więsław W., *Polskojęzyczne publikacje matematyczne po roku 1800. Rola wydawnictw „Wiadomości Matematycznych"*, [w:] *Matematycy polskiego pochodzenia na obczyźnie. Materiały konferencyjne z XI Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Kołobrzeg, 5–9 maja 1997*, red. S. Fudali, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 1998, s. 237–247.

Villarceau Y., *Zastosowanie teoryi wstaw wyższych rzędów do całkowania równań różniczkowych linijnych*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. XII, Paryż 1881.

Zajączkowski W., *O równaniu różniczkowem* $Xdx + X_1dx_1 + \ldots + X_ndx_n = 0$ *całkowalnem przez jedno równanie pierwotne*, „Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu", t. VI, Paryż 1875.