Nieskończoność w matematyce. Zmagania z potrzebnym, acz kłopotliwym pojęciem[1]

Roman Murawski
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki

Infinity in mathematics. Struggles with a necessary but troublesome concept

Summary

Infinity has appeared in mathematics since the very beginning. Moreover the mathematical concept of infinity was and is connected with philosophical and theological concepts. The aim of the paper is to show how mathematicians struggled with this concept and how they tried to bring it under control.

[1] Praca powstała w ramach projektu badawczego Narodowego Centrum Nauki, grant No N N101136940, w oparciu o wykład pt. „Jak matematycy ujarzmi(a)li nieskończoność" wygłoszony na posiedzeniu Komisji Filozofii Nauki Polskiej Akademii Umiejętności w Krakowie.

Keywords

actual infinity, potential infinity, set theory, infinitely small, infinitely large, cardinal number, ordinal number

Something is mathematical, only
if it is shot through with infinity.
(Caleb Gattegno)

W matematyce nieskończoność pojawiała się od dawna, od samego właściwie początku[2]. Co więcej, naukowe i filozoficzne oraz religijne pojęcia nieskończoności były i są wzajemnie mocno powiązane, trudno je w niektórych okresach oddzielić. Celem naszych rozważań jest pokazanie, jak matematycy zmagali się z tym pojęciem i jak próbowali je ujarzmiać i oswajać.

Zacznijmy od zauważenia, że w starożytnej Grecji panował raczej negatywny stosunek do nieskończoności. Widać to u pitagorejczyków, eleatów, Parmenidesa. Nieskończoność była

[2] Za początek matematyki w dzisiejszym rozumieniu tej nauki uznać należy matematykę starożytnej Grecji. Wcześniej, w starożytnym Egipcie i Babilonii, matematyka miała inny charakter – dokładniej charakter algorytmiczno-praktyczny i nie było w niej rozważań teoretycznych. Zadowalano się znajdowaniem przepisów (dziś powiedzielibyśmy: algorytmów) pozwalających rozwiązywać konkretne zadania praktyczne.

czymś, czego nie można osiągnąć czy opisać w skończonych terminach, czymś nieracjonalnym, bezkształtnym, bo niedającym się ani pomniejszyć, ani powiększyć. W arytmetyce i geometrii nie były dozwolone konstrukcje, które się nie kończyły. Widziano trudności i kłopoty, jakie niesie z sobą pojęcie nieskończoności. Przykładem mogą być aporie Zenona z Elei – znamy je z relacji Arystotelesa w *Fizyce*. Wskazywały one na trudności związane z dzieleniem na nieskończenie wiele części i z sumowaniem nieskończenie wielu elementów. Inny przykład to wykrycie niewspółmierności przez pitagorejczyków. Nie bardzo potrafiono sobie z tymi kłopotami poradzić. Wyjścia szukano w rozmaity sposób, na przykład odrzucając liczby niewymierne i zastępując mówienie o wielkościach czy miarach (liczbach) operowaniem tworami geometrycznymi i działaniami na nich (tzw. algebra geometryczna). Pozwalało to wprawdzie eliminować trudności, ale niosło też niestety pewne ograniczenia i skutki negatywne (na przykład zasada jednorodności w arytmetyce).

Pierwszym filozofem greckim, który próbował podać racjonalne ujęcie nieskończoności był Arystoteles (384–322 p.n.e.). O problemie tym mówi w księdze III swojej *Fizyki* poświęconej zagadnieniu ruchu. Rozważa tam, czy *apeiron* (ἄπειρον) istnieje i jak istnieje. W ten sposób przekształcił pojęcie nieskończoności w pojęcie naukowe – w przeciwieństwie do jego charakteru mitologicznego czy religijnego, jakie miało ono u Anaksymandra (610–546 p.n.e.). Arystoteles rozważa nieskończoność w ramach charakterystycznego dla jego filozofii rozróżnienia między potencjalnością i aktualnością. Twierdzi, że nieskończoność nie może istnieć jako coś aktualnego, jako nieskończoność aktualna. Może istnieć jedynie nieskończoność potencjalna. Oznacza to, że można mówić o możliwości nieograniczonego przedłużania pewnego ciągu czy procesu, ale nie o jego końcowym wyniku. Można zatem mówić o nieskończonym ciągu liczb naturalnych, czy o nieskończonym dzieleniu odcinka (geometrycznego) na połowę. Nie można jednak mówić o ogóle liczb naturalnych jako odrębnym obiekcie, jako o końcowym wyniku procesu tworzenia coraz to nowych liczb naturalnych przez dodawanie jedynki do liczb już istniejących. Możliwość wykonywania bez ograniczeń coraz to nowych, następnych kroków nie gwarantuje i nie pociąga za sobą tego, że istnieje krok „ostatni".

W *Fizyce* Arystoteles pisał:

> Pozostaje zatem do przyjęcia, że nieskończoność istnieje potencjalnie. Nie należy jednak brać wyrażenia „istnieje potencjalnie" w takim sensie, jak w wypadku, gdy się mówi: „posąg istnieje potencjalnie"; bo mówiąc tak sądzimy, że powstanie posąg rzeczywisty. Inaczej ma się sprawa z nieskończonością: nie może być urzeczywistnionej nieskończoności (III, 6, 206a).
>
> Krótko mówiąc, nieskończoność istnieje w ten sposób, że jedna rzecz występuje zawsze po drugiej i każda poszczególna rzecz tego ciągu jest zawsze skończona, przy czym każda jest zawsze różna (III, 6, 206a).
>
> Nie to bowiem jest nieskończone, co już nie ma niczego poza sobą, lecz właśnie to, co zawsze ma coś poza sobą (III, 6, 207a).

Arystoteles podkreślał przy tym, że w matematyce wystarczy pojęcie nieskończoności potencjalnej, a pojęcie nieskończoności aktualnej jest zbędne. W *Fizyce* pisał:

> Pogląd nasz nie pozbawia bynajmniej matematyków ich teorii przez odrzucenie aktualnego istnienia nieskończoności w kierunku zwiększania się, w sensie niemożności przekroczenia. Bo w rzeczywistości nie potrzebna im jest nieskończoność ani też z niej nie korzystają. Posługują się natomiast dowolnie wielkimi liczbami, ale skończonymi (III, 7, 207b).

Dodajmy, że Arystoteles twierdzi w *Fizyce*, iż czas i ruch są nieskończone. Pisał: „Czas i ruch są nieskończone, a także myślenie w tym znaczeniu, że każda poszczególna faza kolejno przemija, będąc pozbawiona trwania" (*Fizyka* III, 8, 208a).Odrzuca jednak możliwość nieskończonej przestrzeni. Wynika to z faktu, że nie ma on pojęcia przestrzeni, która może być pusta – operuje natomiast pojęciem miejsca, które zawsze jest połączone z materią. Podsumowuje swoje rozważania mocnym stwierdzeniem: „Wielkość natomiast nie jest aktualnie nieskończona ani jako wynik dzielenia w nieskończoność, ani jako wynik powiększenia w myśli" (*Fizyka* III, 8, 208a).

Należy koniecznie podkreślić, że już samo odróżnienie nieskończoności potencjalnej i nieskończoności aktualnej było ważnym osiągnięciem Arystotelesa – pozwoliło jasno postawić problem nieskończoności. Ukierunkowało też dalsze nad nią badania.

Koncepcje Arystotelesa dotyczące nieskończoności (ale także jego koncepcje dotyczące struktury teorii naukowych) znalazły swój oddźwięk w szczególności u Euklidesa (ok. 365 – ok. 300 p.n.e.) w jego słynnych *Elementach*. Unikał on wyraźnie terminu „nieskończoność". Kiedy w Księdze IX mówi o istnieniu nieskończenie wielu liczb pierwszych, to formułuje to tak: „Jeśli dana jest dowolna ilość liczb pierwszych, to istnieje inna liczba pierwsza różna od nich"[3] (*Elementy* IX, 20). Nie mówi więc, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, ale że zawsze można znaleźć nową liczbę pierwszą. Mamy tu więc wyraźnie do czynienia z nieskończonością potencjalną.

Inny ślad wpływu Arystotelesa na Euklidesa to sformułowany na początku Księgi I *Elementów* aksjomat 9, który głosi: „Całość jest większa od części"[4]. Własność ta – oczywista dla wielkości skończonych – nie obowiązuje, jak się okazuje, dla nieskończoności. Będzie ona sprawiała przez długie wieki kłopot wielu matematykom i filozofom.

Nieskończoność pojawiała się *implicite* także przy okazji stosowania procesów granicznych. Te ostatnie spotykamy na przykład u Archimedesa (ok. 287–212 p.n.e.), który z powodzeniem stosował pochodzącą od Eudoksosa z Knidos metodę wyczerpywania będącą prototypem teorii granic. Archimedes używał jej w szczególności do przybliżania długości okręgu i wartości π za pomocą wielokątów foremnych wpisanych i opi-

[3] Οἱ προωτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰςὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμοῶν.

[4] Καὶ τὸ ὃλον τοῦ μέρους μεῖξόν [έςτιν].

sanych na okręgu, czy do obliczania pola powierzchni wycinka paraboli. To wskazuje, że w pewnym sensie akceptował nieskończoność w matematyce.

Problem ze stosunkiem części i całości oraz lęk przed nieskończonością aktualną widać też u żyjącego w V wieku neoplatonika Proklosa Diadochusa (410–485). Ten najwybitniejszy przedstawiciel szkoły ateńskiej widział rozwiązanie problemu w odrzuceniu nieskończoności aktualnej i zaakceptowaniu jedynie nieskończoności potencjalnej (zatem w duchu Arystotelesa). W *Komentarzu do I Księgi „Elementów" Euklidesa* pisał:

> [...] twierdzimy, że wielkości są wprawdzie dzielone w nieskończoność, ale nie na nieskończenie wiele części (ἐπ᾿ ἄπειρον, οὐκ εἰς ἀπειρα δέ, *ad infinitum, sed non in infinita*). To ostatnie powodowałoby, że aktualnie byłoby nieskończenie wiele części, tamto pierwsze, że tylko potencjalnie; to ostatnie daje nieskończoności istnienie substancjalne, tamto przyznaje jej tylko stawanie się.
>
> Wraz z jedną średnicą powstają dwa półkoła, ale średnic nie będzie nigdy (aktualnie) nieskończenie wiele, nawet jeżeli „brać" ich nieograniczenie wiele. Tak więc nigdy nie będzie istniało dwa razy więcej niż nieskończenie wiele [półkoli], ale powstających (ciągle) półkoli będzie dwa razy tyle, ile zawsze skończonej ilości średnic. Ciągle bowiem liczba „wziętych" średnic jest ograniczona.

Własność tego typu znana była już prawdopodobnie Plutarchowi (ok. 46 – ok. 120), a potem wzmianki o niej powtarzają się wielokrotnie u różnych autorów. Znali ją niektórzy scholastycy, na przykład Thomas Bradwardine (ok. 1290–1349). Rozumowania tego typu były też używane w XII wieku do wykazywania niemożliwości istnienia wiecznego świata. W roku 1638 Galileusz (1564–1642) podał paradoks nazywany dziś jego imieniem, a oparty na tej samej zasadzie. Wskazywał on mianowicie, że z jednej strony ogół liczb kwadratowych jest częścią ogółu liczb naturalnych, a z drugiej – jest ich tyle samo. Wyciągał z tego następujący wniosek (*Discorsi*, s. 33):

> Jest to jedna z trudności, które powstają, gdy naszym skończonym umysłem próbujemy rozważać nieskończoność przypisując jej te własności, które przyznajemy temu, co skończone i ograniczone; jest to, w mej opinii, niepoprawne – nie możemy bowiem mówić o wielkościach nieskończonych, że jedne z nich są większe, mniejsze bądź też równe.

Echa tego typu wniosków znajdujemy też u Izaaka Newtona (1642–1727). Otóż w liście z roku 1692 pisał on:

> Nieskończoności, kiedy rozważać je bez jakichkolwiek restrykcji czy ograniczeń, nie są ani równe, ani nierówne, ani też nie pozostają w żadnych stosunkach pomiędzy sobą.

Także wielki matematyk niemiecki Carl Friedrich Gauss (1777–1855) przeciwstawiał się używaniu w matematyce nieskończoności aktualnej. W liście do Heinricha Schumachera z 12 lipca 1831 roku pisał:

> Jeśli chodzi o Pański dowód, to protestuję nade wszystko przeciwko używaniu wielkości (*Grösse*) nieskończonej jako czegoś zupełnego, co w matematyce nie jest nigdy dozwolone. Nieskończoność to jedynie *façon de parler*, za pomocą którego mówi się o granicach.

Wróćmy jednak do pozytywnych rozważań nad nieskończonością.

U Mikołaja z Kuzy (1401–1464), ostatniego scholastyka, matematyka i teologa problem nieskończoności pojawia się zarówno w rozważaniach matematycznych, jak i w rozważaniach filozoficzno-teologicznych. Są one przy tym ze sobą powiązane. Co więcej, powodem i celem zajmowania się nieskończonością w matematyce była dla niego chęć zbliżenia się do nieskończoności Boga. Według Kuzańczyka nieskończoność nie daje się ująć w (Arystotelesowskich) kategoriach wielkości, nie może ona być rozważana w kategoriach „mniejsze" czy „większe". Nieskończoności nie można też poznać za pomocą zmysłów, daje się ona jednak uchwycić w matematyce przez umysł za pomocą pojęć. Wśród obiektów (rzeczy i procesów), które można poznać zmysłami, nie ma takiego, który nie mógłby zostać powiększony. Zatem nieskończoność nie może być zrealizowana w żadnym procesie. W matematyce znaleźć można jednak przykłady na to, że granica takiego nieograniczonego procesu może być ujęta i osiągnięta za pomocą pojęcia. Przykładem może tu być ciąg wielokątów foremnych o n bokach. Gdy n rośnie nieograniczenie, to wielokąty te przybliżają coraz lepiej okrąg.

Wprawdzie wśród obiektów poznawalnych zmysłami nie istnieje żaden okrąg, ale istnieje on jako pojęcie w naszym umyśle. Zatem takie twory, jak wielokąt foremny i okrąg pokrywają się w nieskończoności. Przykładów takich znaleźć można zresztą u Mikołaja więcej. Łączy on z nimi charakterystyczną dla siebie zasadę zwaną przezeń *coincidentia oppositorum*. Dopełnienie procesu, zatem w szczególności jego granica, jest według Kuzańczyka najwyższą formą bytu, jest czymś wiecznym – każdy proces dąży bowiem do swego wypełnienia. To nieskończone przybliżanie (aproksymacja) w połączeniu z zasadą *coincidentia oppositorum* stanowiło u niego nowe narzędzie metodologiczne – używał go szczególnie w późniejszej pracy *De Mathematica Perfectione*. Odpowiadało to jego rozumieniu poznania jako procesu przybliżania się do prawdy. Należy podkreślić, że według Mikołaja nieskończoność nie zapożycza swego istnienia od skończoności. To, co skończone, nie jest w stanie zapewnić istnienia temu, co nieskończone. Nieskończoność bowiem nigdy nie zostanie osiągnięta w procesie aproksymacji przez wielkości skończone. Przeciwnie – nieskończone wyprzedza w porządku ontologicznym to, co skończone. Przenosi się to i na porządek epistemologiczny, tzn. to, co skończone może zostać pojęte i zrozumiane tylko za pomocą tego, co nieskończone. W *Liber de mente* pisał:

> Stąd wszystko, co skończone, ma swe źródło w zasadzie nieskończoności[5] (cII, 116r).

[5] Quare omne finitum principiatum ab infinito principio.

W *De docta ignorantia* zaś pisał:

> Każda więc linia skończona bierze swój byt z nieskończonej, która jest wszystkim tym, czym jest. Stąd w linii skończonej jest to wszystko, czym jest linia jako linia nieskończona[6] (Księga II, cV, 119).

Dodajmy, że idea *coincidentia oppositorum* w nieskończoności miała też wpływ na nauki przyrodnicze. Wedle Mikołaja, skoro świat jest obrazem Boga, a Bóg jest nieskończony, więc i świat jest nieskończony. Zarówno więc przestrzeń, jak i czas są nieskończone. Stąd zaś świat nie ma środka, gdyż w nieskończoności środek pokrywa się z obwodem. Dalej, Ziemia nie może być centrum świata i musi znajdować się w ruchu. Ruch staje się w ten sposób względny. Możemy zatem powiedzieć, że Mikołaj przyczynił się w jakiś sposób do sekularyzacji pojęcia nieskończoności.

Blaise Pascal (1623–1662) mówił o nieskończoności w sensie nieskończenie dużych i nieskończenie małych – odnosił te pojęcia do przestrzeni, czasu, ruchu, prędkości, przy czym traktował je w sensie nieskończoności potencjalnej. W *Myślach* pisał zaś:

> Wiemy, że istnieje nieskończoność, ale nie znamy jej natury. Wiemy na przykład, że fałszem jest, aby liczby były skończone; zatem prawdą jest, że istnieje nieskończoność w liczbie, ale nie

[6] Omnis autem linea habet esse suum ab infinita, que est omne id quod est. Quare in linea finita omne id, quod est linea infinita.

> wiemy, co to jest. Fałszem jest, aby była parzysta, fałszem, aby była nieparzysta: za dodaniem bowiem jedności nie zmieni swej natury; a wszelako jest to liczba, wszelka zaś liczba jest parzysta albo nieparzysta (prawda, iż to się odnosi do wszelkiej liczby skończonej). [...]
>
> Znamy tedy istnienie i naturę skończoności, ponieważ jesteśmy skończeni i rozciągli jak ona. Znamy istnienie nieskończoności, a nie znamy jej natury, ponieważ ma ona rozciągłość jak my, ale nie ma granic, jak my je mamy (*Myśli*, 451).

Stanowisko Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1649–1716) w kwestii nieskończoności nie było spójne i do końca jednoznaczne. Z jednej strony świadom trudności, na które wskazuje paradoks Proklosa-Galileusza pisał: „Nie ma nic bardziej namacalnego niż absurdalność idei liczby aktualnie nieskończonej”. W *Nowych rozważaniach dotyczących rozumu ludzkiego* zaś stwierdza:

> Mówiąc ściślej, prawdą jest, że istnieje nieskończoność rzeczy, tzn. że jest ich zawsze więcej aniżeli można wyznaczyć. Ale nie ma ani liczby nieskończonej, ani innej wielkości nieskończonej, gdy się je bierze jako rzeczywiste całości.
>
> [...] Prawdziwa nieskończoność jest ściśle biorąc tylko w tym, co absolutne, co jest przed wszelką złożonością i nie powstało przez dodawanie części. [...]
>
> [...] całości nieskończone i ich przeciwieństwa nieskończenie małe są na miejscu tylko w rachunku geometrów, tak jak urojone pierwiastki algebry (ks. II, rozdział XVII).

Z drugiej jednak strony pisał także – przecząc sobie właściwie:

> Wierzę tak bardzo w aktualną nieskończoność, iż zamiast utrzymywać, jak to się pospolicie mówi, że natura jej się boi, przyjmuję, iż ona wszędzie ku niej się skłania, aby tym lepiej zaznaczyć doskonałość swego Stwórcy[7] (*Opera omnia, studio Ludovico Dutens*, tom II, część 1, s. 243).

Dodajmy jeszcze, że w swoim rachunku różniczkowym Leibniz operował wielkościami nieskończenie małymi. Dopuszczał też w swojej monadologii istnienie nieskończenie wielu monad.

Immanuel Kant (1724–1804) rozważając problemy filozoficzne matematyki odróżniał za Arystotelesem nieskończoność potencjalną i nieskończoność aktualną. Nie twierdził jednak jak Arystoteles, że nieskończoność aktualna jest logicznie niemożliwa. Otóż wedle Kanta nieskończoność aktualna jest tzw. ideą rozumu. Oznacza to, że jest to pojęcie wewnętrznie niesprzeczne, choć niestosowalne do doświadczenia zmysłowego. Przykładów nieskończoności aktualnej nie można bowiem ani zaobserwować, ani też skonstruować. Można skonstruować na przykład liczbę 5 i zmysłami poznać pięć rzeczy, można nawet skonstruować liczbę $10^{10^{10}}$ (chociaż nie jesteśmy w stanie

[7] Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par-tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Dodajmy, że słowa te umieścił Bolzano jako motto swoich *Paradoksów nieskończoności*.

postrzegać tylu obiektów za pomocą zmysłów). Nie jesteśmy jednak w stanie ani percypować, ani też skonstruować nieskończoności aktualnej.

Filozoficzne poglądy Kanta na matematykę zainspirowały wielu późniejszych filozofów i matematyków, w szczególności do jego poglądów na nieskończoność nawiąże w wieku XX David Hilbert w swoim formalizmie i próbie uratowania integralności matematyki klasycznej operującej pojęciem nieskończoności aktualnej.

Zanim jednak przejdziemy do czasów współczesnych, powiedzieć trzeba kilka słów o Bernardzie Bolzanie (1781–1848). Ten matematyk i jednocześnie ksiądz katolicki, profesor Uniwersytetu Karola w Pradze pozbawiony w roku 1819 katedry z powodu zbyt samodzielnych, nie zawsze ortodoksyjnych interpretacji katolicyzmu i domagania się sprawiedliwości w życiu społecznym, w sposób istotny przyczynił się do porządkowania podstaw matematyki poprzez włączenie się w nurt badań zwany arytmetyzacją analizy (Weierstrass, Cauchy, Dedekind). Choć matematykę uważano wtedy za „naukę o ilości", Bolzano definiował ją już całkiem abstrakcyjnie pisząc, że jest ona „nauką badającą ogólne prawa, które regulują istnienie rzeczy". By matematyk mógł stosować jakieś pojęcie, wystarczy dowieść tylko jego „możliwości". To nie do matematyki należy udowodnienie aktualnego istnienia tych czy innych obiektów – jest to zadanie metafizyki.

Z naszego punktu widzenia najważniejsze są jego rozważania nad nieskończonością. Zawarł je w wydanych pośmiertnie

Paradoksach nieskończoności (1850). Zdaniem Bolzana „większość *paradoksalnych* twierdzeń, które spotykamy w dziedzinie matematyki, to twierdzenia, które albo zawierają bezpośrednio pojęcie *nieskończoności*, albo w jakiś sposób opierają się na nim przy próbach ich dowodzenia" (*Paradoksy*, §1).

W *Paradoksach nieskończoności* Bolzano rozważał wielości (dziś powiedzielibyśmy: zbiory) nieskończone, jak również wielkości nieskończenie małe i nieskończenie duże. Przy tym przez wielość nieskończoną rozumiał Bolzano „taką wielość, która jest większa od każdej wielości skończonej, tzn. jest tego rodzaju, iż każda skończona mnogość przedstawia tylko pewną jej część"[8] (*Paradoksy*, §9). Wielkość nieskończenie duża to wielkość, która jest większa od każdej liczby tych wielkości, które zostały obrane za jednostkę, zaś wielkość nieskończenie mała to taka wielkość, że każda jej wielokrotność jest mniejsza od jednostki. Przy tym Bolzano odróżnia matematyczne pojęcie nieskończoności od pojęcia nieskończoności filozofów i przeciwstawia je sobie. Wspomina tu Hegla, który głosił, że nieskończoność matematyczna jest tylko „kiepską nieskończonością" – filozofowie zaś „znają nieskończoność o wiele wyższą, prawdziwą, *nieskończoność jakościową*, którą znajdują tylko w *Bogu* zwłaszcza i w ogóle w *Absolucie*" (tamże, §11). Według Bolzana filozofowie, a także niektórzy matematycy, przyjmują, że nieskończoność jest jedynie pewną wielkością zmienną, która

[8] [...] eine Vielheit, die größer als jede endliche ist, d.h. eine Vielheit, die so beschaffen ist, daß jede endliche Menge nur einen Teil von ihr darstellt.

może rosnąć nieograniczenie – a zatem jest tylko nieskończonością potencjalną. On jednak opowiada się za istnieniem w matematyce nieskończoności aktualnej. Co więcej, w §13 *Paradoksów* podaje dowód jej istnienia pisząc:

> [j]uż *wśród rzeczy, które nie roszczą sobie prawa do rzeczywistości, lecz tylko do możliwości*, są niewątpliwie mnogości nieskończone. Nieskończona jest, jak łatwo można pojąć, *mnogość zdań i prawd samych w sobie*, rozważając bowiem jakąś prawdę, np. zdanie, że istnieją w ogóle prawdy, lub każde inne dowolne zdanie, które oznaczę przez *A*, zdajemy sobie sprawę, że zdanie wyrażone słowami „*A* jest prawdziwe" jest różne od *A*, gdyż ma zgoła inny podmiot niż *A*. [...] Lecz podobnie jak tu ze zdania *A* wyprowadzamy różne od niego zdanie, które nazwę *B*, tak też można znowu, według tej samej zasady, wyprowadzić z *B* trzecie zdanie *C*, i tak dalej bez końca. Zbiór tych wszystkich zdań, z których każde następne pozostaje w takim wskazanym właśnie stosunku do poprzedniego, że podnosi je do rangi swego podmiotu i orzeka o nim, iż jest zdaniem prawdziwym, zbiór ten – jak stwierdzam – obejmuje mnogość części (zdań) większą od każdej skończonej mnogości. [...] zbiór tych wszystkich zdań posiada wielość większą od każdej liczby, tzn. nieskończoną.

Aby jednak dowieść istnienia nieskończoności aktualnej – a nie tylko jej możliwości – potrzebuje Bolzano pewnego dodatkowego założenia, a mianowicie istnienia Boga, któremu przypisuje „władzę poznania, którą jest prawdziwa wszechwiedza, przeto obejmuje nieskończoną mnogość prawd, bo w ogóle wszystkie”[9] (*Paradoksy*, §11). Mamy więc tu do czynienia ze swoistym powiązaniem matematycznej nieskończoności aktualnej z pewnymi założeniami natury teologicznej.

W *Paradoksach nieskończoności* wspomina Bolzano także pewną szczególną własność wielości nieskończonych, o której mówi paradoks Proklosa-Galileusza. Pisze on w §20:

> Dwie mnogości, obie nieskończone, mogą pozostawać względem siebie w takim stosunku, że z jednej strony każdy element należący do jednej z tych mnogości można złączyć w parę z jednym elementem drugiej, tak że żaden element którejkolwiek z nich nie pozostaje bez włączenia go w parę, jak również żaden nie powtarza się w dwu lub więcej parach; z drugiej jednak strony możliwe jest przy tym, że jedna z tych mnogości zawiera drugą jako pewną część jedynie [...].

W odróżnieniu od Proklosa czy Galileusza, którzy wyprowadzali stąd wniosek, iż nie istnieje nieskończoność aktualna, Bolzano zauważa, że nie można przenosić praw słusznych dla obiektów skończonych na twory nieskończone.

Także matematyk niemiecki Richard Dedekind (1831–1916) zdawał sobie sprawę z trudności związanych z paradoksem Proklosa-Galileusza. Nie odrzucał jednak w związku z tym

---

[9] [...] eine Erkenntniskraft beilegen, die wahre Allwissenheit ist, also eine unendliche Menge von Wahrheiten, weil alle überhaupt, umfaßt.

pojęcia nieskończoności aktualnej, a przeciwnie – dostrzegł we własności, na której opiera się ten paradoks cechę charakterystyczną zbiorów nieskończonych, która odróżnia je od zbiorów skończonych. Otóż w pracy *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888) znajdujemy następującą definicję zbiorów nieskończonych:

> 64. *Wyjaśnienie*. System *S* nazywa się nieskończonym jeżeli jest podobny do pewnej swojej części właściwej; w przeciwnym przypadku *S* nazywa się systemem skończonym.

Wyjaśnijmy, że Dedekind używa terminu „system" w takim sensie, jak dziś używa się terminu „zbiór" i że dwa systemy są podobne jeśli istnieje odwzorowanie różnowartościowe (jedno-jednoznaczne) jednego na drugi. Co więcej, Dedekind formułuje twierdzenie głoszące, że istnieją systemy nieskończone i podaje jego „dowód". Użyliśmy tu cudzysłowu, ponieważ jego rozumowanie nie może być uznane za rozumowanie spełniające kryteria dowodu matematycznego. Otóż rozumowanie Dedekinda jest w pewnym sensie podobne do rozumowania Bolzana. Tam jednak, gdzie Bolzano odwołuje się do Boga, Dedekind odwołuje się do umysłu ludzkiego głosząc, że przykładem zbioru nieskończonego jest jego świat myśli (*meine Gedankenwelt*).

W ten sposób dochodzimy do głównego bohatera historii nieskończoności w matematyce, a mianowicie do Georga Cantora (1845–1918). Był on twórcą teorii mnogości i pierwszym, który przełamawszy lęk przed antynomiami uznał, że nieskończoność aktualna może być przedmiotem badania matematycznego. Zagadnienie nieskończoności pojawiło się u Cantora przy okazji jego rozważań nad szeregami trygonometrycznymi, którym poświęcił rozprawę habilitacyjną. Doprowadziło go to do stworzenia całej nowej teorii matematycznej, a mianowicie teorii mnogości (czyli teorii zbiorów w sensie dystrybutywnym), która miała się okazać fundamentem dla całej matematyki. Używając pojęcia równoliczności zbiorów wprowadził Cantor liczby kardynalne (moce zbiorów), za pomocą zaś pojęcia podobieństwa porządków – liczby porządkowe. Najbardziej interesujące były oczywiście nieskończone takie liczby, w szczególności nieskończone liczby kardynalne. Udowodniwszy twierdzenie, że zbiór potęgowy dowolnego danego zbioru (czyli ogół wszystkich jego podzbiorów) ma zawsze moc większą niż ten zbiór, mógł wprowadzić nieskończoną hierarchię nieskończonych liczb kardynalnych, a zatem nieskończoną hierarchię coraz to większych nieskończoności. W ten sposób pojawiły się w jego teorii mnogości zbiory dużo większe niż te, które dotąd pojawiały się w sposób naturalny w rozważaniach matematyków. Warto przy tym podkreślić, że Cantor nie był logikiem, tylko „normalnym" matematykiem. Dodajmy też, że jego rozważania nad nieskończonością miały charakter nie tylko matematyczny, ale także filozoficzny, a nawet teologiczny.

Cantor rozróżniał różne rodzaje nieskończoności. Przede wszystkim przyjmował za Arystotelesem podział na nieskończoność potencjalną i aktualną. Tę pierwszą nazywał nieskończonością niewłaściwą – nie jest ona w istocie żadną nieskończonością, a jedynie „nieokreśloną *zmienną* wielkością *skończoną*, która albo rośnie poza wszystkie skończone granice [...], albo staje się mniejszą niż każda granica skończona”[10]. Natomiast nieskończoność aktualna „z jednej strony jest *niezmienna*, we wszystkich swoich częściach stała i określona, [...] jest prawdziwą stałą, jednocześnie zaś przekracza każdą wielkość skończoną tego samego rodzaju”[11]. Przy tym nieskończoność potencjalna, jeśli ma być ściśle matematycznie użyteczna, musi zakładać nieskończoność aktualną. Co więcej, nieskończoność aktualna jest niezbędna dla ugruntowania matematyki – choćby dla ugruntowania teorii liczb rzeczywistych, gdzie nie wystarczy nieskończoność potencjalna, dalej w algebrze, analizie, teorii liczb.

Na ten podział nakłada się u Cantora jeszcze drugi. Otóż rozróżnia on trzy rodzaje nieskończoności aktualnej: (1) nieskończoność absolutna (realizowana w Bogu), (2) nieskończoność pojawiająca się w świecie zależnym i stworzonym oraz (3) nieskończoność, która może być pojmowana przez myśl *in abstracto* jako wielkość matematyczna. Przy tym nieskończoność absolutna jest niepowiększalna, pozostałe zaś dwa rodzaje nieskończoności są powiększalne. W przypadku nieskończoności jako wielkości matematycznej Cantor mówi o pozaskończonosci (*Transfinitum*), a nie o nieskończoności i przeciwstawia ją Absolutowi.

---

[10] G. Cantor, *Mitteilungen zum Lehre vom Transfiniten*, „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik” 1887–1888, 91, s. 81–125 oraz 92, s. 240–265.

[11] Tamże.

Warto podkreślić, że Cantor przyjmując istnienie nieskończoności aktualnej, zdecydowanie odrzucał wielkości nieskończenie małe nazywając je „wielkościami papierowymi". Zdecydowanie przeciwstawiał się wprowadzaniu ich do matematyki – mówił tu o „infinitarnym bakcylu cholery w matematyce"[12].

Wspomnieliśmy wyżej, że rozważania Cantora nad nieskończonością miały charakter także filozoficzny i teologiczny. Z jednej strony szukał w metafizyce i teologii uzasadnienia dla swojej teorii mnogości – uważał, że teoria mnogości należy do metafizyki i tam też należy szukać jej podstaw, gdyż metafizyce przypada zadanie ugruntowania zasad matematyki i nauk przyrodniczych. Podejmował więc próby udowodnienia istnienia pozaskończoności w oparciu o Absolut. Wierzył przy tym, że nie ujmuje ona nic naturze Boga, przeciwnie – dodaje jej blasku, bowiem realne istnienie pozaskończoności odbija nieskończoną naturę Bożej egzystencji. Cantor zbudował dwa dowody, w których stara się wykazać istnienie liczb pozaskończonych *in concreto*. W pierwszym z nich, w dowodzie *a priori*, głosi, że z pojęcia Boga wyprowadzić można bezpośrednio w oparciu o doskonałość Jego natury możliwość i konieczność stworzenia pozaskończoności[13]. W drugim, w dowodzie *a posteriori*, twierdził,

---

[12] H. Meschkowski, *Aus den Briefbüchern Georg Cantors*, „Archive for History of Exact Sciences" 1962–1966, 2, s. 505.

[13] Dowód ten został skrytykowany przez kardynała Franzelina, który w liście do Cantora podkreślał, że nie można wyprowadzać konieczności stworzenia pozaskończoności z możliwości jej stworzenia, gdyż ogranicza to w pewien sposób wolność Boga, a w konsekwencji ujmuje coś jego doskonałości.

że skoro niemożliwe jest pełne i całkowite wyjaśnienie zjawisk naturalnych bez założenia istnienia pozaskończoności *in natura naturata*, więc pozaskończoność ta istnieje.

Cantor był przekonany, że stworzona przezeń teoria mnogości ma duże znaczenie dla metafizyki i teologii. Może w szczególności pomóc w zwalczaniu rozmaitych błędów pojawiających się w niej, na przykład błędu panteizmu. W liście do dominikanina Thomasa Essera pisał: „Dzięki moim pracom filozofia chrześcijańska dysponuje po raz pierwszy w historii prawdziwą teorią nieskończoności"[14].

Wspomnieć tu trzeba o zainteresowaniu teorią mnogości Cantora ze strony filozofów i teologów katolickich – kontrastowało to z ignorowaniem jej i samego Cantora przez środowisko matematyków (wyjątkiem był tu Dedekind). Prace Cantora były studiowane i komentowane przez neoscholastyków: wymienić tu trzeba C. Gutberleta, profesora filozofii, apologetyki i dogmatyki w Fuldzie, T. Pescha i J. Hontheima, benedyktynów z opactwa Maria-Laach w Nadrenii, włoskiego teologa I. Jeilera, jezuitę i późniejszego kardynała J. Franzelina czy dominikanina Th. Essera. Cantor wsłuchiwał się w ich opinie i bardzo mu zależało na tym, by być w zgodzie z oficjalną doktryną katolicką. W pewnym momencie wysunięto zarzut, że teoria Cantora może popełniać błąd panteizmu (potępionego dekretem Piusa IX z roku 1861) – Cantor wierzył bowiem, że pozaskończoność

---

[14] Por. J.W. Dauben, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of Infinite*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.–London 1979, s. 147.

istnieje *in natura naturata*, a każda próba skorelowania Bożej nieskończoności z konkretną nieskończonością czasową sugerowała panteizm, a zatem mogła prowadzić do identyfikowania nieskończoności aktualnej *in concreto*, *in natura naturata* z Bożą nieskończonością, *in natura naturans*. Aby uspokoić Franzelina Cantor dodał do rozróżnienia między nieskończonością *in natura naturans* i *in natura naturata* dodatkowe rozróżnienie między *Infinitum aeternum increatum sive Absolutum* (zarezerwowane dla Boga i Jego atrybutów) i *Infinitum creatum sive Transfinitum* (egzemplifikowane na przykład w aktualnie nieskończonej liczbie obiektów w uniwersum). Wyjaśnienia te zadowoliły Franzelina i udzielił on dziełom Cantora pewnego rodzaju *imprimatum*[15].

Reakcja matematyków na koncepcje Cantora była – jak powiedzieliśmy wyżej – raczej powściągliwa. Jego główny oponent Leopold Kronecker (1823–1891) był zdecydowanie przeciwny wprowadzaniu do matematyki tak „rozbuchanej" nieskończoności. Proponował, by matematykę sprowadzić do liczb naturalnych, gdyż „Liczby całkowite stworzył Pan Bóg, wszystko inne jest dziełem ludzkim"[16] – jak to sformułował na jednym z zebrań naukowych w Berlinie w roku 1886. To prowadziło w szczególności do postulatu głoszącego, że

---

[15] Więcej na temat kontaktów Cantora z teologami i filozofami katolickimi zob. na przykład w R. Murawski, *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne" 1984, 11–12 (9228–229), s. 75–88.

[16] Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

w matematyce należy stosować jedynie dowody konstruktywne dla tez egzystencjalnych – a przecież teoria mnogości wraz z niekonstruktywnym i nieefektywnym aksjomatem wyboru pozwala na tworzenie dowodów niekonstruktywnych. Zwolennikiem konstruktywizmu był też Henri Poincaré (1854–1912), który odrzucał w związku z tym nieskończoność aktualną w matematyce zadowalając się jedynie nieskończonością potencjalną. Skoro bowiem przedmioty matematyki są tworzone przez umysł poznający, to nie może istnieć nieskończoność aktualna, gdyż umysł nie jest w stanie skonstruować aktualnie nieskończenie wielu obiektów. W *Dernières pensées* pisał: „Nigdy nie [należy] tracić z oczu tego, że wypowiedź o nieskończoności musi być tłumaczeniem, skróconym sformułowaniem wypowiedzi o skończoności".

W podobnym kierunku szły też tezy twórcy intuicjonizmu Luitzena Egbertusa Jana Brouwera (1881–1966). Przyjąwszy ontologiczną tezę konceptualizmu, zgodnie z którą matematyka jest wolną życiową aktywnością umysłu, a przedmioty matematyki są konstruowane przez umysł, odrzucał zdecydowanie nieskończoność aktualną. Zbiór nieskończony można więc rozumieć jedynie jako prawo czy regułę tworzenia wciąż nowych jego elementów. Taki zbiór będzie jednak zawsze co najwyżej przeliczalny. Zatem w matematyce można mówić jedynie o przeliczalnej nieskończoności potencjalnej. To wraz z żądaniem dowodów konstruktywnych tez egzystencjalnych zmieniało, dokładniej zubożało zdecydowanie matematykę i wymuszało jej przebudowę.

Jeszcze dalej poszli tzw. ultraintuicjoniści chcący oprzeć matematykę na *aktualnych* możliwościach poznawczych człowieka. Według nich liczby skończone takie, jak na przykład $10^{10^{10}}$ winny być traktowane podobnie jak (nieosiągalna) nieskończoność, skoro wszystkich atomów we wszechświecie jest nie więcej niż 10^{80}. Podejście takie jeszcze bardziej zatem zubaża matematykę – choć w zamian zwiększa efektywność i konstruktywność jej tez.

Wszystkie te tezy należy widzieć w kontekście antynomii, które pojawiły się w teorii mnogości. Ich źródłem było nieprecyzyjne, intuicyjne tylko, pojęcie zbioru, którym operowano od Cantora. Próbowano zatem zaradzić sprzecznościom poprzez ograniczenie świata obiektów matematycznych do bardziej konkretnych, konstruowalnych, bliższych dzięki intuicji. Ceną, jaką trzeba było za to płacić, było ograniczenie i zubożenie matematyki.

Wszelkim takim próbom ograniczenia matematyki przez „wyrzucenie" z niej sprawiającej kłopoty nieskończoności zdecydowanie przeciwstawił się David Hilbert (1862–1943). Pisał:

> To, co proponują Weyl i Brouwer, to nic innego, jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę poprzez wyrzucenie z niej wszystkiego, co sprawia kłopot [...]. Jeśli zgodzimy się na proponowane przez nich reformy, to ryzykujemy utratę wielkiej części naszych najbardziej wartościowych skarbów[17].

[17] Por. C. Reid, *Hilbert*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970, s. 155.

Jako matematyk uważał, że:

> Z raju, który stworzył nam Cantor, nikt nie powinien móc nas wypędzić[18].

Wedle Hilberta należało pokazać, że pojęcie nieskończoności aktualnej, tak potrzebne i wzbogacające matematykę, jest bezpieczne. Zaproponował więc program ugruntowania matematyki klasycznej operującej nieskończonością aktualną. Program ten miał wyraźnie Kantowski charakter. Hilbert przyjął, że zdania o nieskończoności nic nie znaczą same w sobie, nie mają żadnej wartości logicznej (czyli nie są ani prawdziwe, ani fałszywe), nie mogą też być używane w żadnych autentycznych sądach. Nieskończoność jest wedle Hilberta ideą czystego rozumu w sensie Kanta, tzn. jest pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, które nie ma swej realizacji w świecie rzeczywistym, gdyż przekracza wszelkie doświadczenie. Jest jednak pojęciem niezbędnym w matematyce, bo uzupełnia to, co konkretne.

Hilbert widział zresztą cały problem w szerszej perspektywie, nie tylko z punktu widzenia matematyki. Pisał w pracy *Über das Unendliche*:

> [...] ostateczne wyjaśnienie *istoty nieskończoności* stało się konieczne nie tylko w ramach specjalnych fachowych zaintereso-

[18] Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können; D. Hilbert, *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, 95, s. 170.

wań naukowych, ale konieczne jest dla *uczczenia samego umysłu ludzkiego*[19].

Program Hilberta ugruntowania matematyki klasycznej operującej nieskończonością aktualną przewidywał rozróżnienie matematyki finitystycznej i matematyki infinitystycznej. Ta pierwsza jest bezpieczna i ma solidne podstawy, ponieważ traktuje o obiektach, które są jasno i bezpośrednio dane, ta druga wymaga nowych podstaw. W tej pierwszej mamy do czynienia ze zdaniami realnymi, które są w pełni sensowne, gdyż odwołują się do obiektów konkretnych. Ta druga zawiera zdania idealne odwołujące się do obiektów nieskończonych. Hilbert był przekonany, że obiekty i metody infinitystyczne odgrywają w matematyce rolę pomocniczą, są narzędziem pozwalającym rozszerzać i rozwijać system prawd realnych. Dzięki nim możemy w szczególności budować łatwiejsze, krótsze i bardziej eleganckie dowody. Uważał przy tym, że niesprzeczność jest wystarczającym warunkiem istnienia.

Matematykę infinistyczną należało zatem ugruntować i usprawiedliwić za pomocą narzędzi finitystycznych, wykorzystując narzędzia stworzonej przez niego teorii dowodu. W tym celu należało całą matematykę klasyczną zrekonstruować jako duży, szczegółowo opisany system sformalizowany, a następnie,

[19] [...] die endgültige Aufklärung über das *Wesen des Unendlichen* weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur *Ehre des menschlichen Verstandes* selbst notwendig geworden ist; tamże, s. 163

abstrahując od treści aksjomatów i reguł dowodzenia, a biorąc pod uwagę jedynie kształt napisów – a więc obiektów konkretnych i skończonych – wykazać, że taki system jest niesprzeczny. W ten sposób kontrowersyjne pojęcie nieskończoności aktualnej zostanie dobrze ugruntowane i usprawiedliwione.

Początkowo Hilbert i jego uczniowie uzyskiwali sukcesy w realizacji tego programu. Niestety wyniki Kurta Gödla (1906–1978), tzn. jego twierdzenia o niezupełności, pokazały, że programu Hilberta nie da się zrealizować w jego oryginalnej postaci. Nie można bowiem za pomocą słabych (w tym wypadku skończonych, finitystycznych) środków wykazać niesprzeczności, a więc ugruntować matematyki operującej nieskończonością aktualną. Tak więc redukcjonistyczny pomysł Hilberta nie może być przeprowadzony. Dalsze badania pokazały jednak, że można go zrealizować częściowo, tzn. spore fragmenty matematyki klasycznej, więcej nawet, fragmenty – z punktu widzenia „normalnej", nieskażonej dociekaniami logicznymi matematyki – zadowalająco duże, mogą zostać finitystycznie ugruntowane.

* * *

Przedstawiliśmy zarys rozwoju pojęcia nieskończoności w matematyce i zmagania z nim matematyków. Jaka jest dziś sytuacja? Do czego doprowadziły te wysiłki? Czy udało się „ujarzmić" nieskończoność?

Nieskończoność jest w matematyce klasycznej zadomowiona, trudno wyobrazić sobie matematykę bez nieskończoności aktualnej, której wymaga już choćby definicja/konstrukcja tak fundamentalnego pojęcia, jak pojęcie liczby rzeczywistej. Oczywiście są kierunki, które kosztem ograniczenia i zubożenia matematyki rezygnują z nieskończoności aktualnej i zadowalają się (co najwyżej) nieskończonością potencjalną. Stanowią one jednak margines głównego nurtu matematyki. Z drugiej strony nie ma zadowalającej wszystkich zainteresowanych filozoficznej koncepcji nieskończoności w matematyce, niemożliwe zdaje się pełne wyjaśnienie i zrozumienie natury nieskończoności na gruncie filozofii matematyki. Nie przeszkadza to jednak w korzystaniu z niej i odwoływaniu się do niej przez matematyków. Na czym zatem opierają się oni? Otóż podstawą jest tu aksjomatyczna teoria mnogości. Wobec antynomii, na które uwagę zwrócił już Cantor i które starał się eliminować, próbowano ugruntować teorię zbiorów za pomocą metody aksjomatycznej. Pierwszy system aksjomatów zaproponował w roku 1908 Ernst Zermelo (1871–1953),rozbudowano go później przez dołączenie kilku dodatkowych aksjomatów (Abraham Fraenkel, Thoralf Skolem). Dziś system ten jest najszerzej akceptowany i używany – nazywa się go systemem Zermela-Fraenkla i oznacza jako ZF lub ZFC, gdy dołącza się doń aksjomat wyboru. Można więc powiedzieć, że system ZF(C) jest w tej chwili standardową matematyczną teorią nieskończoności.

Sytuacja nie jest jednak tak prosta, gdyż obok ZF istnieją też inne, równie uprawnione i uzasadnione systemy aksjomatyczne teorii mnogości, czyli inne aksjomatyczne ujęcia nieskończoności. Mamy zatem w szczególności systemy von Neumanna-Gödla-Bernaysa i Kelley'a-Morse'a, w których odróżnia się klasy i zbiory, system Ackermanna, system semizbiorów Vopěnki, w którym rozróżnia się klasy, zbiory i tzw. semizbiory, czyli podklasy zbiorów niebędące zbiorami, tzw. alternatywną teorię mnogości Vopěnki, podobną do teorii semizbiorów, ale mającą wiele wspólnego z analizą niestandardową Robinsona i z ideami ultraintuicjonistów, systemy oparte na teorii typów, systemy Quine'a, które próbują łączyć Russella idee typizacji wyrażeń i Zermela idee ograniczania rozmiaru. Każdy z tych systemów ma swoje zalety i wady. Dla przykładu: alternatywna teoria mnogości pozwala inaczej – w duchu Leibniza – ugruntować rachunek różniczkowy i całkowy, w niektórych przypadkach pozwala rozwiązać problemy otwarte[20], systemy Quine'a odwołują się do typów, co jest dla matematyka czymś obcym, ale za to jest ostatnio używane w programowaniu.

Wszystkie te systemy są – zgodnie z twierdzeniami Gödla o niezupełności – niezupełne, tzn. istnieją w nich zdania nierozstrzygalne oraz nie mamy i nigdy mieć nie będziemy absolutnych dowodów ich niesprzeczności. Zatem niemożliwe wydaje się pełne zrozumienie natury nieskończoności za pomocą narzędzi matematycznych. Nie wiemy też, czy systemy teorii mnogości są bezpieczne (z logicznego punktu widzenia). Zatem praktyczne przekonanie o ich niesprzeczności bazować musi na tym, że dotąd żadnej niesprzeczności w nich nie znaleziono, a jeśli

[20] Więcej na temat alternatywnej teorii mnogości i jej filozofii – por. Vopěnka (1983) oraz Murawski (2002), 138–141.

znaleziono, to potrafiono ją wyeliminować. Pozostaje więc tylko wiara w niesprzeczność, a niesprzeczność to przecież podstawowa cecha i fundamentalny wymóg w stosunku do każdej teorii.

Znamy konkretne zdania nierozstrzygalne na przykład dla systemu Zermela-Fraenkla – są nimi w szczególności aksjomat wyboru i (uogólniona) hipoteza kontinuum. Można więc mówić o teorii ZF z/bez aksjomatu wyboru i z/bez hipotezy kontinuum. Wszystkie te wersje są w sobie niesprzeczne, choć wzajemnie sprzeczne. Są zatem dobrymi teoriami nieskończoności, ale różnymi i niezgodnymi z sobą. A zatem możliwych jest wiele różnych teorii nieskończoności. Którą z nich wybrać w matematyce? Jakie własności przypisać nieskończoności? Jaki jest więc świat matematyki?

Przy okazji badań nad hipotezą kontinuum pojawiła się (już u Gödla) idea wzbogacenia aksjomatów teorii mnogości o nowe aksjomaty nieskończoności postulujące istnienie dużych liczb kardynalnych, a zatem dużych nieskończoności. Mamy zatem aksjomaty postulujące istnienie liczb kardynalnych nieosiągalnych, liczb Mahlo, liczb mierzalnych, zwartych, superzwartych itd. Należy jednak zapytać, na jakiej podstawie możemy przyjmować takie duże nieskończoności i czy pomogą one rozstrzygnąć hipotezę kontinuum dotyczącą zresztą dwóch nieskończoności najniżej stojących w hierarchii. Gödel sugerował, że należy odwołać się do intuicji matematycznej – nie sprecyzował jednak, czym ona w istocie jest. Inni, na przykład A. Kanamori i M. Magidor mówią o zasadach „teologicznych” czy racjach czysto formalnych. Jeśli chodzi o drugą kwestię, to żaden z rozważanych dotąd aksjomatów dużych nieskończoności nie pozwolił rozstrzygnąć hipotezy kontinuum, z którą zmagał się przecież już sam Cantor.

Dzięki teorii mnogości (niezależnie od tego, że możliwe są różne jej ujęcia) matematyka dysponuje matematycznym, niezależnym od filozofii pojęciem nieskończoności, które można badać metodami matematycznymi, a więc ściśle; wiemy dokładnie, co wiemy i czego nie wiemy o nieskończoności (aktualnej) i co zależy oraz jak zależy od nieskończoności. Nieskończoność przestała więc być pojęciem „podejrzanym", ma swoje stabilne miejsce w matematyce, a matematyka – wymagająca nieskończoności aktualnej – uzyskała bazę i podstawy – choć niejednoznaczne. Teoria mnogości jako teoria nieskończoności stała się bazą, podstawą i światem matematyki.

Nieskończoność jest w matematyce niezbędna – słusznie więc matematycy, w szczególności Hilbert, jej bronili. Co więcej, nieskończoność jest potrzebna także w tych częściach matematyki, które traktują o obiektach skończonych, na przykład w teorii liczb zajmującej się własnościami liczb naturalnych 0, 1, 2, 3, ...Pokazują to wyraźnie wyniki Parisa-Kirby'ego-Harringtona podające przykłady prawdziwych własności liczb naturalnych, których nie można wykazać w systemie aksjomatycznym arytmetyki, a które można udowodnić używając pewnych środków teorii mnogości, czyli dopuszczając pewną formę nieskończoności. Innymi słowy: co najmniej pierwszy stopień pozaskończoności w teorii mnogości Cantora jest konieczny dla matematyki (dokładniej: kombinatoryki) skończonej.

Dodajmy jeszcze, że w teorii mnogości definiuje się zazwyczaj skończoność poprzez nieskończoność, tzn. powiada się, że zbiór jest skończony, jeśli nie jest nieskończony. Okazuje się, że można też próbować definiować skończoność wprost, ale wtedy możliwe są różne definicje, które są równoważne jedynie przy założeniu aksjomatu wyboru, który sam jest kontrowersyjny oraz niesprzeczny i niezależny od ogólnie akceptowanego korpusu aksjomatów teorii mnogości.

Dalej więc chyba aktualne są słowa Hilberta z jego pracy *Über das Unendliche*:

> Nieskończoność, tak jak żadne inne pytanie, od dawna bardzo głęboko poruszała *umysł* ludzki; nieskończoność, jak żadna inna *idea*, oddziaływała tak pobudzająco i owocnie na umysł; nieskończoność jednakże, jak żadne inne pojęcie, wymaga *wyjaśnienia*[21].

Wobec zaś braku definitywnych rozstrzygnięć wielu kwestii dotyczących nieskończoności, pozostaje podzielić opinię Paula J. Cohena, który w pracy *The Discovery of Forcing* powiada:

> Jedyną rzeczywistością, którą naprawdę pojmujemy jest rzeczywistość naszego doświadczenia. Mamy jednak cudowną zdolność

[21] Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig; D. Hilbert, *Über das Unendliche*, dz. cyt., s. 163.

do ekstrapolacji. Prawa nieskończoności są ekstrapolacjami naszego doświadczenia ze skończonością. Jeśli jest coś nieskończonego, to być może to właśnie dzięki cudownej intuicji, którą posiadamy, jesteśmy w stanie wyczuć, które aksjomaty będą prowadzić do niesprzecznego i pięknego systemu, takiego jak nasza współczesna teoria mnogości[22].

I dodaje:

Dla mnie to [właśnie] estetyka może pełnić bardzo dobrze rolę ostatecznego arbitra. Zgadzam się z Hilbertem, że Cantor stworzył dla nas raj. Myślę, że dla Hilberta był to raj, gdyż sprawiał, że matematyka, którą kochał, znajduje się poza wszelką krytyką, dawał jej podstawę, która wytrzymywała wszelką krytykę. Dla mnie jest to raczej raj pięknych wyników, które w ostateczności dotyczą tylko skończoności, ale żyją w nieskończoności naszych umysłów[23].

---

[22] The only reality we truly comprehend is that of our own experience. But we have a wonderful ability to extrapolate. The laws of the infinite are extrapolations of our experience with the finite. If there is something infinite, perhaps it is the wonderful intuition we have which allow us to sense what axioms will lead to a consistent and beautiful system as our contemporary set theory; P.J. Cohen, *The discovery of forcing*, „Rocky Mountain Journal of Mathematics" 2002, 32, s. 1099

[23] For me, it is the aesthetics which may very well be the final arbiter. I agree with Hilbert that Cantor created a paradise for us. For Hilbert, I think it was a paradise because it put the mathematics he loved beyond all criticism, gave it a foundation that would withstand all criticism. For me, it is rather a paradise of beautiful results, in the end only dealing with the finite but living in the infinity of our own minds; tamże, s. 1100

Bibliografia

Arystoteles, *Fizyka*, tłum. K. Leśniak, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968.

Bedurftig Th., Murawski R., *Philosophie der Mathematik*, Walter de Gruyter, Berlin/New York 2010; wydanie drugie rozszerzone: Walter de Gruyter, Berlin/Boston 2012.

Bolzano B.,. *Paradoxien des Unendlichen*. Herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Přihonsky, bei C.H. Reclam Sen., Leipzig 1850, przekład polski: *Paradoksy nieskończoności*, tłum. Ł. Pakalska, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966.

Cantor G., *Mitteilungen zum Lehre vom Transfiniten*, „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik" 1887–1888, 91, s. 81–125 oraz 92, s. 240–265. Przedruk [w:] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philsophischen Inhalts*, red. E. Zermelo, Verlag von Julius Springer, Berlin 1932 (reprint: Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1980), s. 378–439. Przekład polski fragmentów: *O pozaskończoności*, [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1986, s. 160–171.

Cohen P.J., *The discovery of forcing*, „Rocky Mountain Journal of Mathematics" 2002, 32, s. 1071– 1100.

Dauben J.W., *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of Infinite*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.–London 1979.

Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1888. Przekład polski fragmentów: *O zbiorach nieskończonych*, [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1986, s. 155.

Euklides, *Euklidesa początków geometryi ksiąg ośmioro, to iest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta z dodanemi przypisami dla pożytku młodzi akademickiey wytłumaczone przez Józefa Czecha*, nakładem i drukiem Iózefa Zawadzkiego, typografa Imperatorskiego Wileńskiego Uniwersytetu, Wilno 1807.

Euklides, *Euclidis Elementa*, post I.L. Heiberg, edidit E.S. Stamatis, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969.

Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, Leyden 1638.

Hilbert D., *Über das Unendliche*, „Mathematische Annalen" 1926, 95, s. 161–190. Przekład polski: *O nieskończoności*, [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1986, s. 288–307.

Leibniz G.W., *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, 1704. Przekład polski: *Nowe rozważania dotyczące rozumu ludzkiego*, tłum. I. Dąmbska, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1955. Przedruk fragmentów: *O nieskończoności*, [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1986, s. 98–101.

Meschkowski H., *Aus den Briefbüchern Georg Cantors*, „Archive for History of Exact Sciences" 1962–1966, 2, s. 503–519.

Mikołaj z Kuzy, *De docta ignorantia*, 1440. Reprint [w:] Mikołaj z Kuzy, *Nicolae Cusae Cardinalis Opera*, Paris 1514, oraz Nikolaus von Kues, *Philosophisch-Theologische Schriften, Lateinisch-Deutsch*, (ed.) L. Gabriel, Herder Verlag, Wien 1964–1967, vol. I–III. Przekład polski: *O oświeconej niewiedzy*, tłum. I. Kania, Wydawnictwo ZNAK, Kraków 1997.

Mikołaj z Kuzy, *De mathematica perfectione*, 1488. Reprint [w:] Mikołaj z Kuzy, *Nicolae Cusae Cardinalis Opera*, Paris 1514, oraz Nikolaus von Kues, *Philosophisch-Theologische Schriften, Lateinisch-Deutsch*, (ed.) L. Gabriel, Herder Verlag, Wien 1964–1967, vol. I–III.

Mikołaj z Kuzy, *Liber de mente*, 1448. Reprint [w:] Mikołaj z Kuzy, *Nicolae Cusae Cardinalis Opera*, Paris 1514, oraz Nikolaus von Kues, *Philosophisch-Theologische Schriften, Lateinisch-Deutsch*, (ed.) L. Gabriel, Herder Verlag, Wien 1964–1967, vol. I–III.

Mikołaj z Kuzy, *Nicolae Cusae Cardinalis Opera*, Paris 1514.

Murawski R., *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne" 1984, 11–12 (9228–229), s. 75–88. Przekład angielski: *Cantor's Philosophy of Set Theory*, [w:] R. Murawski, *Essays in the Philosophy and History of Logic and Mathematics*, Editions Rodopi, Amsterdam–New York, NY 2010, s. 15–28.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1986; wydanie drugie: Poznań 1994; wydanie trzecie: Poznań 2003.

Murawski R., *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995; wydanie drugie: Warszawa 2001; wydanie piąte: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 2013.

Murawski R., *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

Nikolaus von Kues, *Philosophisch-Theologische Schriften, Lateinisch-Deutsch*, (ed.) L. Gabriel, Herder Verlag, Wien 1964–1967, vol. I–III.

Pascal B., *Pensées sur la religion et autres sujets*, Paris 1659. Przekład polski: *Myśli*, tłum. T. Żeleński (Boy), Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1972.

Poincaré H., *Dernières pensées*, Ernst Flammarion, Éditeur, Paris 1920. Przekład polski fragmentów: *Logika nieskończoności*, [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów* *klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1986, s. 252–261.

Proklos Diadochus, *Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen"*, Halle (Saale) 1945. Oryginał grecki w: *Procli Diadochi in Primum Elementorum Librum Commentarii*, ed. G. Friedlein, B.G. Teubner, Leipzig 1873; reprint: G. Olms, Hildesheim 1967. Przekład polski fragmentów: *Z Komentarza do „Elementów" Euklidesa*, [w:] R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1986, s. 51–58.

Reid C., *Hilbert*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970.