Filozofia Nauki
Rok I, 1993, Nr 1

Świat fizyczny wyłania się z matematyki

Z Rogerem Penrosem rozmawia Jacek Urbaniec

Czy są takie światy, których nie da się zmatematyzować? Czy możemy przynajmniej sobie takie światy wyobrazić? Gdy rozmawiałem z prof. W.I.Arnoldem w Moskwie w 1987 r., wyraził on opinię, iż ze względów biologicznych jest to po prostu niemożliwe.

Zaczyna pan od pytań bardzo trudnych. Wszystko zależy od tego, co rozumie się przez „matematykę". Przy szerokim rozumieniu matematyka mogłaby też objąć zagadnienia, których obecnie do niej nie zaliczamy.

P.J. Davis i R. Hersh [Davis, Hersh 1986.13] utrzymują, że świat wewnętrzny człowieka, sfera przekonań, postaw, marzeń, zamiarów i uczuć, sfera zazdrości, zawiści, tęsknoty, żalu, pożądania, gniewu, współczucia, jest właśnie światem, który nigdy nie podda się matematyzacji...

Byłbym ostrożny w wygłaszaniu twierdzeń, że coś pozostanie zawsze poza zasięgiem matematyki. Matematyka jest w stanie przyswoić pojęcia, które w tej chwili wydają się nie mieć z nią żadnego związku.

Jednakże, przy tak szerokim pojmowaniu matematyki, pytanie, dlaczego przyroda daje się opisywać przy pomocy matematyki, przestaje być chyba ciekawe?

Wciąż zadziwia mnie niezwykła skuteczność stosowania pojęć matematycznych w fizyce, by użyć określenia Wignera z jego znanego eseju [Wigner 1991]. Niektórzy skłonni są uważać, że skuteczność ta ma charakter wyłącznie statystyczny, ale ja sądzę, iż chodzi tutaj o coś znacznie głębszego.

Znakomitym przykładem może być ogólna teoria względności. Einstein wysunął ją w 1915 r., aby uporać się z kilkoma kwestiami, które go nurtowały. W pewnym sensie teoria ta nie była w ogóle potrzebna. Wprawdzie należało jakoś pogodzić ze sobą szczególną teorię względności i teorię grawitacji Newtona, ale można to było uczynić inaczej, bez konieczności tak radykalnego odchodzenia od panujących wtedy poglądów. Była to w znacznym stopniu kwestia estetyki, wrażliwości na piękno w matematyce i fizyce, poczucia, że czegoś brakuje, że potrzebne jest jakieś jednolite ujęcie, zasadniczo odmienne od dotychczasowych poglądów na strukturę czasoprzestrzeni.

Przez dłuższy czas uważano tę teorię za bardzo piękną, lecz nie wystarczająco potwierdzoną obserwacyjnie, niekiedy wręcz za błędną. Dysponowano wprawdzie trzema znanymi testami — jednym z nich był ruch perihelium Merkurego — ale testy te tak naprawdę nie były zbyt dobre. Można je było odmiennie interpretować i stwierdzić, iż inne teorie mogłyby prowadzić do podobnych efektów. Jednak obecnie ogólna teoria względności została potwierdzona na wiele innych sposobów, w szczególności dzięki odkryciu podwójnego pulsara — dwóch gwiazd neutronowych wzajemnie się okrążających, które wypromieniowują fale grawitacyjne. Przykład ten dostarcza wyraźnego potwierdzenia ogólnej teorii względności z dokładnością rzędu 10^{-14}, co czyni ją najdokładniej potwierdzoną teorią naukową, dokładniej nawet od elektrodynamiki kwantowej. Fakt, że Einstein doszedł do tak dokładnej teorii kierując się względami estetycznymi a nie empirycznymi, pokazuje, iż d o k ł a d n o ś ć t a t k w i w s a m e j p r z y r o d z i e, n i e j e s t c z y m ś n a r z u c o n y m p r z e z n a s, ani nie jest rezultatem czegoś w rodzaju selekcji naturalnej pośród konkurencyjnych teorii.

Co sprawia, że abstrakcyjne obiekty matematyczne, nawet tak wyrafinowane, jak operatory w przestrzeni Hilberta o nieskończonym wymiarze, odpowiadają rzeczywistości fizycznej?

Jeśli już mam to wyjaśniać, będą to jedynie moje spekulacje. Nie tylko dokładność, z jaką jakaś teoria stosuje się do świata fizyczngo, ale i wyrafinowanie aparatu matematycznego używanego w fizyce teoretycznej, jest czymś bardzo doniosłym, wręcz zdumiewającym. Sądzę, że istnieje pewnego rodzaju jedność świata fizycznego i platońskiego świata matematyki, który jest dla mnie czymś realnym, istniejącym obiektywnie...

Platonizm w filozofii matematyki nie musi od razu prowadzić do twierdzenia, że pomiędzy przemijającym światem fizycznym a niezmiennym światem matematyki istnieją jakieś powiązania...

Zgadzam się z panem. Odmienność tych światów, a jednocześnie ich «tożsamość» stanowi dla nas kolejną zagadkę... Sądzę, że rzeczywistość fizyczna w pewien sposób wyłania się z rzeczywistości matematycznej. Jeśli weźmiemy pod uwagę ekonomię lub jakąś inną dyscyplinę odnoszącą się do wyższych poziomów rzeczywistości — chodzi mi o poziomy złożoności — np. do społeczeństwa, to i tam używa się matematyki. Ale zastosowana, matematyka nie wydaje się mieć tej magicznej precyzji jak w wypadku fizyki. Natomiast w miarę jak dążymy ku fundamentom świata fizycznego, odnajdujemy jedność z pojęciami matematyki, nie tylko z tymi najprostszymi, lecz nawet z subtelnymi, wyrafinowanymi.

I rzeczywiście tak to wygląda w fizyce. Gdy pytamy „Co to jest stół?" — przedstawiamy sobie typowy przykład obiektu fizycznego. Jednak gdy chodzi nam o opis najlepszy z naukowego punktu widzenia, musimy odwołać się do atomów — i wtedy pojawia się problem, jak opisać atomy. Opis matematyczny staje się coraz bardziej wyrafinowany. Obiekty fizyczne nie są już niezależnymi, odrębnymi bytami. Można je w pełni wyodrębnić dopiero w ramach opisu kwantowo-mechanicznego, jakże wyrafinowanego pod względem matematycznym. Zatem, aby poznać rzeczywiście obiekty fizyczne, pojąć, czym one są naprawdę, zmuszeni jesteśmy posługiwać się coraz bardziej skomplikowanymi pojęciami matematycznymi. Wydaje się, jakby obiekty fizyczne istniały «zanurzone» w rzeczywistości matematycznej.

Niektórzy z filozofów utrzymują, że obiekty matematyczne, nawet gdyby istniały w sensie platońskim, egzystowałyby poza obrębem świata czasoprzestrzennego. Nie byłyby one dostępne naszemu poznaniu, które podlega przyczynowym prawom czasoprzestrzeni.

Sądzę, że to doniosła kwestia. Nie traktowałbym jednak tego jako argumentu przeciwko platonizmowi, chyba że w jego skrajnej wersji, w której dokonuje się separacji świata matematyki od świata fizycznego. Tymczasem, jak właśnie mówiliśmy, między tymi światami występują istotne powiązania na fundamentalnym poziomie fizyki.

Skłonny byłbym uważać, że takie powiązania są możliwe również na poziomie zjawisk psychicznych, jakkolwiek jest to kwestia dyskusyjna. Sądzę, że platońskie pojęcia w pewien sposób mogą być przedmiotem bezpośredniej percepcji.

Dzięki swoistej intuicji?

Owszem, ale intuicji właściwie rozumianej, nie w sensie jakiegoś zgadywania. Chodzi mi o coś poważniejszego — o bezpośrednią percepcję obiektów matematyki. Słowo „bezpośrednia" nie jest tu może najwłaściwsze, zważywszy że odwołujemy się również do naszego doświadczenia. Nie jest to jednak proste doświadczenie; zawiera w sobie element bezpośredniego wglądu w matematyczną rzeczywistość. Żadne doświadczenie nie mówi nam, czym są liczby rzeczywiste: jest ich bowiem nieskończenie wiele. Oprócz tego mamy reguły określające, w jaki sposób liczby te mogą być przedmiotem rozumowań.

W pewnym sensie, owa bezpośrednia percepcja obiektów matematycznych wykracza poza świat fizyczny. Sądzę, że ma to duży związek z naturą zjawisk psychicznych, o której wiemy tak niewiele.

Przypuśćmy, że posiadamy tę swoistą zdolność bezpośredniej percepcji obiektów matematycznych. Czyż intuicja ta nie bywa często zwodnicza? Czy nie zdarzyło się Panu, że jakieś pomysły matematyczne, o których słuszności był Pan przekonany, okazywały się potem błędne?

Tak, to prawda. Oczywiście, każdy popełnia błędy, ale matematycy nie popełniają błędów znowu tak wiele. Ponadto mamy procedury, aby się ostatecznie od błędów uwolnić. Dostrzegłszy błąd, matematyk potrafi się z nim uporać, podczas gdy w tak wielu innych dziedzinach życia nie osiąga się podobnego stopnia pewności i jakże do niego daleko. Zatem niepewność w matematyce, nawet jeśli od czasu do czasu popełniane są błędy, wydaje się nieznaczna w porównaniu z innymi dziedzinami życia.

W swej niezmiernie ciekawej książce [Penrose1989] podkreśla Pan podobieństwa pomiędzy obiektami matematycznymi i fizycznymi. Zbiór Mandelbrota porównuje Pan do Mount Everestu. Jednak matematycy to nie geografowie — oni nie opisują, lecz dowodzą. Gdyby matematycy, przynajmniej ci najwybitniejsi, posiadali tak ogromne zdolności, by bezpośrednio penetrować świat matematyki, to dowody nie byłyby w ogóle potrzebne... Dla zwolennika formalizmu, z kolei, intuicja byłaby tylko jakimś psychologicznym dodatkiem do matematyki; naprawdę liczy się tylko dowód.

Dowód sam w sobie jest niczym, ponieważ na pewnym etapie trzeba odwołać się do poczucia oczywistości. Dowód w sensie formalnym wymaga przyjęcia pewnych aksjomatów, reguł wnioskowania. Z kolei, akceptując owe reguły jako metodę dochodzenia do prawdy, odwołuje się właśnie do matematycznego wyczucia i rozumienia.

W takim razie, czy dowody nie stawałyby się czymś na podobieństwo drogowskazów dla kierowcy lub porad dla zakonnika, jak osiągnąć przeżycie mistyczne?

Błędny jest pogląd, że trzeba dokonywać wyboru pomiędzy dowodem a intuicją. Dowody stanowią potwierdzenie uprzednich intuicji. Temu, co początkowo dość niejasno przeczuwamy, nadajemy formę ścisłego rozumowania. Uprawianie matematyki bez dowodów prowadziłoby na manowce. Niemniej jednak, dowody same w sobie nie są czymś samoistnym. Choćby nie wiadomo jak formalny był dowód, nigdy nie uda się wyeliminować elementu rozumienia pojęć (wyczucia, intuicji czy jakkolwiek ktoś to określi), ponieważ dowód opiera się na przekonaniu o słuszności określonych aksjomatów i procedur.

Zanim przejdę do następnego pytania, chciałbym dowiedzieć się, czy uważa Pan teorię gry w szachy za część matematyki?

W głębszym sensie — nie. Byłaby to dość płytka matematyka. Reguły są tu zbyt arbitralne.

Ważnym argumentem na rzecz platonizmu w matematyce jest dla Pana to, że niejednokrotnie za pomocą struktur matematycznych otrzymujemy znacznie więcej niż uprzednio w nie włożyliśmy. Innymi słowy, na «wyjściu» mamy znacznie więcej niż na «wejściu». Jeśli argument ten jest słuszny, odnosi się on nie tylko do matematyki, ale do każdej dziedziny, w której zachodzi analogiczna sytuacja. W podobny sposób Popper [Popper1992.148-206] dowodził obiektywnego charakteru tego, co nazywał „trzecim światem".

Chociaż teoria szachów jest, w najlepszym razie, nieciekawą matematyką, to jednak na «wyjściu» (różnorodność prawidłowych posunięć w danej sytuacji) mamy tu znacznie więcej niż na «wejściu» (reguły gry).

Istotnie, wiele możliwych do pomyślenia reguł prowadziłoby do gier zupełnie nieciekawych. Skłonny jestem więc zgodzić się, że w regułach szachów jest chyba coś wyjątkowego, co czyni tę grę ciekawą. (Przy okazji, przypuszczam, że bliższa matematyce jest gra w go.)

Trudno jednak uwierzyć, że za regułami szachów, za ruchami króla, wież, pionków, kryje się jakaś głębsza rzeczywistość...

To jedynie kwestia stopniowalności. W moim rozumieniu platonizmu, który przedstawiłem w książce *The Emperor's New Mind*, pewne rzeczy są realne w większym stopniu niż inne. A najwyższą realność posiadają rzeczy, z których otrzymuje się o wiele więcej niż się do nich włożyło. Przeważnie jednak to, co otrzymujemy, nie różni się znacząco od tego, co włożyliśmy. Rzeczom tym przypisywałbym banalny stopień realności lub wręcz jej brak.

Odrzucam pogląd, iż coś jest albo realne albo nie. Mamy do czynienia z całą skalą realności, od największej do najmniejszej.

Zajmijmy się więc przykładami. Czy pojęcie „pochodnej" jest takim doniosłym pojęciem, danym przez Boga, by posłużyć się Pańską terminologią?

O tak, bardzo doniosłym.

W książce uwaga Pana skoncentrowana jest jednak nie na takich pojęciach, jak pojęcie „pochodnej", lecz na zbiorze Mandelbrota. Nie wydaje mi się, by był to typowy przykład obiektu matematycznego.

Moja książka ma po części charakter poglądowy, a zbiór Mandelbrota posiada tę zaletę, iż można go łatwo pokazać; właśnie tu go mamy — komputer rysuje jego obraz i oto zbiór Mandelbrota przed nami. Przypomina to odkrywanie nowych lądów. Tak więc zbiór Mandelbrota może posłużyć jako efektowny przykład, pobudzający ludzi do przeczytania książki.

Jest jeszcze drugi powód. Do opisania zbioru Mandelbrota, przynajmniej w ujęciu takim jak moje, używa się liczb zespolonych. A do liczb zespolonych odwołuję się w dalszej części książki przy omawianiu mechaniki kwantowej. Chciałem, aby w ten sposób czytelnik przyswoił sobie pojęcie „liczb zespolonych".

W książce wymieniam trzy przykłady wskazujące na istnienie w sensie platońskim. Pierwszym z nich jest samo pojęcie obliczania, pojęcie algorytmu. To abstrakcyjne pojęcie może być nieco za trudne dla przeciętnego czytelnika. Następny przykład, zbiór Mandelbrota, jest najbardziej wyrazisty. Trzeci przykład — to zbiór liczb zespolonych. Tak niewiele trzeba tu włożyć, a tak wiele się otrzymuje. Realność w sensie platońskim zbioru liczb zespolonych jest dla mnie znacznie wyższa, niż realność zbioru Mandelbrota.

Zatem, jak widać, jest to w większym stopniu kwestia doboru przykładów do tej konkretnej książki, a nie tego, co uważam za głębokie platońskie prawdy w matematyce. Zgadzam się z Panem, że różniczkowanie, zasadnicze twierdzenia rachunku różniczkowego itp., mają charakter doniosłych idei matematycznych.

W swojej książce podkreśla Pan, że wszystkich szczegółów skomplikowanej struktury zbioru Mandelbrota nie można do końca ukazać przy pomocy żadnego komputera ani też w pełni uchwycić naszym umysłem. Ostateczny dostęp do zbioru Mandelbrota jest niemożliwy. Ale w jakim sensie miałoby nie być dla nas dostępne pojęcie „pochodnej"?

Pojęcie pochodnej, jak prawie wszystkie pojęcia w matematyce, stanowi punkt wyjścia do dalszych uogólnień. Od pochodnej jako granicy ciągu liczbowego, a następnie jako operatora liniowego, przechodzimy do coraz bardziej skomplikowanych struktur. Może więc owa niedostępność pojęcia pochodnej miałaby polegać na tym, że nie możemy uchwycić wszystkich możliwych jej uogólnień?

Tak. Z pewnością matematyka jest taką nieskończoną strukturą, której nigdy nie będziemy w stanie ogarnąć w pełni. To nie ulega wątpliwości.

Chociaż w swej książce broni Pan stanowczo platonizmu, stanowiska przeciwstawne w filozofii matematyki, np. intuicjonizm, wciąż dominują wśród profesjonalnych filozofów. Jaki jest stosunek do intuicjonizmu Pana Profesora — matematyka zajmującego się fizyką matematyczną?

Wiele ze znanych mi poglądów Brouwera skłonny jestem uznać za nietrafne z punktu widzenia fizyki, szczególnie tezę o zależności prawdy w matematyce od czasu. W ujęciu Brouwera dane twierdzenie nie posiadałoby absolutnej prawdziwości albo fałszywości, zanim nie przedstawi się dlań dowodu w sensie intuicjonistycznym. Matematyka, jeśli ma niezawodnie opisywać świat fizyczny, nie może zależeć od kryteriów uwarunkowanych społecznie.

Niepokoi mnie stale pogłębiająca się przepaść pomiędzy filozofującymi przyrodnikami i matematykami a profesjonalnymi filozofami. Na przykład w swej książce nie odwołuje się Pan do żadnego ze współczesnych wpływowych filozofów matematyki. Ani razu nie pada w niej nazwisko Quine'a, Putnama, Wittgensteina, Dummetta, Fielda, Hellmana, Kitchera...

Tak, no cóż... Problem w tym, że reprezentuję tu jedną stronę — punkt widzenia matematyka. Zdecydowanie uważam siebie za matematyka — a nie — filozofa. Po części wynika to z problematyki, jaką przeważnie zajmują się filozofowie; jakoś wcale mnie ona nie pociąga, a może tak naprawdę jej nie rozumiem, podczas gdy matematyka jest dla mnie źródłem nieodpartej fascynacji.

Jeśli ktoś zajmuje się matematyką, nieuniknione jest odczucie jej realności i obiektywności (jakkolwiek dałoby się wymienić paru matematyków, którzy odrzucają platonizm).

Sądzę, że obiekty, z którymi ma się do czynienia w metamatematyce, zasadniczo różnią się od obiektów matematyki. Te pierwsze wydają się czymś sztucznym, wymyślonym przez człowieka, podczas gdy te drugie wywołują owo odczucie ich realności, o którym Pan przed chwilą wspomniał. Doświadczenie profesjonalnych filozofów prawie wyłącznie ogranicza się do obiektów metamatematyki...

Tak. Trzeba zajmować się bezpośrednio matematyką, aby doświadczyć realności obiektów matematycznych.

W 1980 r. opublikowano książkę Science Without Numbers *[Field 1980], która zapoczątkowała szeroką dyskusję. Jej autor, Hartry Field, starał się wykazać, że pomimo efektywności stosowania matematyki do opisu świata fizycznego, byty matematyczne nie są czymś niezbędnym z teoretycznego punktu widzenia, tzn. można zaksjomatyzować teorie przyrodnicze w sposób nominalistyczny tak, aby nie występowały żadne odniesienia ani kwantyfikacja po obiektach matematycznych.*

W ślad za książką Fielda ukazała się książka Mathematics Without Numbers *Geoffreya Hellmana [Hellman 1989].*

Nie przeczytałem żadnej z nich, jakkolwiek przejrzałem książkę Fielda. Kłopot w tym, że rozróżnienia, o których się tam dyskutuje, szybko mnie nudzą.

Ja również nie przeczytałem tych książek do końca. Według mnie zupełnie pominięto w nich «logikę» rozwoju pojęć matematycznych. Jeśli jakąś część wiedzy matematycznej «zapakujemy» w postaci aksjomatów, jakże trudno jest ją z powrotem «rozpakować».

Tak!

Mając do dyspozycji aksjomaty przestrzeni Hilberta, nie wiadomo, które pojęcia okażą się naprawdę przydatne; na przykład, dlaczego pojęcie operatora normalnego jest tak ważne, dlaczego należy badać widmo operatora itd. Innymi słowy, nie jesteśmy w stanie dowiedzieć się niczego o «infrastrukturze pojęciowej».

Tak, ja też tak myślę. Możemy również zapytać, dlaczego właśnie te aksjomaty, a nie inne? Aksjomaty bywają użyteczne jako sposób zwięzłego ujęcia, opisu danej struktury matematycznej. Pozostaje jednak nie wyjaśnione, dlaczego używa się tych aksjomatów, a nie innych.

Wróćmy jeszcze do The Emperor's New Mind. *Książka jest wymierzona przeciwko silnej zasadzie sztucznej inteligencji. Teza, że uczucia miałyby być wywoływane przez procesy typu obliczeń wydaje mi się absurdalna...*

Sądzę, że wiele osób odrzuciłoby tę tezę jako absurdalną. Tytuł mojej książki mógłby sugerować podobne nastawienie z mojej strony, przynajmniej do pewnego stopnia. Jednakże fakt, iż źródłem uczuć jest to, co dzieje się w naszych głowach, może skłaniać niektórych do poglądów bardzo zbliżonych do silnej zasady sztucznej inteligencji. Nie uważam zatem, aby teza ta była absurdalna, jest ona po prostu błędna.

Czy przyjęcie platonizmu jest konieczne, gdy odrzuca się silną zasadę sztucznej inteligencji?

Gdy przystępowałem do pisania książki, moim zamiarem nie było raczej akcentowanie platonizmu. Ale tak wyszło, bo stanowisko to jest zgodne z moimi odczuciami.

Z drugiej strony, twierdzenie Gödla może być ważnym argumentem uzasadniającym przekonanie, że myślenie posiada również aspekty niealgorytmiczne. A twierdzenie Gödla ma bezpośredni związek z platonizmem.

Niektórzy filozofowie krytykują jednak Pana argument oparty na twierdzeniu Gödla. Twierdzą oni, że maszyna generująca w sposób systematyczny wnioski z przyjętego zbioru aksjomatów, może przy użyciu generatora losowego utworzyć czasem całkiem nowe zdanie, a następnie dołączyć je do zbioru wniosków. Jeżeli owo nowe zdanie jest sprzeczne z przyjętym wcześniej zbiorem aksjomatów, maszyna prędzej czy później wygeneruje fałsz. Ostatecznie, niektóre z tego typu zdań, które przetrwały, staną się twierdzeniami niedowiedlnymi w ramach przyjętego systemu aksjomatów. Zdaniem tych filozofów, matematyka jako wytwór ludzkiego umysłu wykazuje również tę właściwość.

Nie rozumieją oni istoty mego rozumowania. To moja wina, ponieważ powinienem był to lepiej wyjaśnić. Dla każdego prawdziwego zdania matematycznego można podać w oczywisty sposób algorytm, którego będzie ono rezultatem. Na przykład algorytm będący instrukcją wydrukowania tego zdania. Ale skąd wiadomo, że jest ono prawdziwe? Potrzebna jest zdolność postrzegania prawd matematycznych. A ona właśnie, niemożliwa do ujęcia w sposób formalny, legła u podstaw twierdzenia Gödla.

Bardzo dziękuję Panu Profesorowi za rozmowę.

Tłumaczyli: Marek Krośniak i Jacek Urbaniec

Bibliografia

Davis, Philip J.; Hersh, Reuben

1986 - *Descartes' Dream: The World According to Mathematics*, San Diego, Harcourt Brace Jovanovich.

Field, Hartry

1980 - *Science Without Numbers*, Oxford, Basil Blackwell.

Hellman, Geoffrey

1989 - *Mathematics Without Numbers*, Oxford, Clarendon Press.

Penrose, Roger
1989 - *The Emperor's New Mind*, NewYork-Oxford, Oxford University Press.

Popper, Karl R.
1992 - „Epistemologia bez podmiotu poznającego", [w:] *Wiedza obiektywna: Ewolucyjna teoria epistemologiczna*, tł. Adam Chmielewski, Warszawa, PWN, s.148-206.

Wigner, Eugene P.
1991 - „Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych", tł . Jacek Dembek, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, z. XIII, s. 5-18.