Filozofia Nauki
Rok II, 1994, Nr 1(5)

Eugeniusz Żabski

Algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków kwantyfikatorów

1. Uwagi wprowadzające.

W pracy [Żabski 1993c] przedstawiona jest algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków zdań. Niniejszy tekst nawiązuje do wymienionej pracy i jest jakby drugą jego częścią. Wyników tam uzyskanych tu nie powtarzamy, a jedynie z nich korzystamy.

Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów budowane są na wzór rachunku klasycznego. Przedstawimy 7 nihilistycznych rachunków kwantyfikatorów (w skrócie: nrk) opartych na omówionych w wymienionej już pracy nihilistycznych rachunkach zdań (w skrócie: nrz). Po bardzo pobieżnym syntaktycznym opisie każdego z nrk (obszerniejsze opisy znaleźć można w [Żabski 1993c], [Żabski 1993b], [Żabski 1992]) przejdziemy do podania semantycznej interpretacji kwantyfikatorów. Nrk budowane są metodą aksjomatyczną. Najważniejszym wynikiem pracy jest dowód, iż aksjomatyki każdego z nrk są adekwatne względem odpowiednich algebr. Aksjomatyka każdego z nrk składa się m.in. z następujących schematów aksjomatów:

K1. $\bigwedge_a A \rightarrow A(a/b)$,

K2. $A \rightarrow \bigvee_a A$,

K3. $\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge_a B)$, o ile nie jest zmienną wolną w A,

K4. $\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (\bigvee_a A \rightarrow B)$, o ile nie jest zmienną wolną w B.

2. Nihilistyczny rachunek kwantyfikatorów N_1.

Omówienie nrk N_1 — jak każdego zresztą rachunku — zaczynamy od krótkiego opisu języka tego rachunku. Język ten oznaczamy symbolem JN_1.

Na alfabet JN_1 składają się:

1. stałe logiczne: a) $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\equiv$, b) $\bigwedge$, $\bigvee$;

2. stałe specyficzne JN_1: T, F, czytane odpowiednio: jest prawdziwe, że; jest fałszywe, że;

3. zmienne: a) indywiduowe: x, y, z, b) predykatywne: P, Q, R;

4. nawiasy i przecinki.

Wyrażeniem JN_1 jest każdy skończony ciąg symboli alfabetu JN_1.

Formułą JN_1 jest takie i tylko takie wyrażenie JN_1, które spełnia następujące warunki:

1. Każde wyrażenie JN_1 zbudowane z n-argumentowego symbolu predykatywnego i następującego po nim, ujętego w nawiasy, n-elementowego ciągu, niekoniecznie różnych między sobą, zmiennych indywiduowych jest formułą JN_1.

2. Jeśli A jest formułą JN_1, to wyrażenia postaci: $\sim(A)$, $T(A)$, $F(A)$, są formułami JN_1.

3. Jeśli A jest formułą JN_1 oraz a jest zmienną indywiduową, to wyrażenia postaci: $\bigwedge_a (A)$ i $\bigvee_a (A)$ są również formułami JN_1.

4. Jeśli A i B są formułami JN_1, to wyrażenia postaci: $(A)\vee(A)$, $(A)\wedge(B)$, $(A)\rightarrow(B)$, $(A)\equiv(B)$ są również formułami JN_1.

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_1 są wszystkie te i tylko te formuły JN_1, które podpadają pod:

1. schematy aksjomatów systemów aksjomatycznego nrz n_1,
2. schematy K1-K4.

Jako pierwotne reguły dowodzenia w N_1 przyjmujemy regułę odrywania (RO) i regułę generalizacji (RG) o schemacie: $\dfrac{A}{\bigwedge_a A}$

3. Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów N_2, N_2'.

Język nrk N_2 i N_2' oznaczamy symbolem JN_2.

Na alfabet JN_2 składają się:

1. stałe logiczne: a) $\sim$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\equiv$, b) $\bigwedge, \bigvee$;
2. stałe specyficzne JN_2: T, F, N, czytane odpowiednio: jest prawdziwe, że; jest fałszywe, że; jest nieokreślone;
3. zmienne: a) indywiduowe: x, y, z, b) predykatywne: P, Q, R;
4. nawiasy i przecinki.

Definicja wyrażenia JN_2 i formuły JN_2 są analogiczne odpowiednio do definicji wyrażenia i formuły JN_1 z tym, że warunek 2. definicji formuły JN_2 jest następujący:

2. Jeśli A jest formułą JN_2, to wyrażenia postaci: $\sim(A)$, $T(A)$, $F(A)$, $N(A)$ są formułami JN_2.

Spośród wszystkich formuł JN_2 wyróżniam tzw. formuły prefiksowe JN_2. Formułami prefiksowymi JN_2 nazywamy te i tylko te formuły JN_2, które spełniają następujące warunki:

1. Jeśli A jest formułą JN_2, to wyrażenia postaci: $T(A)$, $F(A)$, $N(A)$ są formułami prefiksowymi JN_2.

2. Jeśli A jest formułą prefiksową JN_2, to wyrażenie postaci $\sim(A)$ jest formułą prefiksową JN_2.

3. Jeśli A i B są formułami prefiksowymi JN_2, to wyrażenia postaci: $(A)\vee(B)$, $(A)\wedge(B)$, $(A)\rightarrow(B)$, $(A)\equiv(B)$ są formułami prefiksowymi JN_2.

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_2 są wszystkie te i tylko te formuły JN_2, które podpadają pod:

1. schematy K1-K4,

2. schematy aksjomatów systemu aksjomatycznego nrz n_2, z tym, że w schemacie A6 zwrot: „o ile A jest formułą prefiksową jn_2" należy zastąpić wyrażeniem: „o ile A jest formułą prefiksową JN_2".

Jako pierwotne reguły dowodzenia w N_2 przyjmujemy RO i RG.

Nad nrz n_2 można także nadbudować nrk N_2'. W nrk N_2' przyjmujemy inną definicję fomuły prefiksowej JN_2. Definicja formuły prefiksowej JN_2 w systemie N_2' od definicji formuły prefiksowej JN_2 w rachunku N_2 różni się tylko warunkiem 1. Warunek ten jest następujący:

1. Jeśli A jest formułą JN_2, to wyrażenia postaci: $T(A)$, $F(A)$, $N(A)$, $\bigwedge_a (A)$, $\bigvee_a (A)$ są formułami prefiksowymi JN_2.

Łatwo zauważyć, iż drobna ta modyfikacja definicji formuły prefikowej JN_2 powoduje, że np. formuła JN_2:

$$(\bigwedge_a P(x) \to P(X)) \to (\sim P(x) \to \sim \bigwedge_a P(x))$$

nie będąca tezą N_2, staje się twierdzeniem N_2'. Oczywiste, że każda teza N_2 jest twierdzeniem N_2'. Zatem $N_2 \subsetneq N_2'$. Zauważmy także, że formuła JN_2: $P(x) \vee \sim P(x)$ jest tezą N_1 lecz nie jest twierdzeniem ani N_2, ani N_2'. Łatwo zauważyć, że:

1. $P(x) \to P(x)$ jest tezą każdego z rachunków: N_1, N_2, N_2'.

2. $\sim NP(x) \to (TP(x) \vee FP(x))$ jest tezą zarówno N_2 jak i N_2' lecz nie jest twierdzeniem N_1. Konstatacja ta uzasadnia następujące stwierdzenie: nrk N_1 krzyżuje się zarówno z nrk N_2 jak i z nrk N_2'.

4. Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów N_3 i N_3'.

Język nrk N_3 oznaczam symbolem JN_3.

Na alfabet JN_3 składają się:

1. stałe logiczne, jak w poprzednio omówionych językach;
2. stałe specyficzne JN_3: T, F, N. Tę ostatnią stałą czytamy: jest niejednoznaczne, że;
3. zmienne: a) indywiduowe: x, y, z, b) predykatywne: P, Q, R;
4. nawiasy i przecinki.

Definicje wyrażenia JN_3 i formuły JN_3 są analogiczne odpowiednio do definicji wyrażenia i formuły JN_2.

Spośród wszystkich formuł JN_3 wyróżniamy te, które nazywamy formułami prefiksowymi JN_3. Są to formuły, które spełniają następujące warunki:

1. Jeśli A jest formułą JN_3, to $T(A)$, $F(A)$, $M(A)$ są formułami prefiksowymi JN_3.
2. Jeśli A jest formułą prefiksową JN_3, to $\sim(A)$ jest formułą prefiksową JN_3.
3. Jeśli A i B są formułami prefiksowymi JN_3, to $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \to (B)$, $(A) \equiv (B)$ są formułami prefiksowymi JN_3.

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_3 są wszystkie te i tylko te formuły JN_3, które podpadają pod:

1. schematy K1-K4,
2. schematy aksjomatów systemu aksjomatycznego nrz n_3, z tym, że w schematach A6 i A7 zwrot: „o ile $A(B)$ jest formułą prefiksową jn_3" należy zastąpić wyrażeniem: „o ile $A(B)$ jest formułą prefiksową JN_3".

Regułami pierwotnymi w N_3 są RO i RG.

Analogicznie jak nrk N_2' budujemy nrk N_3'. W rachunkach N_3' (w przeciwieństwie do systemu N_3) prefiksami są także kwantyfikatory. Modyfikacja ta sprawia, iż np. formuła JN_3: $\bigwedge_x P(x)\to(\sim\bigwedge_x P(x)\to Q(y))$ nie będąca tezą N_3 staje się twierdzeniem N_3'. Oczywiste jest, że każda teza N_3 jest twierdzeniem N_3'. Zatem $N_3\subsetneq N_3'$. Zauważmy, że:

1. $P(x)\to(Q(x)\to P(x))$ jest tezą każdego z rachunków: N_1, N_2, N_2', N_3, N_3'.
2. $(P(x)\to Q(x))\to(\sim Q(x)\to\sim P(x))$ jest tezą N_1, lecz nie jest twierdzeniem ani N_3, ani N_3'.
3. $\sim NP(x)\equiv TP(x)\vee FP(x)$ jest tezą zarówno N_2 jak i N_2', lecz nie jest twierdzeniem ani N_3, ani N_3'.
4. $MP(x)\to(P(x)\wedge\sim P(x))$ jest tezą zarówno N_3 jak i N_3', lecz nie jest twierdzeniem żadnego z systemów: N_1, N_2, N_2'.

Konstatacja ta uzasadnia następujące stwierdzenie: każdy z rachunków N_1, N_2, N_2' krzyżuje się zarówno z systemem N_3 jak i z N_3'.

5. Nihilistyczne rachunki kwantyfikatorów N_4 i N_4'.

Język nrk N_4 oznaczam symbolem JN_4. Alfabet JN_4 jest sumą logiczną alfabetów JN_2 i JN_3. Definicje wyrażenia JN_4 i formuły JN_4 są analogiczne odpowiednio do definicji wyrażenia i formuły JN_3. Analogicznie też definiujemy zbiór formuł prefiksowych JN_4 (prefiksami są spójniki: T, F, N, M).

Aksjomatami systemu aksjomatycznego N_4 są wszystkie te i tylko te formuły JN_4, które podpadają pod:

1. schematy K1-K4,
2. schematy aksjomatów nrz n_4, z tym, że w schematach A6 i A7 w zwrotach: „o ile A jest formułą prefiksową jn_4" („o ile *A* i *B* są formułami prefiksowymi jn_4"), „jn_4" należy zastąpić przez „JN_4".

Pierwotnymi regułami w N_4 są RO i RG.

Analogicznie jak nrk N_2' i N_3' budujemy nrk N_4'. W rachunku N_4' prefiksami są oprócz spójników: T, F, N, M, także kwantyfikatory: $\bigwedge_a$, $\bigvee_a$. Modyfikacja ta sprawia, iż np. formuła JN_4: $\bigwedge_x P(x)\to(\sim\bigwedge_x P(x)\to Q(y))$ nie będąca tezą N_4 jest twierdzeniem N_4'. Oczywiste jest, że każda teza N_4 jest twierdzeniem N_4'. Zauważmy też, że:

1. $P(x)\to(Q(x)\to P(x))$ jest tezą każdego z rozważanych w tej pracy rachunków.
2. $P(x)\vee\sim P(x)$ jest tezą N_1, lecz nie jest tezą ani N_4, ani N_4'.
3. $(TP(x)\to Q(x))\to(\sim Q(x)\to\sim TP(x))$ jest tezą N_2 jak i N_2', lecz nie jest twierdzeniem ani N_3, ani N_4'.
4. $(P(x)\to TQ(x))\to(\sim TQ(x)\to\sim P(x))$ jest tezą N_3 jak i N_3', lecz nie jest twierdzeniem ani N_4, ani N_4'.
5. $MP(x)\to(P(x)\wedge\sim P(x))$ jest tezą zarówno N_4 jak i N_4', lecz nie jest twierdzeniem żadnego z pozostałych omawianych w tej pracy rachunków. Z powyższego wynika więc, że każdy z rachunków N_1, N_2, N_2', N_3, N_3' krzyżuje się zarówno z N_4 jak i z N_4'.

6. Algebry AN.

W [Żabski 1993c] omówione są algebry An_1, An_2, An_3 i An_4. Niech An będzie symbolem dowolnej z tych algebr. Każdą z tych algebr będziemy przedłużać do algebr odpowiednio: AN_1, AN_2, AN_3 i AN_4. W tych ostatnich algebrach będziemy interpretować kwantyfikatory. Zmierzać więc będziemy do otrzymania z modeli dla nrz: n_1, n_2, n_3 i n_4 modeli dla nrk odpowiednio: N_1, N_2, N_2', N_3, N_3', N_4 i N_4'. Niech AN będzie symbolem dowolnej z algebr: AN_1, AN_2, AN_3 i AN_4. Niech JN będzie symbolem dowolnego z języków: JN_1, JN_2, JN_3 i JN_4. Niech h będzie funkcją ze zbioru JN w uniwersum odpowiedniej algebry An (a więc JN_1 w uniwersum algebry An_1, ... JN_4 w uniwersum algebry An_4). Dla dowolnej formuły $A \in JN$ przez $\|A,h\|An$ oznaczać będziemy wartość funkcji h formuły A w algebrze An. W wypadku, gdy algebra jest ustalona, symbol wskazujący na algebrę będziemy pomijać i wartość tę oznaczać będziemy przez $\|A,h\|$. Zatem

(d1) $h(A)=\|A,h\|$.

Algebrę An — jak już powiedzieliśmy — przedłużamy w algebrę AN tak, by dla dowolnej formuły $A \in JN$ i dowolnej funkcji ze zbioru JN w uniwersum algebry An wartość $\|A,h\|An$ była określona i by kwantyfikatory miały zamierzony sens. W wypadku AN_1 i AN_2 żądamy, by dla dowolnej formuły $A \in JN_1$ ($A \in JN_2$) i dowolnych zmiennych indywidych a i b oraz dowolnej funkcji h ze zbioru JN_1 (ze zbioru JN_2) spełnione były następujące warunki:

(d2) $\|\bigwedge_a A,h\| = 1$ wtw $\|A(a/b),h\| = 1$,

(d3) $\|\bigvee_a A,h\| = 1$ wtw $\|A,h\| = 1$.

W wypadku AN_3 żądamy, by dla dowolnej formuły $A \in JN_3$ i dowolnej funkcji h ze zbioru JN_3 w An_3 i dowolnych zmiennych indywiduowych a i b spełnione były następujące warunki:

(d4) $\|\bigwedge_a A,h\| \neq 0$ wtw $\|A(a/b),h\| \neq 0$,

(d5) $\|\bigvee_a A,h\| \neq 0$ wtw $\|A,h\| \neq 0$.

W wypadku zaś AN_4 żądamy, by dla dowolnej formuły $A \in JN_4$ i dowolnej funkcji h ze zbioru JN_4 w An_4 i dowolnych zmiennych a i b spełnione były następujące warunki:

(d6) $\|\bigwedge_a A,h\| > 0$ wtw $\|A(a/b),h\| > 0$,

(d7) $\|\bigvee_a A,h\| > 0$ wtw $\|A,h\| > 0$.

Łatwo zauważyć, że zastosowaliśmy tutaj nie tradycyjną, przedmiotową interpretację kwantyfikatorów, a interpretację podstawieniową.

Niech A będzie dowolną formułą języka JN. Dla dowolnej funkcji h ze zbioru JN w algebrę An formuła A wyznacza funkcję, która każdemu elementowi t uniwersum algebry An przyporządkowuje wartość $\|A,h\|An$. Funkcję określoną w zbiorze U, która dla argumentu t przyporządkowuje wartość s oznaczać będziemy symbolem $F_t s$. Każda więc formuła A języka JN wyznacza przy ustalonej funkcji h z JN w uniwersum algebry An funkcję: $F_t \|A,h\|$, gdzie t przebiega uniwersum algebry An.

Operacje algebry AN, które będą odpowiadać w AN kwantyfikatorom $\bigwedge_a$ i $\bigvee_a$ oznaczamy odpowiednio: $\bigwedge U$ i $\bigvee U$ i rozumiemy je jako funkcje określone w zbiorze U^U i przyjmujące wartości w zbiorze U, gdzie U jest uniwersum algebry An. Funkcje te definiujemy następująco:

Dla dowolnej formuły $A \in JN$ i dowolnej funkcji h ze zbioru JN w zbiór U:

(d8) $\bigwedge U\, F_t\|A,h\| = \|\bigwedge_a A,h\|$,

dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An.

(d9) $\bigvee U F_t \|A,h\| = \|\bigvee_a A,h\|$,

dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An.

Pomysł przyporządkowania kwantyfikatorom $\bigwedge_a$ i $\bigvee_a$ operacji odpowiednio $\bigwedge U$ i $\bigvee U$ pochodzi od S. L. Blooma i przedstawiony jest w [Bloom 1971].

7. Interpretacje.

Przez interpretację JN_1 w AN_1 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_1 w AN_1 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_1$:

(1) – (7) definicji interpretacji jn_1 w An_1, ponadto dwa następujące warunki:

(K1) $h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_1,

(K1') $h(\bigvee_a A) = \bigvee U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_1.

Przez interpretację JN_2 w AN_2 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_2 w AN_2 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_2$:

(1) — (9) definicji interpretacji jn_2 w An_2, ponadto dwa następujące warunki:

(K2) $h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_2,

(K2') $h(\bigvee_a A) = \bigvee_a U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_2.

Przez interpretację JN_3 w AN_3 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_3 w AN_3 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_3$:

a) wszystkie warunki nałożone na interpretację jn_3 w An_3, ponadto dwa następujące warunki:

b) (K3) $h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_3,

(K3') $h(\bigvee_a A) = \bigvee U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_3.

Przez interpretację JN_4 w AN_4 rozumiemy dowolną funkcję h z JN_4 w AN_4 spełniającą warunki, dla wszelkich $A, B \in JN_4$:

a) wszelkie warunki nałożone na interpretację jn_4 w An_4, ponadto:

b) (K4) $h(\bigwedge_a A) = \bigwedge U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_4.

(K4') $h(\bigvee_a A) = \bigvee U F_t \|A,h\|$, dla dowolnego $t \in U$, gdzie U jest uniwersum algebry An_4.

8. Przystosowanie aksjomatyk nrk N_1,N_2 i N_2'.

W analogiczny jak w [Żabski 1993c] sposób definiujemy pojęcia: N_1-tautologii, N_2-tautologii, N_2'-tautologii, N_3-tautologii, N_3'-tautologii, N_4-tautologii i N_4'-tautologii. Oczywiste jest, że wszystkie aksjomaty N_1 są N_1-tautologiami. Ze względu na przystosowanie aksjomatyki n_2 w An_2 (dowód tego faktu podany jest w [Żabski 1], by pokazać, że aksjomaty N_2 (N_2') są N_2-tautologiami (N_2'-tautologiami) wystarczy pokazać, że aksjomaty K1 — K4 są N_2-tautologiami (N_2'-tautologiami). Pokażemy to.

Załóżmy, że K1 nie jest N_2-tautologią. Stąd i z definicji N_2-tautologii wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja JN_2 h, że $h(\text{K1}) \neq 1$. Niech AN_2 będzie taką algebrą a h' taką w niej interpretacją JN_2, że $h'(\bigwedge_a A \rightarrow A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(\bigwedge_a A) \dot{-} h'(A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_2

wynika, że (1) $h'(\bigwedge_a A) = 1$ i (2) $h'(A(a/b) \dot{-} 1$. Z (1), (K2), (d8), (d2) i (d1) wynika, że $h'(A(a/b)) = 1$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K2 nie jest N_2-tautologią. Stąd i z definicji N_2-tautologii wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja JN_2 h, że $h(K2) \neq 1$. Niech AN_2' będzie taką algebrą a h' taką w niej interpretacją JN_2, że $h'(A \rightarrow \bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(A) \dot{-} h'(\bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_2 wynika, że (1) $h'(A) = 1$ i (2) $h'(\bigvee_a A) \neq 1$. Z (2), (K2'), (d9), (d3) i (d1) wynika, że $h'(A) \neq 1$, co przeczy (1).

Załóżmy, że K3 nie jest N_2-tautologią. Stąd i z definicji N_2-tautologii wynika, że istnieją AN_2 i taka w niej interpretacja JN_2 h, że $h(K3) \neq 1$. Niech AN_2' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_2, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \bigwedge_a B)) \neq 1$ oraz (1) a nie jest zmienną wolną w A. Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \dot{-} h'(A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_2 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) = 1$ i (3) $h'(A \rightarrow \bigwedge_a B) \neq 1$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B)) \neq 1$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K4 nie jest N_2-tautologią. Stąd i z definicji N_2-tautologii wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja JN_2 h, że $h(K4) \neq 1$. Niech AN_2' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_2, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \rightarrow (\bigvee_a A \rightarrow B)) \neq 1$ i (1) a nie jest zmienną wolną w B. Stąd i z definicji interpretacji JN_2 w AN_2 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \dot{-} h'(\bigvee_a A \rightarrow B) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_2 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) = 1$ i (3) $h'(\bigvee_a A \rightarrow B) \neq 1$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \rightarrow B) \neq 1$, co przeczy (2).

Powyższy dowód jest równocześnie dowodem tego, iż każdy z aksjomatów K1-K4 jest N_2-tautologią.

9. Przystosowanie aksjomatyk N_3 i N_3'.

Pokażemy teraz, że aksjomaty K1 — K4 są N_3-tautologiami (N_3'-tautologiami).

Załóżmy, że K1 nie jest N_3-tautologią. Stąd i z definicji N_3-tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja JN_3 h, że $h(K1) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3, że $h'(\bigwedge_a A \rightarrow A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(\bigwedge_a A) \dot{-} h'(A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_3 wynika, że (1) $h'(\bigwedge_a A) \neq 0$. i (2) $h'(A(a/b)) = 0$. Z (1) i (K3), (d8), (d4) i (d1) wynika, że $h'(A(a/b)) \neq 0$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K2 nie jest N_3-tautologią. Stąd i z definicji N_3-tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja JN_3 h, że $h(K2) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3, że $h'(A \rightarrow \bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(A) \dot{-} h'(\bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_3 wynika (1) $h'(A) \neq 0$, i (2) $h'(\bigvee_a A) = 0$. Z (1), (d1) i (d5) wynika, że $h'(\bigvee_a A) \neq 0$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K3 nie jest N_3-tautologią. Stąd i z definicji N_3-tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja JN_3 h, że $h(\mathrm{K3}) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3, że $h'(\bigwedge_a (A \to B) \to (A \to \bigwedge_a B) \neq 1$ oraz (1) a nie jest zmienną wolną w A. Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \to B)) \dot{-} h'(A \to B) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_3 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \to B)) \neq 0$ i (3) $h'(A \to \bigwedge_a B) = 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \to B)) = 0$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K4 nie jest N_3-tautologią. Stąd i z definicji N_3-tautologii wynika, że istnieją taka AN_3 i taka w niej interpretacja JN_3 h, że $h(\mathrm{K4}) \neq 1$. Niech AN_3' będzie taką algebrą, a h' taką w niej interpretacją JN_3, że $h'(\bigwedge_a (A \to B) \to (\bigvee_a A \to B)) \neq 1$ i (1) a nie jest zmienną wolną w B. Stąd i z definicji interpretacji JN_3 w AN_3 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \to B) \dot{-} h'(\bigvee_a A \to B) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_3 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \to B)$ $\neq 0$ i (3) $h'(\bigvee_a A \to B) = 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \to B)) = 0$, co przeczy (2).

10. Przystosowanie aksjomatyki N_4 i N_4'.

Wykażemy w końcu, że aksjomaty K1 — K4 są N_4-tautologiami (N_4'-tautologiami).

Załóżmy, że K1 nie jest N_4-tautologią. Stąd i z definicji N_4-tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja JN_4 h, że $h(\mathrm{K1}) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4, że $h'(\bigwedge_a A \to A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że $h'(\bigwedge_a A) \dot{-} h'(A(a/b)) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_4 wynika (1) $h'(\bigwedge_a A) > 0$, i (2) $h'(A(a/b)) \leq 0$. Z (1), (K4), (d8), (d6) i (d1) wynika, że $h'(A(a/b)) > 0$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K2 nie jest N_4-tautologią. Stąd i z definicji N_4-tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja JN_4 h, że $h(\mathrm{K2}) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4, że $h'(A \to \bigvee_a A) \neq 1$. Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że $h'(A) \dot{-} h'(\bigvee_a A)) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_4 wynika, (1) $h'(A) > 0$ i (2) $h'(\bigvee_a A) \leq 0$. Z (1), (d1) i (d7) wynika, że $h'(\bigvee_a A) \leq 0$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K3 nie jest N_4-tautologią. Stąd i z definicji N_4-tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja JN_4 h, że $h(\mathrm{K3}) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4, że $h'(\bigwedge_a (A \to B) \to (A \to \bigwedge_a B)) \neq 1$ oraz (1) a nie jest zmienną wolną w A. Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \to B) \dot{-} h'(A \to B) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_4 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A \to B)) > 0$ i (3) $h'(A \to \bigwedge_a B) \leq 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A \to B)) \leq 0$, co przeczy (2).

Załóżmy, że K4 nie jest N_4-tautologią. Stąd i z definicji N_4-tautologii wynika, że istnieją taka AN_4 i taka w niej interpretacja JN_4 h, że $h(\mathrm{K4}) \neq 1$. Niech AN_4' będzie taką strukturą, a h' taką w niej interpretacją JN_4, że $h'(\bigwedge_a (A \to B) \to (\bigvee_a A \to B)) \neq 1$ i (1) a nie jest zmienną wolną w B. Stąd i z definicji interpretacji JN_4 w AN_4 wynika, że

$h'(\bigwedge_a (A\to A) \dot{-} h'(\bigvee_a A\to B) \neq 1$. Stąd i z definicji $\dot{-}$ w AN_4 wynika (2) $h'(\bigwedge_a (A\to B))>0$ i (3) $h'(\bigvee_a A\to B)\leq 0$. Z (1) i (3) wynika, że $h'(\bigwedge_a (A\to B))\leq 0$, co przeczy (2).

Można zatem przyjąć, że wykazaliśmy, iż każda teza nrk: N_1, N_2, N_2', N_3, N_3', N_4, N_4' jest tautologią odpowiednio: N_1, N_2, N_2', N_3, N_3', N_4 i N_4'.

11. Pełność nrk.

Wykażemy teraz, że każda N_2-tautologią jest tezą N_2. Dowód będzie analogiczny do dowodu twierdzenia o pełności nrz n_2 przedstawionego w [Żabski 1993c].

Z JN_2 tworzymy najpierw algebrę formuł JN_2 traktując każdy z n-argumentowych spójników tego języka jako n-argumentowe operacje, a kwantyfikatory — jako jednoargumentowe operacje, przyjmując nadto, że $1 = A$ wtw A jest tezą N_2 oraz $0 = \sim TA$ wtw A jest tezą N_2. Otrzymaną w ten sposób algebrę oznaczamy symbolem AK_2. Zatem

$AK_2 = (JN_2, \vee, \wedge, \sim, 0, 1, \to, \equiv, T, F, N, \bigwedge_a, \bigvee_a)$.

Załóżmy, że (1) AN_2 jest algebrą podaną w [Żabski 1993c] jako przykład An_2, tzn., że U jest uniwersum tej algebry i $U = \{0,-1,1\}$. An_2' rozszerzmy w opisany powyżej sposób do algebry AN_2', tzn.

$AN_2' = (\{0,-1, 1\}, \cup, \cap, ', 0, 1, \dot{-}, \dot{+}, t, f, n, \bigwedge U, \bigvee U)$.

Załóżmy, że (2) h jest homomorfizmem AK_2 na AN_2' oraz (3) $\approx$ jest relacją określoną w zbiorze JN_2 zdefiniowaną następująco: $A\approx B$ wtw $h(A) = h(B)$, oraz (4) $AN_2|\approx$ jest algebrą ilorazową algebry AK_2, tzn.:

$AK_2|\approx = (JN_2|\approx, \vee^*, \wedge^*, \sim^*, 0, 1, \to^*, \equiv^*, T^*, F^*, N^*, \bigvee_a{}^*, \bigwedge_a{}^*)$, gdzie: $JN_2|\approx$ jest zbiorem wszystkich klas abstrakcji relacji $\approx$ w zbiorze JN_2 (klasę abstrakcji wyznaczona przez dowolny element $A\in JN_2$ oznaczać będziemy symbolem $|A|$), operacje zaś algebry AN_2 są zdefiniowane następująco:

$|A| \vee^* |B| = |A\vee B|$, $|A|\wedge^* |B| = |A\wedge B|$, $\sim^*|A| = |\sim A|$, $0 = |\sim TA|$ wtw A jest tezą N_2, $1 = |A|$ wtw A jest tezą N_2, $|A| \to^* |B| = |A\to A|$, $|A| \equiv^* |A| = |A\equiv A|$, $T^* |A| = |TA|$, $F^* |A| = |FA|$, $N^* |A| = |NA|$, $\bigwedge_a{}^* |A| = |\bigwedge_a A|$, $\bigvee_a{}^* |A| = |\bigvee_a A|$.

Przypominamy następujące twierdzenie algebry ogólnej:

Jeśli h jest homomorfizmem algebry A na algebrę B, to relacja $\approx$ określona w zbiorze A w następujący sposób:

$a\approx b$ wtw $h(a) = h(b)$, jest kongruencją algebry A oraz algebra ilorazowa $A|\approx$ jest izomorficzna z algebrą B. Funkcja: g: $A|\approx\to B$ określona wzorem $g(|a|) = h(a)$, dla każdego $a\in A$ ustala izomorfizm między algebrami $A|\approx$ i B.

Z powyższego twierdzenia oraz (1), (2), (3) i (4) wynika (5) $AK_2|\approx$ jest jedną z AN_2. Załóżmy teraz, że (6) A jest N_2-tautologią i — dla dowodu niewprost — że (7) A nie jest tezą N_2. Z (7) i z określenia 1 w $AK_2|\approx$ wynika (8) $1 \neq |A|$. Niech q będzie interpretacją JN_2 w $AK_2|\approx$ taką, że $g(A) = |A|$. Stąd i z (8) wynika, że $g(A) \neq 1$. Stąd i z (5) wynika, że istnieją taka AN_2 i taka w niej interpretacja JN_2 h, że $h(A) \neq 1$. Stąd i z definicji N_2-tautologii wynika, że A nie jest N_2-tautologią, co przeczy (6) i kończy dowód twierdzenia, że każda N_2-tautologia jest tezą N_2.

Analogicznie można wykazać pełność każdego z pozostałych omawianych w tej pracy rachunków.

Bibliografia

Bloom, S. L.,

1971 — „A completeness theorem for «Theories of kind W»", Studia Logica 27 s. 43-55.

Żabski, E.,

1992 — „O nihilistycznym rachunku kwantyfikatorów raz jeszcze", *Ruch filozoficzny*, tom XLIX, nr 4, s. 5-12.

1993a — „O innej logice nihilistycznej". *Ruch Filozoficzny*, tom L, nr 3, s. 296-311.

1993b — „O jeszcze innej logice nihilistycznej", *Ruch Filozoficzny*, tom L, nr 4, s. 415-429.

1993c — „Algebraiczna semantyka dla nihilistycznych rachunków zdań", *Filozofia Nauki*, rok I, nr 4.