Filozofia Nauki
Rok II, 1994, Nr 3-4(7-8)

Krzysztof Wójtowicz

Czy matematyka jest niezbędna w nauce?

Wydana w roku 1980 książka Hartry'ego Fielda *Science without Numbers* wzbudziła wiele kontrowersji (por. np. [8], [11]), zyskała nawet miano *prowokacyjnej* [10]. W niniejszej pracy najpierw przedstawiam możliwie wiernie i bez komentarzy, choć z konieczności pobieżnie, koncepcję Fielda. W części drugiej zestawiam pytania, które moim zdaniem nasuwa program Fielda, i staram się na nie przynajmniej w części odpowiedzieć.

1. Koncepcja Fielda

Rozważania Fielda koncentrują się wokół problemów prawdziwości matematyki i jej stosowalności przy opisie świata, które Field uważa za centralne dla filozofii matematyki. Tradycyjnie uważa się, że stosowalność matematyki jest ściśle związana z jej prawdziwością. Field wykazuje, że stosowalność nie musi zakładać prawdziwości. Istotną bowiem ze względu na zastosowania cechą matematyki jest jej nietwórczość, którą Field uważa za własność jedynie nieco silniejszą od niesprzeczności, ale «odległą» od prawdziwości.

Najpoważniejszym argumentem na rzecz platonizmu (*vel* realizmu) w matematyce jest argument «z niezbędności» (*indispensability argument*) Quine'a-Putnama. W myśl tego argumentu, z faktu, że matematyka daje się (bardzo skutecznie) zastosować w opisie świata, wynika, że musi mieć ona przedmiot badań, o którym prawdziwie orzeka. Celem Fielda jest podważenie tego argumentu, a zatem podważenie realistycznej koncepcji matematyki. Obiera on tu inną drogę niż np. Chihara, który w swojej wersji nominalizmu (por. [3]) próbował interpretować matematykę jako naukę o obiektach językowych. Odrzuca też koncepcje nominalistyczne, które interpretują matematykę jako naukę o obiektach, czy też stanach mentalnych — koncepcje te bowiem, podobnie jak koncepcja Chihary, nie są w stanie wyjaśnić faktu stosowalności matematyki w opisie świata.

Celem Fielda nie jest jednak podanie argumentu pozytywnego na rzecz nominalizmu. Jak sam pisze, „...monografia ta nie zawiera argumentów pozytywnych na rzecz nominalizmu. Celem moim jest raczej próba podważenia najważniejszych argumentów wysuwanych przeciwko stanowisku nominalistycznemu"[1]. Ma to istotne konsekwencje metodologiczne. Ponieważ celem Fielda nie jest uzasadnienie nominalistycznej koncepcji, niektóre jego rozumowania są prowadzone «realistycznie». Sądzi on bowiem, że jeśliby wewnątrz realistycznej koncepcji matematyki dało się wykazać zbędność obiektów abstrakcyjnych w naukach przyrodniczych, to argument «z niezbędności» musiałby upaść. Jak pisze Field „wynika stąd, że platonizm zostaje pozbawiony podstaw: implikuje on bowiem niemożność swojego uzasadnienia"[2].

W nauce (w szczególności w fizyce) obiekty matematyczne mają inny status niż obiekty teoretyczne. Teorie, w których występują obiekty teoretyczne są twórczymi rozszerzeniami teorii nominalistycznych. Inaczej jest w wypadku obiektów matematycznych, gdyż przy użyciu teorii matematycznej nie można wyrazić więcej niż w samej tylko teorii nominalistycznej. Oczywiście, aby stwierdzenie to nie było jedynie tautologią, musimy założyć istnienie «złożonych» (*impure*) obiektów abstrakcyjnych, np. takich, jak funkcja ze zbioru obiektów fizycznych w obiekty ściśle abstrakcyjne (*pure abstract entities*). Są one niezbędne do tworzenie «praw pomostowych» (*bridge laws*), które łączą obiekty fizyczne z obiektami matematycznymi. Jednakże teoria matematyczna, odwołująca się do złożonych obiektów abstrakcyjnych jest nietwórczym rozszerzeniem teorii nominalistycznej w tym sensie, że nie pozwala na udowodnienie żadnych twierdzeń nominalistycznych niedowodliwych w teorii nominalistycznej. Ścisłe sformułowanie tej zasady ma następującą postać ([5], s.12):

Zasada C: Niech S będzie teorią matematyczną, N teorią nominalistyczną, A — zdaniem nominalistycznym. Jeśli A^* nie jest konsekwencją N^*, to A^* nie jest konsekwencją $N^*+ S$[3].

Dowód: Załóżmy, że nie jest prawdą, że $N^* \Rightarrow A^*$. Zatem N^* + non-A^* jest niesprzeczne. *A priori* zatem mogłoby się zdarzyć, że tak właśnie jest. Jeżeli jednak $N^* + S \Rightarrow A^*$, to wówczas prawdziwość teorii matematycznej S zależałaby od stanu świata, co jest sprzeczne z faktem, że teorie matematyczne są prawdziwe *a priori*, a

[1] „...Nothing in this monograph purports to be a positive argument for nominalism. My goal rather is to try to counter the most compelling arguments that have been offered against the nominalist position" ([5], s.4).

[2] „The upshot then [...] is that platonism is left in an unstable position: it entails its own unjustifiability." ([5], s.6).

[3] Dla danego języka nominalistycznego tworzymy zdania A^* w sposób następujący: najpierw wprowadzamy nowy predykat $M(x)$, który oznacza, że x jest obiektem matematycznym. Zdanie A^* powstaje ze zdania A przez ograniczenie zakresu kwantyfikatorów do obiektów x spełniających non-$M(x)$ ([5], s.10).

zatem we wszystkich możliwych światach. Teoria $N^* + S$ jest więc nietwórczym rozszerzeniem teorii N^*.

Mogłoby się oczywiście zdarzyć, że teoria matematyczna S jest sprzeczna. Z teorii $N^* + S$ można byłoby wtedy wyciągnąć dowolny wniosek, i wówczas teoria matematyczna nie byłaby już nietwórczym rozszerzeniem teorii nominalistycznej. Teorie sprzeczne nie są jednak interesujące; dowód zaś, że standardowa matematyka jest sprzeczna byłby raczej zaskakujący. Jak pisze Field : „*Dobra* matematyka jest nietwórcza; odkrycie, że akceptowana obecnie matematyka nie jest nietwórcza byłoby odkryciem, że nie jest dobra"[4]. Z faktu, że każda dobra teoria matematyczna jest nietwórcza wynika natychmiast, że nie ma znaczenia, jakiej teorii matematycznej użyjemy w naszych rozumowaniach; jedynym warunkiem jest to, aby spełniała ona zasadę C. Otrzymane przez nas wnioski będą zawsze takie same; co najwyżej niektóre teorie mogą się okazać «wygodniejsze». W szczególności teorie ZFC, ZFC + CH, ZFC + non-CH[5] są równoważne, ze względu na ich nominalistyczne konsekwencje; może się jedynie zdarzyć, że któraś z nich będzie bardziej użyteczna z punktu widzenia ekonomiczności prowadzonych rozumowań.

Field ilustruje ogólną metodę stosowania matematyki i jej użyteczności posługując się przykładem arytmetyki i geometrii euklidesowej. Najogólniej rzecz biorąc, aby zastosować teorię matematyczną należy utworzyć «abstrakcyjne odpowiedniki» (*abstract counterparts*) zdań nominalistycznych. Oto jego słowa: „kluczem do stosowania teorii matematycznej S jako narzędzia w wyciąganiu wniosków z teorii nominalistycznej N jest wykazanie w teorii $N^* + S$ równoważności zdań z N^* z pewnym innym zdaniem (będę je nazywał *abstrakcyjnym odpowiednikiem* zdania z N^*), w którym kwantyfikacja odbywa się po obiektach abstrakcyjnych"[6]. Prowadzenie rozumowań w teorii matematycznej jest wskazane ze względu na ekonomię myślenia, zaś otrzymane wnioski są następnie tłumaczone na język nominalistyczny. Ponieważ używana przez nas matematyka jest nietwórcza (spełnia zasadę C), zatem uzyskamy w ten sposób jedynie te wnioski, które można uzyskać na drodze rozumowań czysto nominalistycznych.

Rozważania na temat konkretnego, nominalistycznego sformułowania teorii fizycznych Field poprzedza uwagami na temat założeń dotyczących struktury przestrzeni fizycznej, które powinien przyjąć nominalista. Jeśli nominalista odrzuca obiekty abstrakcyjne, a jednocześnie chce uwzględnić duże znaczenie pojęcia pola we współczesnej fizyce, to musi on zaakceptować istnienie punktów i obszarów czasoprze-

---

[4] „Good mathematics is conservative; a discovery that accepted mathematics isn't conservative would be a discovery that it isn't good" ([5], s.13).

[5] ZFC oznacza teorię mnogości Zermela-Fraenkla, CH hipotezę *continuum*.

[6] „...the key to using a mathematical system S as an aid to drawing conclusions from a nominalistic system N lies in proving in $N^* + S$ the equivalence of a statement in N^* alone with some other statement (which I'll call an *abstract counterpart* of the statement in N^*) which quantifies over abstract entities." ([5], s.20).

strzeni jako odrębnych bytów. Field akceptuje zatem substancjalizm, zaś ewentualne obiekcje dotyczące założenia o istnieniu obszarów czasoprzestrzeni (w czym *de facto* zawiera się też założenie o istnieniu obiektów nieskończonych) nazywa „quasi-finitystycznymi", a nie „nominalistycznymi".

Dlaczego jednak nominalistyczne sformułowanie teorii fizycznych miałoby mieć przewagę nad platonistycznym? Według Fielda są tego dwa istotne powody. Po pierwsze, syntetyczne sformułowania nominalistyczne nie odwołują się do abstrakcyjnych, nie związanych przyczynowo z przedmiotem wyjaśniania obiektów matematycznych. Po drugie, ujęcie syntetyczne pomaga zrozumieć, „co się tak naprawdę dzieje", czyli jakie mechanizmy leżą tak naprawdę u podłoża wyjaśnianych zjawisk[7]. Jest to zgodne z zasadą metodologiczną „*u podłoża każdego dobrego zewnętrznego wyjaśnienia leży wewnętrzne wyjaśnienie*"[8], przyjętą przez Fielda. Na wzór syntetycznej geometrii Hilberta, Field podaje syntetyczne sformułowanie teorii czasoprzestrzeni Newtona. Do przyjętych przez Hilberta predykatów „Bet" (trójargumentowy predykat „leżenia między"), „Cong" (czteroargumentowy predykat wyrażający przystawanie odcinków) i „A-Cong" (sześcioargumentowy predykat wyrażający przystawanie kątów) — Field dodaje nowe predykaty: dwuargumentowy „Simul", wyrażający jednoczesność zdarzeń i czteroargumentowy „S-Cong" wyrażający przystawanie przestrzenne odcinków (o tej własności, że *xy* S-Cong *zw* zawsze i tylko wtedy, gdy *x* jest równoczesne z *y* oraz *z* jest równoczesne z *w*). W modelu Fielda zachodzi wówczas podobne twierdzenie o reprezentacji, jak w modelu Hilberta. Rozszerzeniem teorii czasoprzestrzeni jest teoria uwzględniająca istnienie wielkości skalarnych, takich jak temperatura czy potencjał pola. Teoria taka powstaje przez rozszerzenie teorii czasoprzestrzeni o dodatkowe predykaty: trójargumentowy „Temp-Bet" („*x* Temp-Bet *yz*" znaczy, że temperatura punktu *x* leży pomiędzy temperaturą punktu *y*, a temperaturą punktu *z*) oraz czteroargumentowy „Temp-Cong" („*xy* Temp-Cong *zw*" znaczy, że różnice temperatur w punktach *x*, *y* oraz w punktach *z*, *w*, są takie same). Dla tej teorii również zachodzi twierdzenie o reprezentacji.

Kolejnym krokiem jest syntetyczne sformułowanie teorii grawitacji Newtona w płaskiej, czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Field rozpoczyna od zdefiniowania obszarów bazowych (*temperature-basic* oraz *spatio-temporally basic*). Są to przeciwobrazy odcinków i półprostych otwartych przy odwzorowaniach reprezentujących temperaturę i współrzędne czasoprzestrzenne. To umożliwia zdefiniowanie pojęcia ciągłości funkcji skalarnych (w szczególności temperatury). Dalej Field definiuje syntetycznie takie pojęcia matematyczne, jak „pochodna kierunkowa", „pochodne wyższych rzędów", „operator Laplace'a", „równanie Poissona", „iloczyn skalarny w R^2", „gradienty" i „różniczkowanie pól wektorowych w R^n". Rozdział poświęcony syntetyczne-

[7] „[It explains] what is going on without appeal to extraneous, causally irrelevant entities" ([5], s.44).

[8] „Underlying every good extrinsic explanation there is an intrinsic explanation" ([5], s.44).

mu sformułowaniu teorii grawitacji Newtona Field zamyka uwagą, że aparat matematyczny jest wprawdzie niezbędny w praktyce (ze względu na wygodę), ale nie jest niczym więcej, jak tylko użytecznym instrumentem, który nie pozwala na istotne wzbogacenie wiedzy.

2. Dyskusja

Koncepcja Fielda ma daleko idące konsekwencje filozoficzne. Nie jest ona jednak zbyt precyzyjnie sformułowana, składa się raczej z postulatów i deklaracji. Stąd też wynika pewna trudność w prowadzeniu polemiki z Fieldem.

2.1. Co Field rozumie pod pojęciem „matematyki"?

Główna teza Fielda dotyczy nietwórczości matematyki. Nigdzie nie podaje on jednak ścisłej definicji tego, co to jest teoria matematyczna. W swojej pracy Field wyróżnia obiekty abstrakcyjne «czyste» (*pure* — będę je nazywał „obiektami ściśle abstrakcyjnymi") i złożone (*impure abstract entities*). W myśl jego koncepcji można zatem wyróżnić trzy rodzaje teorii naukowych: teorie czysto nominalistyczne, teorie, w których występują złożone obiekty abstrakcyjne i teorie, w których występują jedynie obiekty ściśle abstrakcyjne. Powstaje pytanie: czy teorie matematyczne u Fielda to teorie jedynie tego trzeciego rodzaju? Czy teorie, w których występują złożone obiekty abstrakcyjne należą do matematyki, czy nie? Które teorie są według Fielda nietwórcze w stosunku do których? Teorie drugiego i trzeciego rodzaju (a więc takie, w których występują jakiekolwiek obiekty abstrakcyjne) będę dalej nazywać „teoriami matematycznymi". Teza Fielda głosi zatem, jak sądzę, że te teorie są nietwórczymi rozszerzeniami teorii nominalistycznych.

2.2. Zagadnienie przekładu

Istotnym punktem stanowiska Fielda jest twierdzenie o reprezentacji, które umożliwia dokonywanie przekładu zdań nominalistycznych na zdania o obiektach abstrakcyjnych (*abstract counterparts*), a następnie, po przeprowadzeniu rozumowań w odpowiedniej teorii matematycznej, tłumaczenie otrzymanych wniosków na język nominalistyczny. Field nie precyzuje, jak taki ewentualny przekład miałby wyglądać, stwierdza jedynie jego istnienie. Warto tu zastanowić się nad kilkoma sprawami. Czy istnieje j e d n a nauka nominalistyczna N i j e d n a matematyka M, i przekład jest po prostu pewną funkcją ϕ z N w M? Wydaje się, że raczej tak nie jest. Takie założenie byłoby bowiem zbyt dużym uproszczeniem — fizyka nie jest jedną teorią, a wiara w możliwość unifikacji praw fizyki może się okazać przejawem nadmiernego optymizmu. Należy zatem założyć istnienie takiego przekładu ϕ dla każdej nominalistycznej teorii fizycznej N_i. Co więcej, wydaje się, że taki przekład zależy również od określonej teorii matematycznej, którą stosujemy w danej dyscyplinie nauki (na przykład teorię przestrzeni Hilberta w mechanice kwantowej, a geometrię różniczkową w kosmologii). Należałoby więc raczej założyć istnienie różnych przekładów ϕ_{ij}: $N_i \rightarrow M_j$, zależnie od badanej nominalistycznej teorii fizycznej N_i i używanej do tego celu teorii matematycznej M_j. Skoro tak, to pojawia się tu od razu kilka pytań. Czy przekład z danej teorii N_i w daną teorię M_j jest zawsze jedyny? Skąd wiadomo, że daną teorię N_i należy tłumaczyć na teorię matematyczną M_j, a nie na inną teorię matematyczną M_k? Czy nie jest tak, że o tym, czy dany przekład jest dobry, możemy się przekonać jedynie przez równoległe, «nominalistyczne» rekonstruowanie rozumowań prowadzonych w teorii matematycznej, a następnie stwierdzenie, że w dostatecznej liczbie przypadków rozumowania te dają ten sam wynik? Czy istnieje rozsądne kryterium, jak długo należy sprawdzać dane tłumaczenie, aby je zaakceptować? Można oczywiście powiedzieć, że jest to podobny problem, jak przy uznaniu opisu danego zjawiska fizycznego za właściwy. Jest jednak — moim zdaniem — istotna różnica pomiędzy sprawdzaniem, czy wyniki doświadczenia są zgodne z danym modelem, a sprawdzaniem, czy dane rozumowanie da się zrekonstruować w innej teorii.

Poza przekładem ϕ (czy też raczej przekładami ϕ_{ij}) musimy mieć też przekład ψ z teorii matematycznej w teorię nominalistyczną. Podobnie jak w wypadku ϕ nie będzie to jeden, uniwersalny przekład, ale raczej cała grupa przekładów ψ_{ji}: $M_j \rightarrow N_i$. O ile przekład ϕ polegał na tworzeniu abstrakcyjnych odpowiedników zdań nominalistycznych, o tyle przekład ψ polega na tworzeniu nominalistycznych odpowiedników zdań matematycznych. Rodzi się tu od razu następujące pytanie: czy każde zdanie matematyczne ma swój nominalistyczny odpowiednik? Jest to równoważne pytaniu: czy każde zdanie matematyczne (danej teorii) jest abstrakcyjnym odpowiednikiem jakiegoś zdania nominalistycznego? Jeżeli każde zdanie matematyczne jest odpowiednikiem jakiegoś zdania nominalistycznego, to rozumowania matematyczne i nominalistyczne niczym się nie różnią, i dowody w tych teoriach są tak samo skomplikowane — po prostu każdy krok dowodowy w teorii matematycznej odpowiada jednemu krokowi dowodowemu w teorii nominalistycznej. Wniosek ten nie odpowiada chyba intencjom Fielda, który często podkreśla, że rozumowania matematyczne są znacznie prostsze niż odpowiednie rozumowania nominalistyczne.

Aby uchronić się przed tego typu konsekwencjami można na dwa sposoby odpowiedzieć na pytanie o nominalistyczne odpowiedniki zdań matematycznych.

Można np. stwierdzić, że wprawdzie każde zdanie matematyczne jest abstrakcyjnym odpowiednikiem zdania nominalistycznego, ale dowody dlatego różnią się stopniem komplikacji, że reguły wnioskowania w teorii nominalistycznej są znacznie słabsze, więc nie można «iść na skróty», jak w rozumowaniach matematycznych. Języki są zatem podobne («izomorficzne»), gdyż istnieją odpowiednie przekłady ϕ i ψ, ale reguły wnioskowania są inne — czyli inna jest logika nominalistyczna, a inna jest logika rozumowań matematycznych, przy czym logika nominalistyczna jest znacznie słabsza. Jest to jednak bardzo sztuczne założenie, zwłaszcza w świetle tego, że Field dopuszcza w teoriach nominalistycznych logiki mocniejsze niż logika pierwszego rzędu.

Innym wyjaśnieniem różnicy w stopniu komplikacji dowodów mogłoby być uznanie tezy, że rozumowania nominalistyczne są bardzo pedantyczne, brak w nich skrótów myślowych, których pełno jest w matematyce. Przypomnijmy w tym kontekście program bourbakistów, którzy postawili sobie za cel rekonstrukcję dowodów matematycznych w sposób absolutnie ścisły, pozbawiony luk i skrótów. Dowody matematyczne znacznie się wtedy wydłużają[9]. Rozumowania nominalistyczne tak naprawdę dlatego są więc skomplikowane, że są absolutnie precyzyjne (tak, jak dowody bourbakistów); matematyka zaś ułatwia uprawianie nauki dlatego, że matematycy mają już praktykę w prowadzeniu dowodów niekompletnych, pełnych luk i skrótów. Innymi słowy, tak naprawdę jedynym powodem, dla którego matematyka ułatwia uprawianie nauki, jest mała dbałość matematyków o precyzję rozumowań. Wniosek ten jest, jak mi się wydaje, co najmniej zaskakujący. Być może zatem chodzi tu po prostu o to, że jednak nie każde zdanie matematyczne posiada swój odpowiednik nominalistyczny.

Pojawia się tu pewien nowy problem. Jeżeli założymy, że tylko część matematyki, nazwijmy ją A, zawiera abstrakcyjne odpowiedniki zdań nominalistycznych, to jak interpretować dowody matematyczne, w których wychodząc z założeń $\alpha \subseteq A$ dowodzimy tezy $\beta \in A$, posługując się po drodze twierdzeniami wykraczającymi poza A? Czy takie dowody mają swoje nominalistyczne odpowiedniki? Przecież dowód matematyczny, będący po prostu tłumaczeniem dowodu nominalistycznego, powinien zawierać się w A. Rozważmy jednak takie pary $\{\alpha, \beta\}$ ($\alpha \subseteq A$, $\beta \in A$), dla których nie istnieje dowód β z przesłanek α wewnątrz A. Czy takie pary istnieją? O tyle trudno jest odpowiedzieć na to pytanie, że nie wiadomo, jak wyglądają przekłady ϕ i ψ, i co to jest dokładnie zbiór A. W matematyce znane są jednak liczne przykłady zdań, których nie da się udowodnić w słabszej teorii (pomimo iż zdania te dadzą się w języku tej teorii wypowiedzieć), ale dają się udowodnić w teorii silniejszej (przykład takiego zdania, w nieco innym kontekście zostanie podany później).

Sytuacja, w której każdy dowód β z przesłanek α wymagałby użycia zdań spoza A, byłaby niezwykle kłopotliwa z punktu widzenia koncepcji Fielda. Wymagałaby ona uznania, że matematyka wykraczająca poza A jest zła, ponieważ nie jest nietwórcza, zgodnie z zasadą *„dobra matematyka jest nietwórcza"*. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że istnieje też druga odpowiedź na pytanie o status dowodów wykraczających poza A. Odpowiedź ta brzmi: takich dowodów nie ma, ponieważ tak się szczęśliwie składa, że część matematyki odpowiadająca zdaniom nominalistycznym jest «zamknięta na dowody» — to znaczy, jeżeli tylko istnieje matematyczny dowód zdania $\beta \in A$ z

[9] Program bourbakistów odegrał istotną rolę w matematyce dwudziestego wieku. Jednak ocena tego programu nie jest jednoznaczna w środowisku matematyków. Zarzuca się mu sprowadzenie działalności matematycznej do pozbawionych prawdziwej matematycznej treści, pedantycznych przekształceń formalnych. Program zrekonstruowania całej wiedzy matematycznej w «idealnym», absolutnie precyzyjnym języku matematycznym, w którym każdy, nawet najprostszy krok dowodowy byłby uwzględniony, nie został wykonany. Można jednak zastanawiać się, czy jedynie z przyczyn technicznych, czy może głębszych.

przesłanek $\alpha \subseteq A$, to istnieje również taki dowód wewnątrz A. Wtedy również łatwo jest wytłumaczyć fakt, że dowody matematyczne są znacznie prostsze. Po prostu, zamiast prowadzić skomplikowane (bo odpowiadające nominalistycznym) rozumowania wewnątrz A, zaoszczędzamy sobie pracy, prowadząc krótszy dowód, który będzie jednak wykraczał poza A. Matematyka leżąca poza A jest o tyle dobra, o ile dla prowadzonych tam dowodów istnieją odpowiadające im dowody wewnątrz A. Trudno jest rozstrzygnąć, czy założenie to jest sensowne i czy ma ono cokolwiek wspólnego z praktyką matematyczną. Jednakże wydaje się, że przyjęcie takiego założenia jest mimo wszystko lepsze, niż stwierdzenie, że cała reszta matematyki jest po prostu złą matematyką. Ocena teorii naukowych pod względem ich zgodności z daną koncepcją filozoficzną (w tym wypadku z koncepcją nominalistyczną), a nie pod względem ich przydatności w wyjaśnianiu świata, nie jest dobrą praktyką. W każdym razie, wydaje się, że zasada *„dobra matematyka jest nietwórcza"* przypomina taki właśnie sposób ocenianiania nauki.

Czy rozważania powyższe, które mają raczej charakter wywołanych przez koncepcję Fielda impresji, można doprecyzować? Na pewno istotnym problemem jest tu struktura przekładów ϕ_{ij} i ψ_{ji}, jak również pytanie o zakres A. Czy nie należałoby zamiast jednego takiego zbioru rozpatrywać całej klasy zbiorów A_{ij}, które odpowiadałyby abstrakcyjnym odpowiednikom zdań teorii N_i w teorii M_j? Czy wówczas A[10] byłoby po prostu sumą zbiorów A_{ij} po wszystkich i, j? Czy przekłady ϕ_{ij} (ψ_{ji}) i ϕ_{kl} (ψ_{lk}) są «podobne», jeżeli «podobne» są odpowiednio teorie N_i, N_k oraz M_j i M_l? Czy pojęcia „podobieństwa teorii" i „podobieństwa przekładów" można jakoś uściślić? Czy przekład ϕ_{kl} jest rozszerzeniem przekładu ϕ_{ij}, jeżeli teoria N_k jest rozszerzeniem teorii N_i, zaś teoria M_l jest rozszerzeniem teorii M_j? Podobnych pytań można postawić wiele.

2.3. Pytania o zupełność

Rozważmy pewien sztuczny, wyjątkowo prosty przykład «teorii nominalistycznej». Składa się ona z dwóch aksjomatów:

(i) co sekundę wykonuję krok w przód;

(ii) po wykonaniu kroku znajduję się w innym miejscu niż poprzednio.

Interesuje nas problem, czy kiedykolwiek znajdę się dwa razy w tym samym miejscu. Dokonajmy «przekładu» tej teorii na teorię grup. Niech g będzie generatorem takiej grupy (np. 1 jest generatorem grupy liczb całkowitych z działaniem dodawania). Miejsce, w którym się aktualnie znajdujemy jest reprezentowane przez element grupy, zaś wykonanie kroku jest reprezentowane przez pomnożenie tego elementu przez g (np. w wypadku grupy liczb całkowitych nasze położenie reprezentuje liczba całkowita, zaś wykonaniu kroku odpowiada dodanie liczby 1 do tej liczby). Pytanie, czy można

[10] A należałoby w tej sytuacji rozumieć jako „abstrakcyjne odpowiedniki zdań nominalistycznych w całej matematyce", co jest bardzo nieprecyzyjne. Nie widać jednak, jak sensownie określić zakres A.

znaleźć się dwa razy w tym samym miejscu, jest pytaniem o to, czy istnieje takie n, że $gn = e$ (w chwili początkowej nasze położenie opisane było przez element neutralny e grupy; w wypadku grupy liczb całkowitych z dodawaniem nasze pytanie brzmi: czy istnieje takie n, że $1+1+...+1 = 0$?). Jest to oczywiście pytanie o to, czy grupa G reprezentująca nasz spacer jest cykliczna, czy nie.

Grupa liczb całkowitych nie jest cykliczna, ale istnieją oczywiście grupy cykliczne. Jak zatem mamy dowiedzieć się, czy dana reprezentacja jest dobra, czy nie? Musimy sprawdzić, jaki jest stan faktyczny, to znaczy, czy nasz spacer odbywa się po nieskończonej płaszczyźnie (wtedy właściwą reprezentacją jest grupa niecykliczna, na przykład grupa liczb całkowitych z dodawaniem), czy też może spacerujemy po równiku kuli (wtedy powinniśmy wybrać grupę cykliczną: na przykład grupę Z_p, czyli grupę liczb całkowitych z dodawaniem modulo p). Być może poruszamy się po jeszcze bardziej skomplikowanej powierzchni, na przykład po torusie, i wtedy należy obrać jeszcze inną reprezentację. Zwróćmy tu uwagę na pewien prosty fakt: jeżeli poruszamy się po płaszczyźnie, to reprezentacja ruchu za pomocą grupy cyklicznej jest niewłaściwa; w szczególności prowadzi do sprzecznego z doświadczeniem wniosku, że możemy znaleźć się dwa razy w tym samym miejscu. Czy znaczy to jednak, że teoria grup cyklicznych jest twórczym rozszerzeniem teorii nominalistycznej, a zatem jest złą, skazaną na wykluczenie z grona «dobrych teorii» teorią matematyczną? Wydaje się, że wniosek taki byłby nieco przedwczesny. Teoria grup cyklicznych jest w tym konkretnym przypadku niewłaściwa, ale w innym przypadku mogłaby się okazać dobra.

Przypomnijmy tutaj rozumowanie uzasadniające zasadę *C* ([5], s.13). Field twierdzi, że jeżeli teoria nominalistyczna nie rozstrzyga pewnego zdania γ, zaś teoria matematyczna rozstrzyga to zdanie, to prawdziwość tej teorii matematycznej jest zależna od stanu świata, to znaczy od tego, czy tak naprawdę nie jest non-γ w sytuacji, kiedy teoria matematyczna dowodzi γ. To zaś znaczyłoby, że niespełnienie zasady *C* sprawia, że matematyka nie mogłaby być prawdziwa «we wszystkich możliwych światach». Jeżeli jednak przyjmiemy założenie, że matematyka jest prawdziwa we wszystkich możliwych światach, czyli *a priori*, to konsekwentnie musimy uznać zasadę *C*. Jednakże w wypadku sformułowanej powyżej teorii nominalistycznej zasada ta w ewidentny sposób nie jest spełniona. Jakie są możliwe rozwiązania tego problemu?

Możemy np. stwierdzić, że teoria grup cyklicznych nie spełnia zasady *C*, więc jest częścią złej matematyki (w sytuacji, kiedy poruszamy się po płaszczyźnie, i reprezentacja ruchu w grupie cyklicznej jest niewłaściwa, a także w sytuacji, kiedy nie wiemy, po jakiej powierzchni odbywa się ruch, i w związku z tym nie potrafimy odpowiedzieć na pytanie o powrót do punktu wyjścia; w tym drugim wypadku należałoby uznać za złą także teorię grup niecyklicznych, bo ona także rozstrzyga to pytanie). Czy jednak nie jest bardziej naturalne przyjęcie stanowiska, że fakt, iż dany formalizm matematyczny nie jest odpowiedni dla pewnej teorii fizycznej, nie mówi nic o prawdziwości teorii matematycznej? Być może jedyny wniosek, jaki stąd płynie, jest taki, że musimy poszukać innej reprezentacji. Wydaje się, że na poszukiwaniu takich coraz to nowych reprezentacji polega rozwój nauki.

Zastanówmy się przy okazji, czy zasada C odnosi się do «całej fizyki i całej matematyki na raz», czy też rozpada się na szereg zasad C_{ij}, sformułowanych dla każdych dwóch teorii N_i i M_j. Zasada C_{ij} mówiłaby jedynie, że teoria ((reprezentacja) M_j jest dobra dla teorii N_i. Wówczas jednak nie byłoby możliwe uzasadnienie zasady C_{ij} przez odwołanie do apriorycznej prawdziwości teorii M_j. Teoria M_j mogłaby być odpowiednia dla teorii N_i (zasada C_{ij} jest spełniona), nieodpowiednia zaś dla teorii N_k (zasada C_{kj} nie jest spełniona). W takim wypadku moglibyśmy uzasadniać zasady C_{ij} nie przez ogólne rozumowania, a jedynie przez sprawdzenie, czy w konkretnym wypadku zasada ta jest spełniona. O ile zatem intencją Fielda było, jak się wydaje, wykazanie, że tezę o nietwórczości matematyki można wyprowadzić z pewnych ogólnych zasad filozoficznych, czy metanaukowych, o tyle w tym wypadku uznanie zasad C_{ij} zależne jest od wyniku szczegółowych badań dotyczących relacji pomiędzy konkretnymi teoriami matematycznymi a konkretnymi teoriami fizycznymi. Wydaje się zatem, że należy interpretować zasadę C jako jedną zasadę obowiązującą dla «całej matematyki i fizyki na raz».

Przy takiej interpretacji natychmiast pojawiają się jednak pytania typu: co to jest cała fizyka? Przecież składa się ona z różnych teorii, które opisują różne fragmenty rzeczywistości. A co to jest cała matematyka? Przecież składa się ona z różnych teorii, często wzajemnie ze sobą sprzecznych (np. ZFC + CH i ZFC + non-CH, albo teoria grup przemiennych i nieprzemiennych *etc.*). Jak zatem interpretować tezę o nietwórczości tej matematyki? Które jej fragmenty są nietwórcze, i w stosunku do których teorii fizycznych? Skąd o tym wiemy? Czy wiemy o tym dopiero po zrekonstruowaniu rozumowań nominalistycznych i porównaniu wniosków nominalistycznych z wnioskami uzyskanymi przy pomocy teorii matematycznej? Ale wówczas wiedza ta pozwalałaby jedynie stwierdzić, że dana teoria matematyczna jest dostatecznie uboga, aby być nietwórczym rozszerzeniem teorii nominalistycznej. Co więcej, i to jest, jak mi się wydaje nieco bardziej istotne, wiedza ta wynikałaby ze żmudnych badań szczegółowych, przeprowadzanych oddzielnie dla każdej teorii nominalistycznej N_i i teorii matematycznej M_j, a nie z ogólnych zasad filozoficznych, odnoszących się do struktury nauki. Z drugiej jednak strony stwierdzenie, że takie właśnie zasady ogólne są prawdziwe, wymaga odpowiedzi na pytanie: czy zasada C obowiązuje dla wszystkich teorii matematycznych (w szczególności, jak twierdzi Field, dla ZFC + CH oraz dla ZFC + non-CH), czy jedynie dla wybranych, «dobrych» teorii? A jeżeli nie dla wszystkich, to czy można rozpoznać teorie, które spełniają tą zasadę inaczej, niż przez rekonstrukcję rozumowań matematycznych w teorii nominalistycznej?

Powyższe wątpliwości pojawiły się dlatego, że teoria nominalistyczna w powyższym przykładzie była niezupełna. Dlatego możliwe jest podanie dwóch teorii matematycznych, rozszerzających naszą teorię i rozstrzygających pewne pytania na dwa różne sposoby. Jest to prosty przykład pewnego ogólniejszego problemu, który powstaje, gdy rozpatrywana teoria nominalistyczna N jest niezupełna. Niech σ będzie zdaniem niezależnym od tej teorii (ale sformułowanym w języku nominalistycznym). Niech ϕ będzie przekładem teorii N na teorię matematyczną M (być może należałoby powiedzieć: przekładem języka nominalistycznego na język matematyczny). Wówczas $\phi(\sigma)$ będzie zdaniem niezależnym od teorii $\phi(N)$. Można zatem podać dwa rozszerzenia teorii $\phi(N)$, a mianowicie $\phi(N) + \phi(\sigma)$ oraz $\phi(N)$ + non-$\phi(\sigma)$, które — po przełożeniu na język nominalistyczny — rozstrzygają zdanie σ (na dwa różne sposoby). Taka sytuacja, w myśl koncepcji Fielda, nie może mieć miejsca. Rozważmy kilka możliwych rozwiązań dla tego problemu:

(i) przy dokonywaniu przekładu teorii nominalistycznej na teorię matematyczną tłumaczymy jedynie zdania rozstrzygnięte przez teorię, zaś przy dokonywaniu przekładu w drugą stronę ignorujemy wszelkie wnioski uzyskane w teorii matematycznej, których nie mamy w teorii nominalistycznej;

(ii) wszelkie teorie matematyczne, które pozwalają na rozstrzygnięcie problemów nierozstrzygalnych w teoriach nominalistycznych, są złe (w naszym przykładzie powyżej — zarówno teoria grup cyklicznych, jak i teoria grup niecyklicznych są złymi teoriami);

(iii) teorie nominalistyczne muszą być zupełne, wówczas opisywane wyżej problemy w ogóle się nie pojawiają.

Ad (i). Przyjęcie takiego założenia powoduje, że teza Fielda o nietwórczości matematyki redukuje się do stwierdzenia, że przekłady (prawa pomostowe) są dobrane w taki sposób, aby ignorować nowe wnioski, czyli w zasadzie do tautologicznego stwierdzenia typu „matematyka jest nietwórcza, bo ustaliliśmy, że będziemy się nią posługiwać tak, aby była nietwórcza".

Ad (ii). Przyjęcie kolejnego założenia powodowałoby zawężenie zakresu matematyki do teorii postaci $\phi(N)$, gdzie N jest teorią nominalistyczną, zaś wszelkie ich rozszerzenia byłyby wykluczone z grona «dobrych teorii matematycznych». Jest to niewątpliwie niezgodne zarówno z praktyką naukową, jak i — jak się wydaje — z koncepcją Fielda, którego celem było raczej wykazanie, że matematyka jest nietwórcza, niż że można skonstruować sztucznie ubogie teorie matematyczne spełniające zasadę C. Co więcej, można wyobrazić sobie sytuację, w której teoria M_1 jest postaci $\phi(N_1)$, zaś M_2 jest postaci $\phi(N_2)$, przy czym jedna z nich jest rozszerzeniem drugiej. Jak wówczas zdecydować, czy szersza teoria jest dobra, czy zła?

Ad (iii). Z powyższych rozważań wynika, że aby uniknąć bardzo sztucznych, i — jak się wydaje — niezgodnych z koncepcją Fielda założeń, dotyczących struktury matematyki i struktury przekładów teorii nominalistycznych na teorie matematyczne, należy założyć, że teorie nominalistyczne są zupełne. Jest wówczas oczywiste, że teoria matematyczna może być jedynie nietwórczym rozszerzeniem teorii nominalistycznej. Co więcej, wtedy nie musimy się zastanawiać nad strukturą przekładów, nad doborem odpowiedniego modelu matematycznego, gdyż i tak zdobycie nowej wiedzy nie jest konieczne; co więcej, nie jest nawet możliwe.

Założenie o zupełności teorii nominalistycznych ma oczywiście daleko idące konsekwencje. Jeżeli teoria nominalistyczna jest sformułowana w logice pierwszego rzędu, to oczywiście nie może być ona rekurencyjnie aksjomatyzowalna, gdyż w przeciwnym wypadku stosowałoby się do niej twierdzenia Gödla o niezupełności. Jednakże teorie, które nie są rekurencyjnie aksjomatyzowalne, są bardzo skomplikowane. Proces zdobywania wiedzy polega tymczasem na dostarczaniu skończonych porcji informacji i jest — jak się wydaje — procesem uporządkowanym. Jest to oczywiście raczej słaby argument, jednak z całą pewnością teorie, które nie są rekurencyjnie aksjomatyzowalne nie są tym, co Field nazywa *„atrakcyjnym sformułowaniem nominalistycznym"*[11]. Rozumowanie to może w każdym razie przemawiać na rzecz tezy, że teorie nominalistyczne muszą być formułowane w silniejszych logikach, czego zresztą Field nie odrzuca[12].

Poważniejszym problemem z filozoficznego punktu widzenia jest jednak samo zjawisko zupełności teorii. Jeżeli nie mają być to sztucznie ubogie teorie w sztucznie ubogich językach (np. teoria składająca się z jednego zdania *p* sformułowana w języku składającym się także z tego jedynego zdania *p*, jest oczywiście zupełna), lecz teorie reprezentujące wiedzę na temat rzeczywistości, to założenie, że wiemy wszystko (czy też raczej: możemy odpowiedzieć na każde pytanie, jakie umiemy postawić) jest — jak się wydaje — dość silnym, i bardzo optymistycznym «zobowiązaniem epistemologicznym».

Stajemy w tem sposób — abstrahując od koncepcji Fielda — wobec «czysto» filozoficznego problemu czy całkowita wiedza jest w ogóle możliwa. Otóż jeżeli nawet jesteśmy «optymistami epistemologicznymi», pełnymi wiary w możliwość całkowitego poznania rzeczywistości, to musimy przyznać, że tego typu przekonanie jest pewnego rodzaju aktem wiary, a nie naturalnym wnioskiem z obserwacji rozwoju wiedzy.

Powróćmy jednak do zagadnienia zupełności teorii nominalistycznych. Można się zastanawiać, czy teorie obecnie formułowane w nauce (a zwłaszcza teorie nominalistyczne) są zupełne. Oczywiście sam fakt, że jest wiele pytań, na które nie znamy jeszcze odpowiedzi, nie znaczy, że teorie te są niezupełne. Być może każde zagadnienie da się rozstrzygnąć i jest to jedynie kwestia czasu. Jest to jednak bardzo silne założenie, będące przejawem dużego optymizmu. Jednak przyjęcie takiego założenia jest konieczne, jeżeli nie akceptuje się szeregu alternatywnych nienaturalnych założeń, dotyczących struktury matematyki i przekładów (praw pomostowych). Czy jednak uznanie, że nasza wiedza, jest zupełna jest zgodne z praktyką naukową[13]? Co więcej, czy na

---

[11] „attractive nominalistic formulation" ([5], s.41).

[12] Przypomnijmy w tym kontekście dyskusję toczącą się wokół problemu logiki właściwej dla opisu rozumowań matematycznych. Logika pierwszego rzędu jest często uważana za zbyt ubogą. Według Barwise'a, *first-order thesis*, czyli teza, że logika pierwszego rzędu jest tą właściwą logiką, nie jest możliwa do utrzymania w świetle rozwoju matematyki i informatyki (por. [1], [12]).

[13] Przypomnijmy w związku z tym wyniki osiągnięte przez Da Costę i Dorię w [4], a dotyczące problematyki metamatematycznej w odniesieniu do fizyki. Wychodząc od Suppesa koncepcji nauki (opartej na pojęciu *predykatu teoriomnogościowego* (*set-theoretical predicate*)) autorzy podają przykłady konkretnych zdań

płaszczyźnie czysto filozoficznej tego typu stanowisko da się obronić? Mam co do tego poważne wątpliwości. Warto przy okazji zwrócić uwagę na to, że uzasadnienie tego typu stanowiska wiąże się ściśle z kwestią stosunku języka do rzeczywistości — i tego, co w danym języku jest wyrażalne. Wydaje się, że aby koncepcja Fielda nie sprowadzała się do redukcji nauki do pewnej sztucznie ubogiej teorii nominalistycznej, musimy przyjąć założenie, że całość wiedzy naukowej da się wyrazić nominalistycznie w sposób zupełny.

2.4. Obiekty nieskończone

Field akceptuje istnienie obiektów nieskończonych, twierdząc, że nie jest to sprzeczne z duchem nominalizmu, zaś ewentualne obiekcje mogą pochodzić jedynie od finitystów. Przyjęcie istnienia obiektów nieskończonych wiąże się ściśle z koncepcją czasoprzestrzeni, w której Field postuluje istnienie punktów i obszarów czasoprzestrzeni jako bytów fizycznych. Czy jednak przyjęcie istnienia obiektów nieskończonych jest konieczne tylko ze względu na powszechny w fizyce współczesnej rozmaitościowy model czasoprzestrzeni? Czy można by zrezygnować z obiektów nieskończonych, gdyby okazało się, że czasoprzestrzeń jest skwantowana i ograniczona, a co za tym idzie skończona? Wydaje się, że nie.

Można podać pewien prosty przykład twierdzenia matematycznego, które mówi o obiektach skończonych, ale w dowodzie niezbędne jest wykorzystanie twierdzeń dotyczących zbiorów nieskończonych. Twierdzeniem tym jest pewna wersja twierdzenia Ramseya (*Modified Ramsey Theorem*, [9], [14]).

Niech dla danego zbioru X, „$[X]^k$" oznacza zbiór jego k-elementowych podzbiorów, zaś „card X" oznacza jego moc (ilość elementów). Zachodzi wówczas następujące zmodyfikowane skończone twierdzenie Ramsey'a (*Modified Finite Ramsey Theorem*): Dla wszystkich k, l, m istnieje n tak duże, że jeżeli $X = \{1, 2, 3,...,n\}$ oraz jeżeli $[X]^k = C_1 \cup ... \cup C_l$, to istnieje zbiór Y zawarty w X taki, że card $Y \geq m$, card $Y \geq \min(Y)$ oraz $[Y]^k \subseteq C_i$ dla pewnego $i \leq l$.

Twierdzenie to w wypadku gdy $k = l = 2$ można zilustrować w sposób następujący: dla każdego m istnieje takie n, że następujący fakt ma miejsce. Rozważmy zbiór n osób o tej własności, że n-ta osoba uważa, że liczba n jest bardzo dużą liczbą. Wówczas w tym zbiorze istnieje takich m osób, że wszystkie te osoby znają się nawzajem, albo żadna z nich nie zna żadnej innej spośród tych wyróżnionych osób, i — co więcej — przynajmniej jedna osoba uważa, że liczba m jest bardzo duża (czyli, że wyróżniona grupa osób jest bardzo duża)[14]. Wydaje się, że zdanie tego typu śmiało można uważać

niezależnych dla danej teorii fizycznej. Oczywiście, uznanie tego typu wyników za doniosłe, zależy od przyjęcia pewnych założeń dotyczących struktury nauki.

[14] W zwykłej wersji twierdzenia Ramseya brak jest warunku „card $Y \geq \min(Y)$". W przykładzie dla $k = l = 2$ znaczy to zatem, że wśród n osób istnieje podgrupa m osób, z których albo wszystkie znają się nawzajem, albo żadna osoba nie zna żadnej innej z tej grupy. Ciekawe jest, że ta wersja jest dowodliwa bez odwoływania się

za zdanie nominalistyczne. Dla jego udowodnienia potrzebna jest nam jednak wiedza na temat zbiorów (dla nominalisty — obiektów, bo zbiory nie istnieją) nieskończonych (chodzi tutaj o nieskończone twierdzenie Ramseya). Okazuje się zatem, że obiekty nieskończone są niezbędne nie tylko dlatego, że akceptujemy substancjalistyczną koncepcję czasoprzestrzeni, ale też dlatego, że bez ich użycia nie moglibyśmy udowodnić pewnych prostych twierdzeń, dotyczących obiektów skończonych.

Możliwa jest też oczywiście inna interpretacja tej sytuacji. W myśl tej interpretacji wprawdzie nie potrafimy w danej teorii nominalistycznej udowodnić twierdzenia Ramseya, ale po prostu wiemy skądinąd, że jest ono prawdziwe (ewentualnie fałszywe). Pojawia się jednak pytanie, w jaki sposób mielibyśmy posiąść tego typu wiedzę? Wydaje się, że bez odwoływania się do pewnych kryteriów wewnątrzmatematycznych (takich, jak spójność danej teorii, czy też jej przydatność w nauce) trudno byłoby uzasadnić uznanie tego twierdzenia za prawdziwe. Nie wydaje się za to, by można było rozstrzygnąć twierdzenie Ramseya w jakikolwiek inny sposób. Dodanie go jako aksjomatu do posiadanej przez nas teorii byłoby zaś niczym nie uzasadnione, gdyż oczywiście nie jesteśmy w stanie podać empirycznego uzasadnienia tego typu twierdzenia. Co więcej, być może w tym momencie pojawiłoby się kolejne zdanie tego typu[15]. Powinniśmy zatem teorię naszą uzupełnić (zgodnie z wnioskami z punktu 2.3.). Jak jednak należy rozstrzygać pytanie o to, czy dołączyć zdanie σ, czy jego negację (w naszym przykładzie twierdzenie Ramseya, czy jego negację)? Wszak nie ma tu możliwości empirycznego stwierdzenia prawdziwości tego typu zdań, a według Fielda odwoływanie się do matematyki nie jest konieczne. Wydaje się zatem, że obiekty nieskończone muszą znaleźć miejsce w teorii nominalistycznej, i to z przyczyn znacznie głębszych niż przyjęcie substancjalistycznej koncepcji czasoprzestrzeni. Należy tu cały czas pamiętać o tym, że Field odżegnuje się od formalistycznej interpretacji matematyki jako zwykłej gry symboli na kartce papieru, więc (formalistyczny) argument, że w istocie to nie odwołujemy się do obiektów nieskończonych, lecz do pewnych napisów, które zwykliśmy nazywać „obiektami nieskończonymi", nie może tu zostać zastosowany.

Powyższe rozumowanie opiera się na fakcie, że pewnych zdań dotyczących obiektów skończonych nie da się udowodnić bez odwoływania się do obiektów nieskończonych. Mogłoby się jednak zdarzyć, że zamiast odwoływać się do nieskończonego twierdzenia Ramseya można na tyle wzmocnić logikę, w której formułowane są zdania na temat obiektów skończonych, że w niej twierdzenia te już są dowodliwe. Być może wystarczy na przykład dopuścić nieskończone koniunkcje (logi-

---

do nieskończonej wersji twierdzenia Ramseya.

[15] W omawianym przykładzie zdania niezależne będą się pojawiać na mocy twierdzenia Gödla. Chodzi jednak o zdanie niezależne o konkretnej treści matematycznej. Przykłady tego typu zdań można znaleźć w [14].

ka $L_{\omega_1\omega}$) lub dopuścić dodatkowe kwantyfikatory (logiki typu L(Q))[16]. Czy jednak nie wymaga to «zakodowania» posiadanej przez nas informacji na temat zbiorów nieskończonych w samej logice? Oczywiście argument ten w tej postaci jest dość mało precyzyjny, ale może być uznany za pewnego rodzaju wskazówkę. Przy okazji pojawia się problem, jak silną logikę (tzn. jak silną podlogikę logiki drugiego rzędu, która dopuszcza kwantyfikację po zbiorach, a więc jest nie do pogodzenia z koncepcją nominalistyczną) może przyjąć nominalista. Drugim problemem jest to, jak silne twierdzenia dadzą się w takich logikach dowodzić[17]. Jeżeli jednak zdecydujemy się na przyjęcie zbiorów nieskończonych, to pojawia się natychmiast szereg pytań. Czy można w tej teorii wyrazić fakt, że dany zbiór jest przeliczalny, a inny nie? Takich pytań można postawić wiele. W niektórych teoriach matematycznych (np. w deskryptywnej teorii mnogości) rozstrzygnięcie pewnych pytań, dotyczących prostych obiektów, jak liczby rzeczywiste, zależy od przyjęcia bardzo silnych aksjomatów dla teorii mnogości, takich jak istnienie liczby mierzalnej, czy aksjomat konstruowalności[18]. Może to służyć jako kolejna ilustracja tezy, że niekiedy odpowiedzi na proste pytania należy szukać na znacznie wyższym «poziomie», w teorii znacznie bardziej skomplikowanej.

Oczywiście, aby obronić się przed koniecznością zaakceptowania obiektów nieskończonych w teorii nominalistycznej, można przyjąć następującą strategię. Rozważmy wszystkie wnioski dotyczące zbiorów skończonych, jakie dadzą się udowodnić przy użyciu teorii zbiorów nieskończonych, a następnie zapomnijmy o zbiorach nieskończonych tak, jakbyśmy wnioski te znali skądinąd. Jest to strategia, która odpowiada strategii wspomnianej przez Fielda ([5], s.41), a która polega na konstruowaniu teorii nominalistycznej w ten sposób, że zakładamy wszystkie nominalistyczne konsekwencje teorii matematycznej. Field jednak nie akceptuje tego rozwiązania, gdyż celem jego jest podanie nie jakiejkolwiek teorii nominalistycznej, ale teorii o «atrakcyjnym sformułowaniu». (Problemem, jaki tu się pojawia, jest też to, czy cała wiedza na temat świata daje się wyrazić nominalistycznie. Być może bowiem nie istnieje nawet «nieatrakcyjne» nominalistyczne sformułowanie nauki. Jednak aby dyskusja nad programem Fielda miała w ogóle sens, założenie o istnieniu takiego sformułowania należy przyjąć.) Wracając jednak do problemu obiektów skończonych, nawet jeżeli zaakceptujemy podaną wyżej procedurę, to musimy przyznać, że założenia dotyczące zbiorów nieskończonych, które są niezbędne dla rozstrzygania pytań na temat zbiorów skończonych, w tej sytuacji stają się pewnymi hipotezami, które nie dość, że być może

---

[16] Problemowi konstruowania logik właściwych dla poszczególnych dyscyplin matematycznych poświęcona jest monografia [1].

[17] Simpson w swoim programie, który nazywa *reverse mathematics* prowadzi badania na temat tego, jak silne założenia są potrzebne, aby dowodzić pewnych standardowych twierdzeń matematycznych. Wyróżnia on szereg podlogik logiki drugiego rzędu i w nich rekonstruuje fragmenty mamtematyki istotne z punktu widzenia zastosowań (por.[13]). Podobny problem pojawia się też w kontekście programu Fielda: jaka jest najsłabsza logika wystarczająca do uprawiania nauki?

[18] Szczegółowe omówienie zagadnień tego typu można znaleźć w [6], [7].

w naszym języku są niewyrażalne, to dodatkowo są zupełnie nieuzasadnione — z punktu widzenia naszego, «skończonego» świata. W tej sytuacji dołączenie do naszej teorii «skończonych» wniosków z nieskończonego twierdzenia Ramseya (lub lematu Königa, czy jakiegokolwiek innego zdania o zbiorach nieskończonych) jest równie uzasadnione (czy też raczej nieuzasadnione), jak dołączenie wniosków z negacji tych zdań. Można oczywiście stwierdzić, że zdania typu „wszystkie obiekty mają pewną własność", jako nieweryfikowalne empirycznie, uznajemy za bezsensowne lub nieciekawe. Rozważmy jednak hipotezę typu „po zastosowaniu algorytmu Goodmana (por. [14]) do dowolnej liczby, w skończonej liczbie kroków otrzymamy zero" (kolejny przykład zdania finitystycznego niedowodliwego finitystycznie). Czy rzeczywiście hipoteza tego typu jest całkowicie nieinteresująca? Na pewno nie ma żadnego obiektywnego, przekonywającego argumentu, że tak właśnie jest; jest to raczej wyraz przyjęcia założenia o tym, gdzie znajdują się granice naszego poznania i granice sensownych pytań (czy też: gdzie należy taką granicę zakreślić).

Powyższe rozważania miały na celu uzasadnienie tezy, że jeśli nie chcemy zrezygnować z pewnych fragmentów naszej wiedzy, albo nie chcemy popadać w dogmatyzm, to musimy uznać, że w teorii nominalistycznej niezbędne są obiekty nieskończone. O ile jednak u Fielda akceptacja obiektów nieskończonych jest konsekwencją przyjęcia substancjalistycznej koncepcji czasoprzestrzeni, to podane powyżej argumenty sugerują, że przyczyny są znacznie głębsze. Mogą się one także stać się ilustracją dla następujących rozważań. Teoria zbiorów nieskończonych jest twórczym rozszerzeniem teorii zbiorów skończonych. Podobnych przykładów w obrębie matematyki można podać wiele. Skąd zatem pewność, że podobna relacja nie będzie zachodzić pomiędzy nauką nominalistyczną a nauką wykorzystującą techniki matematyczne? Field zakłada, że tak nie jest, ale czy takie stanowisko jest rzeczywiście uzasadnione?

2.5. Granice eksperymentu myślowego

Koncepcja Fielda jest niekonstruktywna. Postuluje on jedynie możliwość nominalistycznego przeformułowania nauki, nie mówiąc nic na temat tego, jak konkretnie takie sformułowanie miałoby wyglądać. Podany przez niego przykład teorii grawitacji Newtona jest na tyle odległy od fizyki współczesnej, że należy go traktować raczej jako pewną prostą ilustrację (podobnie jak podana wyżej teoria «chodzenia po pewnej powierzchni»), niż jako wykonanie pierwszego kroku w programie nominalistycznego przeformułowania «prawdziwej» nauki. Field sam przyznaje, że jest to bardzo trudne zadanie, i że rozumowania nominalistyczne są o wiele bardziej skomplikowane niż tradycyjne. Jego koncepcja jest tak naprawdę pewnego rodzaju eksperymentem myślowym.

Można tutaj postawić pytanie o to, jakiego typu ograniczenia uniemożliwiają eksperyment myślowy, czy też inaczej mówiąc, do którego momentu eksperyment myślowy jest jeszcze sensowny. Niemożliwość logiczna czyni eksperyment myślowy bezsensownym, można jednak wyróżnić jeszcze niemożliwość fizyczną i niemożliwość praktyczną. Pojawia się natychmiast pytanie o to, gdzie dokładnie leży granica pomiędzy tymi niemożliwościami, a przede wszystkim pytanie o to, czy rozróżnienie takie jest sensowne. Spór ten jest do pewnego stopnia sporem terminologicznym. Jednakże, aby posłużyć się dobrze znanym przykładem, niemożliwość obliczenia wszystkich pędów i położeń cząsteczek gazu w 1 m^3 powietrza przy znajomości tych danych sprzed minuty uznamy za niemożliwość praktyczną, podczas gdy niemożliwość dostania się na Księżyc na piechotę — za niemożliwość fizyczną. Przykład ten wydaje się bardzo prosty i nie budzący wątpliwości. Można jednak zadać pytanie, czy tak naprawdę niemożność obliczenia stanu 1m^3 gazu po minucie jest rzeczywiście tylko praktyczna? Jeżeli udałoby się udowodnić, że rozwiązanie tego (ewentualnie odpowiednio trudniejszego) zagadnienia wymagałoby pracy komputera wielkości Wszechświata przez czas dłuższy niż wiek Wszechświata, to czy nie staje się to już niemożliwością fizyczną? Do pewnego stopnia jest to oczywiście zależne od naszego rozumienia praw fizyki — czy np. takie parametry, jak wielkość Wszechświata czy jego wiek, są składowymi praw fizyki, czy też nie.

Jest jeszcze drugi aspekt tego zagadnienia, na który w kontekście teorii Fielda warto zwrócić uwagę. Dla obliczenia stanu gazu po minucie można podać bardzo ścisłą procedurę: dany jest przecież stan początkowy układu i dane jest równanie różniczkowe, które opisuje jego ewolucję. A jednak można sobie wyobrazić sytuację, w której obliczenie to jest niemożliwe nie tylko z przyczyn praktycznych (takich, jak brak odpowiednio rozwiniętej techniki komputerowej), ale głębszych przyczyn fizycznych (mogą to być wspomniane wyżej ograniczenia wielkości komputera czy programu komputerowego, albo na przykład występowanie zjawisk chaotycznych w samym komputerze, które powodują, że stosowne algorytmy nie mogą być numerycznie stabilne). Czy w tej sytuacji wykonanie eksperymentu myślowego typu „wyobraźmy sobie, że dokonaliśmy tych obliczeń" jest w ogóle sensowne? Jeżeli tak, to konsekwentnie należy także uznać za sensowny eksperyment myślowy typu „wyobraźmy sobie, że idziemy piechotą na Księżyc i jesteśmy właśnie w połowie drogi". Rozważania powyższe można uznać za pewnego rodzaju argument za tezą, że sensowne jest postawienie pytań typu: „gdzie jest dopuszczalna granica eksperymentu myślowego i jakiego rodzaju niemożliwość powoduje, że eksperyment myślowy przestaje mieć sens?". Odpowiedź na te pytania nie jest zapewne prosta (jeśli w ogóle istnieje).

Pytania powyższe są pytaniami ogólnymi, przy analizie programu Fielda nabierają jednak, moim zdaniem, szczególnej aktualności. Program nominalizowania nauki jest pewnego rodzaju eksperymentem myślowym, i byłby on — jak przyznaje sam Field — bardzo trudny do wykonania, a w praktyce naukowej nieprzydatny (ciekawe uwagi dotyczące nauki nominalistycznej w tym kontekście można znaleźć w [2]). Field stwierdza jednak, że program ten, przynajmniej w teorii, można przeprowadzić. Powstaje tu pytanie, jakiego typu «teoretyczna możliwość» wchodzi tu w grę? Nie jest jasne, jak skomplikowane musiałoby być nominalistyczne sformułowanie nauki. Zakładając nawet, że Field byłby w stanie podać regułę przekładu, czy nie powstałaby tu sytuacja podobna, jak przy obliczaniu położeń cząstek gazu, gdzie reguła jest bardzo prosta, a jednak obliczenie to jest niemożliwe, i to być może ze znacznie głębszych przyczyn, niż się na pierwszy rzut oka wydaje? Być może program Fielda jest zatem niewykonalny z przyczyn «fizycznych»? Mówiąc inaczej, być może w świecie, w którym żyjemy nie jest możliwe nominalistyczne uprawianie nauki, tak jak nie jest możliwy spacer na Księżyc. Jeżeli przyjmiemy założenie, że wszystkie rodzaje eksperymentów myślowych — z wyjątkiem tych naruszających niemożliwość logiczną — są dopuszczalne, to nie można wysuwać żadnych zastrzeżeń dotyczących programu Fielda od tej strony. Jeżeli jednak uznamy, że eksperymenty myślowe są sensowne tylko w pewnych granicach, to pozostaje do rozstrzygnięcia problem, po której stronie tej granicy leży eksperyment Fielda. Odpowiedź na to pytanie nie jest chyba oczywista.

3. Podsumowanie

Przedstawione powyżej rozważania nie prowadzą oczywiście do ostatecznych rozstrzygnięć dotyczących programu Fielda. Mogą one jednak być pomocne w uświadomieniu sobie, w jakich punktach koncepcja ta wymaga precyzacji, i to zarówno od strony czysto technicznej, jak i od strony «przedzałożeń filozoficznych».

Jeżeli chodzi o stronę techniczną, to bardzo nieprecyzyjnie sformułowana jest sama teoria przekładu; w zasadzie jest to jedynie szereg postulatów. Nie jest też jasne, dla jakich teorii ma obowiązywać zasada *C*; nie wiadomo, czy jest to jedna, ogólnie obowiązująca zasada o charakterze normatywnym, stwierdzająca, że dobre są tylko takie teorie matematyczne, ktore są nietwórczymi rozszerzeniami teorii nominalistycznych, czy też jest to raczej szereg zasad odnoszących się do poszczególnych, konkretnych przykładów teorii naukowych, czy może wreszcie jest to ogólna obserwacja, dotycząca struktury nauki, matematyki i ich wzajemnych relacji. Teoria przekładu wymaga uściślenia zwłaszcza w odniesieniu do samego tworzenia nominalistycznych odpowiedników zdań abstrakcyjnych. Trudności, jakie się pojawiają w tym punkcie, można rozwiązać przez przyjęcie pewnych założeń dotyczących logiki nominalistycznej, czy też wewnętrznej struktury matematyki. Jednakże założenia te wydają się nieco sztuczne.

Podobnie jest w wypadku zupełności teorii nominalistycznych. Można uniknąć «przedzałożeń filozoficznych» o zupełności wiedzy poprzez szereg sztucznych założeń, dotyczących struktury matematyki lub przekładu. Kwestia obiektów nieskończonych w teoriach nominalistycznych też nie jest do końca jasna; istnieją bowiem silne przesłanki wskazujące, że ich obecność w tych teoriach ma przyczyny głębsze, niż tylko przyjęcie substancjalistycznej koncepcji czasoprzestrzeni. Tego wniosku można także uniknąć przez ograniczenie zakresu informacji — interesujących z punktu widzenia teorii nominalistycznych. Cała koncepcja Fielda wreszcie jest pewnego rodzaju eksperymentem myślowym. Pytanie o jego sensowność nie jest bezzasadne, odpowiedź na to pytanie zaś nie jest oczywista. Istnieje jeszcze wiele innych podobnych pytań, dotyczących na przykład tego, co dokładnie oznacza zasada „*u* *podłoża każdego dobrego zewnętrznego wyjaśnienia leży wyjaśnienie wewnętrzne*"; jaki jest jej status i uzasadnienie.

Ponieważ *Science without Numbers* nie jest wzorem precyzji, ja również na zakończenie pozwolę sobie na pewnego rodzaju metaforę. Można powiedzieć, że w myśl teorii Fielda matematyka jest jak samochód, którym można szybko i wygodnie dojechać do celu, ale w gruncie rzeczy można tam też dojść na piechotę. Być może jednak matematyka jest raczej jak statek kosmiczny, którym można dolecieć na Księżyc, i który — co więcej — jest do tego absolutnie niezbędny? Jeśli nawet na to pytanie nie ma dostatecznie uzasadnionej odpowiedzi, to niezależnie od reprezentowanego stanowiska na pewno warto dbać o staranne wyartykułowanie przyjmowanych założeń oraz powstających pytań i wątpliwości.

Bibliografia

1. Barwise J., „Model-Theoretic Logics: Background and Aims", [w:] Barwise J., Feferman S., (wyd.), *Model-Theoretic Logics*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1985.
2. Burgess J., „Why I Am Not a Nominalist", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, 1983, s. 93-105.
3. Chihara C., *Ontology and the Vicious Circle Principle*, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1973.
4. Da Costa N.C.A., Doria F.A., „Suppes Predicates for Classical Physics", [w:] Echevieria J., Ibarra A., Mormann T. (wyd.), *The Space of Mathematics*, De Gruyter, Berlin - New York, 1992, s. 168-191.
5. Field H.H., *Science without Numbers*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.
6. Maddy P. , „A Problem in the Foundations of Set Theory", *Journal of Philosophy*, 87, 1990, s. 619-628.
7. Maddy P., „Indispensability and Practice", *Journal of Philosophy*, 89, 1992, s.275-289.
8. Malament D., Recenzja *Science without Numbers*, *Journal of Philosophy*, 79, 1982, s. 523-534.
9. Paris J., Harrington L., „A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic", [w:] *Handbook of Mathematical Logic*, Barwise J. (wyd.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - London, 1977, s. 1133-1142.
10. Resnik M.D., „Applying Mathematics and the Indispensability Argument", [w:] Echeverria J., Ibarra A., Mormann T. (wyd), *The Space of Mathematics*, De Gruyter, Berlin - New York, 1992, s.115-131.
11. Resnik M.D., Recenzja *Science without Numbers*, *Nous*, 17, 1983.
12. Shapiro S., „Second-Order Languages and Mathematical Practice", *Journal of Symbolic Logic*, 50, 1985, s. 714-742.

13. Simpson S.G., „Partial Realisations of Hilbert's Program", *Journal of Symbolic Logic*, 53, 1988, s. 349-363.

14. Simpson S.G., „Unprovable Theorems and Fast-Growing Functions", [w:] *Logic and Combinatorics*, Simpson S. (wyd), Contemporary Mathematics, Volume 65, AMS Rhode Island, 1987.