Filozofia Nauki
Rok II, 1994, Nr 3-4(7-8)

Tomasz Bigaj

Kilka uwag w sprawie niezbędności matematyki w nauce

0. Prace Hartry'ego Fielda — jednego z czołowych współczesnych filozofów matematyki — nie są zbyt dobrze znane polskiemu czytelnikowi. Tymczasem jego książka *Science without Numbers* spotkała się na Zachodzie z dużym oddźwiękiem, czego wyrazem może być chociażby przyznanie jej prestiżowej nagrody im. Lakatosa. Przedstawiona w tej książce kontrowersyjna teza o możliwości eliminacji matematyki z nauk empirycznych spotkała się — jak można się było tego spodziewać — ze zdecydowanym sprzeciwem większości filozofów matematyki, o samych matematykach nie wspominając; jednakże niemal wszyscy krytycy Fielda podkreślają nowatorstwo i głębię jego koncepcji.

Artykuł Krzysztofa Wójtowicza „Czy matematyka jest niezbędna w nauce?" jest — jeśli się nie mylę — pierwszą w Polsce próbą krytycznej prezentacji całości koncepcji wyłożonej przez Fielda w jego fundamentalnej książce. Z tego też powodu praca Wójtowicza jest szczególnie cenna. Zawiera ona przede wszystkim klarowne i wierne w stosunku do oryginału omówienie zasadniczych założeń i tez Fieldowskiego programu nominalizacji nauki. Wójtowicz nie poprzestaje jednak na odtwórczym zdaniu sprawy z książki Fielda, lecz poddaje jej treść wnikliwej krytyce. Krytyka ta zmierza do wykazania, że program nominalizacji nauki nie ma wystarczających podstaw, i że pozostaje on wyłącznie w sferze możliwości. Chociaż podzielam ostrożność, z jaką Wójtowicz podchodzi do tezy, że matematyka mogłaby być kiedykolwiek faktycznie wyeliminowana z zastosowań, to jednak uważam, że jego krytyka programu Fielda w wielu punktach jest nieuzasadniona. W niniejszej polemice postaram się odeprzeć niektóre zarzuty, jakie wysuwa Wójtowicz pod adresem koncepcji wyłożonej w *Science without Numbers*. Przedstawię także wyniki własnych badań nad możliwością uogólnienia programu nominalizacji nauki, i w tym kontekście rozważę ponownie kwestię faktycznej «nierealności» takiego programu.

1. Centralnym — jak sądzę — punktem, na którym wspiera się praktycznie większość argumentów Wójtowicza przeciwko koncepcji Fielda, jest kwestia, co należy rozumieć pod pojęciem „teorii matematycznej". Wójtowicz trafnie zauważa: „Nigdzie nie podaje on [tzn. Field — T.B.] ścisłej definicji tego, co to jest teoria matematyczna". Uzupełniając niewątpliwy brak w pracy Fielda, Wójtowicz rozstrzyga tę kwestię «na własny rachunek», choć — jak przypuszczam — ma to być rozstrzygnięcie zgodne z intencjami Fielda. Nazywa on mianowicie „teoriami matematycznymi" te teorie, które odnoszą się do dowolnych obiektów abstrakcyjnych (zarówno «czystych», jak i «złożonych» — tj. obiektów, będących teoriomnogościową «mieszaniną» abstraktów i konkretów). Przyjęcie tego założenia podyktowane jest zapewne następującym fragmentem pracy Fielda: „[...] nasza teza o matematyce [*scil.* teza dotycząca nietwórczości — T.B.] byłaby całkowicie banalna, gdyby matematyka składała się wyłącznie z teorii takich, jak teoria liczb, czy *czysta* teoria mnogości [...]. Teorie te jednak są same w sobie nieinteresujące z punktu widzenia matematyki stosowanej. [...] Do tego, abyśmy mogli zastosować jakiekolwiek postulowane byty matematyczne do świata fizycznego, potrzebne nam są *złożone* [*impure*] byty matematyczne [...]" [Field, 1980, s. 9]. Otóż z fragmentu powyższego nie wynika, iż *każda* teoria odnosząca się do abstrakcyjnych bytów złożonych, zasługuje na miano „teorii matematycznej". W niniejszym paragrafie będę bronił dwóch tez: (a) że powyższe rozstrzygnięcie jest niezgodne z intencjami Fielda, i że na podstawie tekstu można jednak zrekonstruować właściwe rozumienie terminu „teoria matematyczna"; (b) że definicja Wójtowicza jest definicją «nieżyczliwą» dla Fielda, tzn. taką, przy której tezy bronione przez Fielda stają się w oczywisty sposób fałszywe.

Zacznę od punktu (b), który jest łatwy do okazania. Kluczową dla Fielda tezą jest twierdzenie o nietwórczości dowolnych teorii matematycznych względem języka nominalistycznego. Przyjmijmy tutaj taką interpretację tej tezy, zgodnie z którą teoria T jest nietwórcza względem języka nominalistycznego, gdy T nie implikuje żadnych zdań nominalistycznych poza tautologiami [por. sformułowanie zasady C″ w: Field, 1980, s. 12]. Założenie o nietwórczości matematyki sprowadza się więc do tezy, że żadna teoria matematyczna nie implikuje nietautologicznych twierdzeń nominalistycznych. Zauważmy teraz, że — w myśl proponowanego przez Wójtowicza rozstrzygnięcia — za teorie matematyczne należy uznać większość teorii fizycznych (w zasadzie wszystkie te teorie), jako że każda teoria fizyczna czyni odniesienia do obiektów abstrakcyjnych. Z drugiej strony oczywiste jest, że teorie fizyczne są twórcze względem języka nominalistycznego — ich rola polega przecież na tym, że mają implikować nietautologiczne tezy o świecie, w tym także tezy wyrażalne w języku czysto nominalistycznym.

Aby przekonać się, że przy powyższym rozumieniu „teorii matematycznej" teza o nietwórczości w oczywisty sposób upada, wystarczy rozważyć następujący, prosty przykład. Niech teoria T składa się z jednego aksjomatu: „Istnieje relacja, porządkująca liniowo zbiór przedmiotów materialnych tak, że nie istnieje element maksymalny ze względu na tę relację". Nasza «teoria» odnosi się do złożonego bytu abstrakcyjnego, jakim jest relacja porządkująca — jest zatem w myśl rozstrzygnięcia Wójtowicza teorią matematyczną — z drugiej zaś strony implikuje ona czysto nominalistyczne, nietautologiczne twierdzenie: „Istnieje nieskończenie wiele przedmiotów materialnych". Czyżby zatem Field przeoczył tak oczywisty argument przeciwko swojej tezie o nietwórczości?

O wiele bardziej naturalne wydaje się założenie, że jednak Field rozumie coś innego pod pojęciem „teorii matematycznej", niż przypisuje mu to Wójtowicz. Powstaje jednak pytanie, jakie jest to «właściwe» rozumienie? Na pewno określenie teorii matematycznych jako teorii odnoszących się wyłącznie do «czystych» obiektów abstrakcyjnych, jest za wąskie; a powyższe — jak argumentowałem — za szerokie. Musimy poszukać rozwiązania «pośredniego». Rozwiązanie to znajdujemy w następującym fragmencie tekstu: „teoria matematyczna musi się różnić od czystej teorii mnogości nie tylko tym, że dopuszcza istnienie elementów pierwotnych [*urelements*], ale również tym, że dopuszcza wystąpienie niematematycznego słownictwa w aksjomatach definicyjnych (tzn. w podstawieniach aksjomatycznych schematów wyróżniania i zastępowania)" [Field, 1980, s. 9]. Widać zatem, że według Fielda «paradygmatycznym» przykładem złożonej [*impure*] teorii matematycznej jest teoria mnogości Zermela-Fraenkla z elementami pierwotnymi (tzn. zakładająca istnienie obiektów pozamatematycznych) i dopuszczająca słownictwo pozamatematyczne w odpowiednich aksjomatach tej teorii.

Co jednak z innymi teoriami matematycznymi? Można wyróżnić dwa sposoby podejścia do tego zagadnienia. Zgodnie z jednym, rozpowszechnionym wśród filozofów matematyki, wszystkie teorie matematyczne redukują się do teorii mnogości, a zatem w rozważaniach filozoficznych można skoncentrować się na tej ostatniej. Takie stanowisko — jak się wydaje — przyjmuje sam Field, pisząc: „zwykła teoria mnogości (a zatem i standardowa matematyka, która jest redukowalna do zwykłej teorii mnogości) jest bez wątpienia nietwórcza" [Field, 1980, s. 16]. Field jednak chyba dopuszcza inne stanowisko, bowiem w innym miejscu tak zaczyna swoją myśl: „Jeśli w dodatku teoria matematyczna zawiera fragmenty, takie jak teoria liczb, traktowane jako dyscypliny niezależne, niezredukowane do teorii mnogości, to [...]" [Field, 1980, s. 12]. Takie założenie jednak nie komplikuje zbytnio naszego problemu. Jeśli zgodzimy się, że istnieją «czyste» teorie matematyczne nieredukowalne do teorii mnogości, to wystarczy przyjąć, że przez „teorię matematyczną" w szerszym sensie powinniśmy rozumieć każdą «czystą» teorię matematyczną, której słownictwo zostało rozszerzone o terminy pozamatematyczne, w sposób analogiczny do rozszerzenia słownictwa teorii Z-F. To «rozszerzenie» można rozumieć tak, że po prostu dołączamy daną czystą teorię matematyczną T do teorii Z-F z elementami pierwotnymi i wprowadzonym słownictwem pozamatematycznym, co umożliwia nam mówienie np. o funkcjach, korelujących odpowiednie obiekty teorii T z przedmiotami materialnymi. Jasne jest więc, że twierdzenie, które podaliśmy wyżej jako kontrprzykład dla tezy o nietwórczości rozumianej w sposób zaproponowany przez Wójtowicza, nie będzie należało do żadnej teorii matematycznej. Natomiast przykładowe twierdzenie — „Jeżeli liniowy porządek na zbiorze obiektów materialnych *Z* nie ma elementu maksymalnego, to istnieje nieskończenie wiele Z-tów" — jest po prostu uszczegółowieniem odpowiedniej tezy, dowodliwej na gruncie teorii porządków liniowych, i jako takie jest twierdzeniem matematyki «w szerszym sensie».

Na marginesie zauważmy, że rozszerzenie języka matematyki czystej o terminy pozamatematyczne powoduje, iż teorie te stają się niezupełne, w tym sensie, że można w nich sformułować tezy takie, że ani one ani ich negacje nie są dowodliwe w danym systemie aksjomatycznym. Posłużmy się przykładem teorii Z-F. Jeśli do zasobu słownictwa pozamatematycznego dołączymy predykat „bycie filozofem w Polsce", to na mocy aksjomatu wyróżniania możemy stwierdzić, że istnieje podzbiór zbioru wszystkich indywiduów, zawierający wszystkich filozofów w Polsce. Natomiast dowolne zdanie o postaci „Zbiór filozofów w Polsce ma liczbę kardynalną α" jest nierozstrzygalne na gruncie teorii Z-F. Własność ta, jak się przekonamy, jest niezmiernie istotna z punktu widzenia stosowalności matematyki, umożliwia ona bowiem «tłumaczenie» zdań o świecie na zdania wyrażalne w języku matematyki «złożonej», bez zaburzania nietwórczości teorii matematycznych.

2. Przejdźmy teraz do zagadnienia przekładu zdań teorii nominalistycznych na język teorii matematycznych. Sposób, w jaki prezentuje tę kwestię Wójtowicz, może prowadzić do pewnych nieporozumień. Postaram się wskazać źródło tych możliwych nieporozumień. Zacznę jednak od przypomnienia stanowiska Fielda w tej kwestii. Teza o nietwórczości matematyki — jeśli ją zaakceptujemy — ma doniosłe konsekwencje z punktu widzenia nominalisty. Umożliwia ona bowiem stosowanie twierdzeń matematycznych poza matematyką — bez konieczności ich akceptacji, czyli w czysto instrumentalny sposób. Jeśli bowiem dysponujemy pewną teorią nominalistyczną *T* (przez teorię nominalistyczną rozumiem tutaj teorię nie odnoszącą się do żadnego typu obiektów abstrakcyjnych) i jesteśmy zainteresowani tylko w wyprowadzaniu odpowiednich wniosków z tej teorii, to możemy dołączyć do niej dowolny zbiór twierdzeń matematycznych S i badać konsekwencje zbioru $S \cup T_n$ wyrażone w języku teorii nominalistycznej, mając pewność, że każda taka konsekwencja będzie konsekwencją samej teorii T_n. Dzięki nietwórczości nominalista ma swobodę w tego typu «stosowaniu» matematyki, powstaje jednak pytanie, po co ma on to robić. Dlaczego dołączenie twierdzeń matematycznych do danej teorii nominalistycznej ma być pomocne w wyprowadzaniu dalszych nominalistycznych wniosków? Na to właśnie pytanie stara się odpowiedzieć Field, wprowadzając pojęcie „abstrakcyjnych odpowiedników twierdzeń nominalistycznych".

Field zauważa, że często zdarza się, iż twierdzenia wyrażalne w języku nie odwołującym się do obiektów abstrakcyjnych, formułujemy mimo to w języku obszerniejszym — zawierającym pewne pojęcia matematyczne. Klasycznym przykładem są tu twierdzenia odwołujące się do elementarnej arytmetyki: np. zdanie „W pokoju znajdują się dwa krzesła", łatwo wyrażalne w języku pierwszego rzędu zawierającym wyłącznie predykaty pozamatematyczne, formułujemy często w postaci „Liczba elementów zbioru krzeseł w pokoju wynosi 2". Zdanie drugie nazywa Field „abstrakcyjnym odpowiednikiem" zdania pierwszego. «Odpowiedniość» ta polega na tym, że na gruncie teorii matematycznej (w naszym wypadku jest to teoria Z-F z elementami pierwotnymi) dowieść można równoważności obu zdań. Oczywiście nominalista, który kwestionuje prawdziwość teorii Z-F, musi zakwestionować również ową równoważność; nie zmienia to jednak faktu, że dzięki nietwórczości teorii Z-F może on zawsze dołączyć do swojej teorii nominalistycznej wspomniany abstrakcyjny odpowiednik, nie uznając go za prawdziwy.

Zauważmy, że w naszym przykładzie abstrakcyjny odpowiednik zdania nominalistycznego jest, po pierwsze, zdaniem wyrażonym w języku matematyki nie — czystej, lecz «złożonej»; a po drugie, jest on zdaniem nierozstrzygalnym na gruncie teorii Z-F. Fakt ten nie jest przypadkowy. Ilekroć dla danego nietautologicznego twierdzenia nominalistycznego t istnieje jego odpowiednik abstrakcyjny s, tylekroć s jest nierozstrzygalnym zdaniem, wyrażonym w języku matematyki złożonej. Gdyby bowiem s było tezą jakiejś teorii matematycznej S, to S byłaby w oczywisty sposób twórcza, bowiem implikowałaby ona nietautologiczne twierdzenie nominalistyczne t. Zatem nie możemy tutaj mówić, jak robi to Wójtowicz, o przekładzie teorii nominalistycznej na teorię matematyczną; powinniśmy raczej mówić o przekładzie *niektórych* twierdzeń nominalistycznych na *język* teorii matematycznych.

Zysk z przekładania twierdzeń nominalistycznych na twierdzenia wyrażalne w języku matematycznym jest według Fielda następujący. Otóż rozumowania prowadzone w języku matematyki są prostsze, gdyż mamy wtedy do dyspozycji gotowy zestaw udowodnionych twierdzeń, czy-faktów, którymi w razie potrzeby możemy się posłużyć. Prostota rozumowań w obrębie matematyki nie polega więc na tym — jak w pewnym miejscu sugeruje Wójtowicz — że reguły wnioskowania są w niej «mocniejsze» (gdyby tak było, to najprawdopodobniej upadałaby teza o nietwórczości). Wyjaśnienie tej prostoty jest dużo bardziej prozaiczne — po prostu matematyka jest nauką bardzo rozwiniętą, w której zgromadzono szereg ważnych i użytecznych rezultatów, umożliwiających prowadzenie rozumowań w ekonomiczny sposób, a nie «na piechotę», jak w wypadku teorii nominalistycznych.

Wyjaśnijmy może nieco precyzyjniej te metaforyczne sformułowania. Niech $t_1,...,t_n$ będą pewnymi zdaniami teorii nominalistycznej T_N. Załóżmy, że udało się nam znaleźć dla tych zdań ich abstrakcyjne odpowiedniki $s_1,...,s_n$, wyrażalne w języku pewnej «złożonej» teorii matematycznej S. Znaczy to, że zdania $t_1 \equiv s_1,..., t_n \equiv s_n$ są dowodliwe na gruncie S. Może się teraz zdarzyć, że na gruncie teorii S udowodnimy następującą implikację: $s_1 \wedge ... \wedge s_n \rightarrow s^*$, gdzie s^* jest pewnym zdaniem wyrażalnym w języku teorii S. Jeśli teraz s^* jest przekładem pewnego zdania nominalistycznego t^*, to wolno nam uznać, że na gruncie teorii S udowodniliśmy, że zdanie t^* wynika z nominalistycznych przesłanek $t_1,...,t_n$. Zapiszmy to *explicite*. Rozumowanie nasze ma postać następującej dedukcji: $\{t_1,\ldots,t_n, t_1 \equiv s_1,\ldots, t_n \equiv s_n, s_1 \wedge\ldots\wedge s_n \rightarrow s^*, t^* \equiv s^*\} \vdash t^*$. Ponieważ wszystkie przesłanki tego rozumowania oprócz $t_1,\ldots,t_n$ są twierdzeniami teorii matematycznej S, na podstawie nietwórczości możemy wnioskować, że t^* wynika logicznie z $t_1,\ldots,t_n$.

Zrekonstruujmy teraz następujący zarzut Wójtowicza pod adresem powyższej koncepcji. Skoro zdanie t^* jest logiczną konsekwencją zdań $t_1,\ldots,t_n$, to musi istnieć dowód tezy t^*, wykorzystujący przesłanki $t_1,\ldots,t_n$ i wyrażony w języku czysto nominalistycznym. Jeśli teraz więc przełożymy wszystkie zdania występujące w takim dowodzie na zdania matematyczne, to otrzymamy dowód zdania s^* z przesłanek $s_1,\ldots,s_n$. Dowód taki jest dokładnym odpowiednikiem dowodu nominalistycznego, a zatem nie jest on w żadnym sensie prostszy. Wójtowicz twierdzi więc, jak się zdaje, że domniemana «prostota» dowodów przeprowadzanych w języku matematycznym jest iluzoryczna, chyba że pokażemy, że dowód zdania s^* przy przesłankach $s_1,\ldots,s_n$ można uprościć, wprowadzając do dowodu tezy pomocnicze teorii S, nie będące przekładami żadnych twierdzeń nominalistycznych. Taki krok jest jednak nieuprawniony, gdyż nie mamy pewności, że teoria S jest nietwórcza względem zbioru zdań matematycznych, będących przekładami zdań nominalistycznych. Wójtowicz zauważa, że w ogólności może się okazać, iż szerszy język matematyczny nie jest nietwórczy względem języka węższego — powołując się na fakt istnienia twierdzeń o obiektach skończonych, których dowody wykorzystują w istotny sposób pojęcie „nieskończoności".

Aby odeprzeć ten zarzut, wystarczy wskazać na fakt — o którym wspominałem wcześniej — że abstrakcyjne odpowiedniki twierdzeń nominalistycznych, formułowane w języku teorii S, są zawsze nierozstrzygalne na gruncie S. Skoro tak jest, to żadne twierdzenie teorii S nie może mieć konsekwencji, która jest przekładem jakiegoś twierdzenia nominalistycznego. Zatem możemy «bez obaw» dołączać dowolne twierdzenia teorii S do matematycznego dowodu zdania s^*, mając pewność, że jest to tylko sposób na skrócenie rozwlekłych, choć formalnie poprawnych dowodów nominalistycznych. Nie jest więc tak, jak twierdzi Wójtowicz, że fakt istnienia powyższych «skrótowych» dowodów jest „niezwykle kłopotliwy z punktu widzenia koncepcji Fielda".

Dokonane przez nas powyżej rozstrzygnięcia pozwalają na udzielenie odpowiedzi na niektóre z pytań, formułowanych przez Wójtowicza pod adresem koncepcji przekładu u Fielda. Na pytanie o kryterium adekwatności przekładu tez nominalistycznych na język matematyki już właściwie odpowiedzieliśmy. Przekład jest adekwatny, gdy na gruncie danej teorii matematycznej dowodliwa jest równoważność obu twierdzeń (Field nie wyklucza jednak sytuacji, w której dowód równoważności twierdzenia nominalistycznego z jego abstrakcyjnym odpowiednikiem, wymaga pewnych dodatkowych założeń pozamatematycznych. Kwestia ta nie ma jednak — jak sądzę — istotnego znaczenia dla naszych rozważań.). Na pytanie o to, czy każde zdanie matematyczne jest przekładem jakiegoś twierdzenia nominalistycznego udzielamy odpowiedzi negatywnej. Co więcej, argumentowałem powyżej na rzecz poglądu, że żadne *twierdze-*

nie teorii matematycznej nie może być przekładem zdania nominalistycznego, gdyż byłoby to niezgodne z tezą o nietwórczości. (Ewentualne kontrprzykłady, których można się doszukać u Wójtowicza, opierają się na zbyt szerokim rozumieniu terminu „teoria matematyczna", o czym mówiłem w paragrafie 1.) Na pozostałe pytania Wójtowicza nie udzielę odpowiedzi, gdyż ich po prostu nie rozumiem (nie rozumiem np., o co chodzi w pytaniu o «podobieństwo» pomiędzy przekładami).

3. Chciałbym teraz przeanalizować przykład, który ma, według Wójtowicza, ilustrować sposób tłumaczenia prostej teorii nominalistycznej na język teorii matematycznej — konkretnie teorii grup. «Teoria» nominalistycza, rozważana przez Wójtowicza, zawiera jeden kluczowy termin: „krok", który ze względów stylistycznych zastąpię terminem „przesunięcie jednostkowe". Oprócz tego należałoby wprowadzić także pojęcie „przesunięcia", na oznaczenie operacji, polegającej na wykonaniu dowolnej liczby przesunięć jednostkowych. Zastosowanie matematyki polega tutaj na wprowadzeniu tezy „Zbiór przesunięć wraz z ich składaniem tworzy grupę", równoważnej koniunkcji następujących zdań: (1) istnieje przesunięcie «zerowe» (tzn. takie, że złożone z dowolnym przesunięciem daje to samo przesunięcie); (2) dla każdego przesunięcia istnieje takie przesunięcie, że ich złożenie daje przesunięcie zerowe; (3) złożenie dwóch dowolnych przesunięć daje przesunięcie; (4) składanie przesunięć jest łączne. (Na marginesie zauważmy, że wbrew temu, co pisze Wójtowicz, to nie zbiór miejsc, do których można dotrzeć, tworzy grupę, lecz zbiór przesunięć. Nie istnieje bowiem coś takiego, jak «miejsce odwrotne do danego». Możemy więc co najwyżej powiedzieć, że grupa G *działa* na zbiorze miejsc M — tzn. istnieje operacja $\bullet$ taka, że dla każdego elementu $g \in G$ i $m \in M$, $g \bullet m$ jest miejscem, do którego można dotrzeć z m w wyniku przesunięcia g.)

Łatwo zauważyć, że przesunięcie jednostkowe jest generatorem takiej grupy — tzn. każde przesunięcie niezerowe da się przedstawić jako złożenie skończonej liczby przesunięć jednostkowych. Wójtowicz rozważa następnie pytanie o to, czy nasza grupa — nazwijmy ją G — jest cykliczna, tzn. czy pewne złożenie przesunięć jednostkowych może dać w rezultacie przesunięcie zerowe («powrót» do punktu wyjścia). Charakterystyczne jest to, według Wójtowicza teoria grup cyklicznych rozstrzyga to pytanie pozytywnie, co znaczyłoby, że teoria ta jest twórcza, gdyż implikuje pewną tezę nominalistyczną o realnym świecie (że wychodząc w którymkolwiek kierunku, po jakimś czasie wrócimy na to samo miejsce). Problem polega jednak na tym, że teoria grup cyklicznych (w szerszym sensie, tzn. zawierająca słownictwo pozamatematyczne) na pewno nie rozstrzyga zdania „G jest grupą cykliczną" ani pozytywnie, ani negatywnie — tzn. na gruncie tej teorii nie można udowodnić tego zdania, ani jego negacji. Teoria grup cyklicznych mówi nam jedynie o własnościach pewnej podklasy klasy wszystkich grup, a nie o tym, czy pewne szczególne grupy składające się z obiektów fizykalnych należą do tej podklasy, czy też nie. Na to pytanie należy odpowiedzieć niezależnie od jakiejkolwiek teorii matematycznej. Błąd Wójtowicza najprawdopodobniej polega na tym, że zgodnie ze swoim rozumieniem „teorii matematycznej" uznał on, iż twierdzenie „Grupa *G* jest cykliczna", które odnosi się do pewnego obiektu abstrakcyjnego, jest tezą jakiejś teorii matematycznej. Jednakże, jak wskazywaliśmy, nie każde zdanie zawierające terminy matematyczne jest rozstrzygalne na gruncie pewnej teorii matematycznej *sensu stricto*.

W związku z tym także próba «naprawy» koncepcji Fielda, przez nałożenie na teorie nominalistyczne warunku zupełności, jest chybiona. Zauważmy zresztą, że jeśli zaakceptujemy rozstrzygnięcie Wójtowicza w kwestii sensu terminu „teoria matematyczna", to przyjęcie założenia o zupełności teorii nominalistycznych nie ratuje nietwórczości matematyki. Nietwórczość bowiem nie polega na tym, że matematyka nie implikuje żadnych zdań *nierozstrzygalnych* przez daną teorię nominalistyczną, lecz że nie implikuje ona *w ogóle* żadnych zdań nominalistycznych, poza tautologiami. Odwołując się do naszego przykładu możemy powiedzieć, że już samo założenie, iż zdanie „Zbiór przesunięć tworzy grupę" jest implikowane przez jakąkolwiek teorię matematyczną, jest sprzeczne z nietwórczością matematyki. Kwestia zupełności czy niezupełności teorii nominalistycznej nie ma tu żadnego znaczenia[1].

4. Wójtowicz w swojej krytyce pomija praktycznie zasadniczą część programu Fielda, polegającą na znalezieniu dla danej zmatematyzowanej teorii fizycznej jej nominalistycznego odpowiednika. (Jest to dość dziwne, zważywszy że większość krytyków Fielda właśnie w tej części słusznie dopatrywało się luk; por. chociażby [Chihara, 1990; s.153-173], [Malament, 1982], [Resnik, 1985].) Tymczasem ta właśnie część programu Fielda jest bardzo istotna z punktu widzenia obrony nominalizmu. Nietwórczość matematyki pozwala bowiem na «bezpieczne» z punktu widzenia nominalisty zastosowanie matematyki jedynie w wypadku, gdy dysponujemy już wcześniej odpowiednią teorią nominalistyczną. Co jednak, gdy — jak w wypadku fizyki — sama teoria zawiera już pojęcia matematyczne? Aby móc powołać się na tezę o nietwórczości, należy najpierw sformułować nominalistyczną wersję teorii fizycznej. Field próbuje dokonać tego, aksjomatyzując wszystkie nominalistyczne konsekwencje danej teorii fizycznej. Próbę swoją przeprowadza na przykładzie Newtonowskiej teorii grawitacji, dla której *explicite* formułuje jej nominalistyczną wersję.

Nie chciałbym obecnie zagłębiać się w szczegóły techniczne Fieldowskiej parafrazy teorii grawitacji. Zamiast tego rozważę ogólnie metodę postępowania, proponowaną przez Fielda. Okazuje się bowiem, że przy pewnych założeniach można w sposób ogólny udowodnić istnienie odpowiedniego przekładu nominalistycznego. Kluczowym

[1] Na marginesie chciałbym zauważyć, że Wójtowicz w swojej polemice modyfikuje w istotny sposób pojęcie „nietwórczości", którym posługuje się Field. Wójtowicz mianowicie mówi o nietwórczości teorii matematycznej względem pewnej *konkretnej* teorii nominalistycznej, podczas gdy Fieldowi chodzi o nietwórczość względem *całego języka* nominalistycznego (w sformułowaniu zasady *C*, przytoczonym przez Wójtowicza, zmienna *N* odnosząca się do teorii nominalistycznych jest w istocie związana dużym kwantyfikatorem: „dla wszelkich *N* ...".

założeniem Fielda, na którym opiera on swoją metodę, jest założenie o prawdziwości tzw. twierdzenia o reprezentacji. Mówiąc w skrócie, twierdzenie o reprezentacji orzeka dla danej struktury relacji jakościowych, określonych na zbiorze obiektów fizycznych, istnienie homomorfizmu tej struktury w odpowiednią dziedzinę matematyczną (najczęściej jest to podzbiór zbioru liczb rzeczywistych). Dodatkowo twierdzenie o reprezentacji obejmuje tzw. warunek jedyności, zgodnie z którym wspomniany homomorfizm jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do pewnego typu transformacji. Homomorfizm, o którym mowa w twierdzeniu o reprezentacji, jest funkcją pomiarową, odpowiadającą konkretnej wielkości fizycznej, takiej jak masa, długość itd. Badaniem tego, jakie warunki należy nałożyć na relacje jakościowe, aby twierdzenie o reprezentacji było spełnione, zajmuje się teoria pomiaru (por. [Krantz, 1971]). Dodajmy, że prawdziwość twierdzenia o reprezentacji dla danego zestawu wielkości mierzalnych jest warunkiem koniecznym sensowności zdań ilościowych, zawierających te wielkości.

Metoda Fielda polega na tym, aby nominalistyczny odpowiednik zmatematyzowanej teorii fizycznej, w której występują odpowiednie wielkości fizyczne, wyrazić w języku zawierającym predykaty jakościowe, skorelowane — na mocy twierdzenia o reprezentacji — z tymi wielkościami. W tym celu Field formułuje nominalistyczny odpowiednik centralnego twierdzenia Newtonowskiej teorii grawitacji: równania Poissona. Tym odpowiednikiem jest zdanie sformułowane przy pomocy predykatów jakościowych, i prawdziwe zawsze i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest równanie Poissona. Sformułowanie takiego nominalistycznego odpowiednika jest skomplikowane i wymaga przejścia wielu etapów pośrednich — m.in. nominalistycznego przeformułowania twierdzeń typu „Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0", „Pochodna kierunkowa funkcji f wzdłuż danego wektora $\mathbf{r}$ w punkcie x_0 wynosi tyle a tyle" itd. W niniejszym artykule chciałbym jednak pokazać ogólnie — bez wchodzenia w tego typu szczegóły — iż odpowiedni przekład będzie zawsze istniał. Rozważania poniższe prowadził będę przy idealizacyjnym założeniu, że w języku teorii empirycznej występuje tylko jedna wielkość fizyczna, reprezentowana funkcją pomiarową ϕ. Okazuje się bowiem, że otrzymane wyniki można łatwo uogólnić na dowolną liczbę wielkości fizycznych.

Na wstępie sformułujmy może twierdzenie o reprezentacji nieco precyzyjniej. Niech D_r oznacza dziedzinę obiektów fizycznych; D_m — dziedzinę teorii matematycznej (czystej) T; $P_1,...,P_n$ — predykaty «jakościowe» określone na D_r; Sc_ϕ — zbiór transformacji skali dla wielkości reprezentowanej przez funkcję ϕ. Twierdzenie o reprezentacji składa się z dwóch następujących części:

[1a] (twierdzenie o istnieniu) istnieje funkcja ϕ: $D_r \rightarrow D_m$ oraz istnieją formuły matematyczne $A_1, ..., A_n$ takie, że $P_i(x_1,...,x_k) \equiv A_i(\phi(x_1),...,\phi(x_k))$ dla $i = 1,...,n$,

[1b] (twierdzenie o jedyności) jeśli funkcja ϕ: $D_r \rightarrow D_m$ spełnia twierdzenie o istnieniu, to: ϕ' spełnia tw. o istnieniu ztw $\phi' = t \circ \phi$, dla pewnego przekształcenia $t \in Sc_\phi$. .

Obecnie musimy wprowadzić niezmiernie istotne pojęcie — pojęcie „sensu empirycznego". Jak łatwo bowiem się domyślić, nie wszystkie formuły wyrażone w zmatematyzowanym języku teorii empirycznej mają w ogóle szansę mieć swój nominalistyczny odpowiednik. Na pewno nie da się przetłumaczyć nominalistycznie zdań, których prawdziwość zależy np. od wyboru jednostki, czy skali pomiarowej. Nasze rozważania ograniczymy zatem do formuł «sensownych empirycznie». Powiemy, że dana formuła ma sens empiryczny, gdy — mówiąc swobodnie — jej denotacja jest niezmiennikiem transformacji skali. Ściślejsza definicja będzie następująca:

[Df1] Formuła $A(x_1,...,x_n)$ ma sens empiryczny ztw dla każdego przekształcenia p: $D_r \rightarrow D_r$, jeśli istnieje takie $t \in Sc_\phi$, że $\phi \circ p = t \circ \phi$, to $A(x_1,...,x_n) \equiv A(p(x_1),...,p(x_n))$.

Załóżmy zatem, że predykaty jakościowe $P_1,...,P_n$ spełniają twierdzenie o reprezentacji dla wielkości w_ϕ, reprezentowanej w naszym języku przez funkcję pomiarową ϕ. Niech $A(x_1,...,x_k)$ oznacza formułę języka J_m, mającą sens empiryczny, a $R_1,...,R_n$ — denotacje predykatów $P_1,...,P_n$ w dziedzinie D_r. Możemy teraz udowodnić następujące twierdzenie:

[2] Jeśli p jest automorfizmem struktury $\langle D_r, R_1,...,R_n\rangle$, to $A(x_1,...,x_k) \equiv A(p(x_1),...,p(x_k))$, dla dowolnych $x_1,...,x_k$.

Wyjaśnijmy najpierw sens powyższego twierdzenia. Automorfizm struktury jest to przekształcenie dziedziny, zachowujące wszystkie relacje, czyli nie zmieniające denotacji predykatów $P_1,...,P_n$. Twierdzenie [2] głosi, iż każdy automorfizm struktury narzuconej na dziedzinę D_r przez predykaty jakościowe, zachowuje denotację dowolnej formuły matematycznej mającej sens empiryczny. Innymi słowy, gdy tylko ustalona zostanie denotacja predykatów $P_1,...,P_n$, denotacja formuły A jest także ustalona. Własność taką nazywa się niekiedy „identyfikowalnością" lub „definiowalnością *implicite*". Możemy zatem powiedzieć, że każda formuła języka zmatematyzowanej teorii empirycznej jest identyfikowalna (definiowalna *implicite*) przez predykaty jakościowe $P_1,...,P_n$.

Dowód powyższego twierdzenia jest nietrudny. Ponieważ p jest automorfizmem, łatwo się przekonać, że dla dowolnej funkcji pomiarowej ϕ spełniającej twierdzenie o istnieniu, funkcja $\phi \circ p$ także spełnia to twierdzenie. Jest tak dlatego, że jeśli dla pewnej formuły A z języka J_m zachodzi równoważność definiująca predykat jakościowy P_i: $P_i(x_1,...,x_k) \equiv A(\phi(x_1),...,\phi(x_k))$, to zastąpienie funkcji ϕ złożeniem $\phi \circ p$ nie może zmienić wartości logicznej tej równoważności. (Mówiąc w skrócie, złożenie automorfizmu struktury X z homomorfizmem X w Y, jest także homomorfizmem z X w Y.) Zatem z twierdzenia o jedyności wynika, że istnieje pewna transformacja skali t taka, że $\phi \circ p = t \circ \phi$. Z kolei z definicji sensu empirycznego wynika, że denotacja formuły A musi być zachowywana przez przekształcenie p spełniające powyższy warunek. To zaś równoważne jest warunkowi $A(x_1,...,x_k) \equiv A(p(x_1),...,p(x_k))$, co kończy dowód.

Twierdzenie [2] upewnia nas, że dowolna formuła zmatematyzowanej teorii empirycznej, która ma sens empiryczny, jest definiowalna *implicite* przy pomocy predykatów jakościowych. Co jednak z definiowalnością *explicite*? Przy pewnym dodatkowym założeniu warunek ów jest również spełniony. Tym założeniem jest ograniczenie języka teorii empirycznej do języka pierwszego rzędu. W takim wypadku możemy bowiem odwołać się do twierdzenia Betha o definiowalności, stwierdzającego równoważność definiowalności *implicite* z definiowalnością *explicite* (za pomocą odpowiedniej formuły). Mówiąc precyzyjniej, twierdzenie to głosi, iż ilekroć termin A jest identyfikowalny przy pomocy predykatów $P_1,...,P_n$ (tzn. ustalenie denotacji tych predykatów ustala denotację wyrażenia A), tylekroć istnieje formuła α, zawierająca tylko predykaty $P_1,...,P_n$ jako wyrażenia pozalogiczne, taka że $A(x_1,...,x_k) \equiv \alpha(x_1,...,x_k)$. Formuła α stanowi zatem przekład wyrażenia zawierającego terminy matematyczne — na język czysto jakościowy. Kwestia, czy ograniczenie powyższego rezultatu do języków pierwszego rzędu zaburza w istotny sposób jego ogólność, wymaga osobnej analizy. Nie będę obecnie wchodził w jej szczegóły; zauważę tylko, że sam Field — pod wpływem krytyków — zmodyfikował swój program nominalizacji, pierwotnie przeprowadzany dla języków drugiego rzędu, do przypadku języka uboższego [Field, 1990]. W takiej zaś sytuacji nasz rezultat zachowuje ważność.

5. Wójtowicz traktuje Fieldowski program eliminacji matematyki z nauk empirycznych jako swoisty «eksperyment myślowy», i stawia pytanie, czy ów eksperyment jest w ogóle możliwy do realizacji. Odpowiedź na tego typu ogólne pytanie wymaga oczywiście odpowiednich precyzacji. Jak wskazuje sam Wójtowicz, trzeba najpierw zdecydować, co rozumie się przez ową «możliwość» (czy chodzi o możliwość logiczną, fizyczną, czy może techniczną). Dodałbym do tego jeszcze, że należy również sprecyzować zakres terminu „nauki empiryczne". Otóż przeprowadzone wyżej rozważania przekonują nas, że w wypadku teorii empirycznych spełniających dwa warunki: (a) wyrażonych w języku pierwszego rzędu, (b) operujących wielkościami fizycznymi, dla których spełnione są odpowiednie twierdzenia o reprezentacji — sformułowanie ich nominalistycznych odpowiedników jest możliwe *logicznie*.

Chciałbym przy tym zauważyć, że choć możliwość logiczna jest najsłabsza z wszystkich trzech typów możliwości, to jednak wystarcza ona w zupełności dla celów nominalisty. Nominalista bowiem to nie jest człowiek, który żywi tak nieprzeparty wstręt do matematyki, że najchętniej wyrzuciłby ją z programu wszystkich studiów uniwersyteckich, zastępując ją porządnymi teoriami nominalistycznymi. Nominalista pyta jedynie (jak sądzę — zasadnie), czy mamy wystarczające podstawy uznawania prawdziwości dosłownie rozumianych zdań egzystencjalnych typu „Istnieją liczby", „Istnieją zbiory" *etc*. Jedna z możliwych odpowiedzi na to pytanie brzmi: zdania te uznajemy, ponieważ są one konsekwencjami logicznymi akceptowanych przez nas teorii, opisujących świat fizyczny. Zatem gdybyśmy — jak chce nominalista — odrzucili owe tezy egzystencjalne, musielibyśmy odrzucić także i te teorie, sprowadzając naukę do poziomu mniej więcej z czasów Arystotelesa. Jest to niezwykle poważny argument przeciwko nominalizmowi, a jedyną rozsądną linią obrony jest właśnie pokazanie, że dla każdej teorii empirycznej w obecnym sformułowaniu, istnieje równoważna jej empirycznie teoria nominalistyczna. Nie ma przy tym znaczenia, czy potrafimy skonstruować faktycznie taką teorię, podobnie jak nie ma znaczenia w wypadku niekonstruktywnych dowodów istnienia w matematyce, że dowody te nie podają efektywnej metody konstrukcji obiektu, którego istnienie stwierdzają (nominalista nie musi być konstruktywistą). Nominalista «uzbrojony» w takie niekonstruktywne twierdzenie może już ze spokojem uczyć się współczesnej fizyki, traktując występujący tam aparat matematyczny jako niezwykle użyteczne — ale *tylko* — narzędzie.

Formułując całościową ocenę koncepcji Fielda nie powinniśmy zapominać także o jeszcze jednym jej aspekcie. W przeciwieństwie do innych prób obrony nominalizmu, metoda zaproponowana przez Fielda może być interesująca nie tylko dla tych, którzy akceptują ontologiczne stanowisko autora *Science without Numbers*. Field bowiem analizuje jeden z najważniejszych — moim zdaniem — problemów współczesnej filozofii nauki, czyli problem stosowalności matematyki w naukach przyrodniczych. Pytanie, jak to się dzieje, że matematyka daje się z powodzeniem zastosować do opisu świata fizycznego, zachowuje swoją ważność niezależnie od przyjętego stanowiska ontologicznego. Na to pytanie również uzyskujemy odpowiedź w ramach programu Fielda. Dodajmy, że w ogóle wiele tez, które formułuje Field, jest akceptowalnych nie tylko przez nominalistę. Wbrew temu np., co twierdzi Wójtowicz, taką tezą jest twierdzenie o nietwórczości matematyki, które wynika nie tyle ze stanowiska nominalistycznego, co z założenia apriorycznego charakteru matematyki.

Sądzę zatem, że krytyk koncepcji Fielda powinien skoncentrować się nie na kwestii technicznej możliwości przeprowadzenia programu nominalizacji, lecz na kwestii zakresu tego programu. Tutaj bowiem niewątpliwie tkwi słabość nominalisty typu Fielda. Wójtowicz słusznie zauważa, że nominalizacja Newtonowskiej teorii grawitacji to zdecydowanie za mało — chociaż nie zgadzam się z jego opinią, że „przykład teorii grawitacji Newtona jest odległy od fizyki współczesnej" (studenci II roku fizyki uniwersyteckiej nie uczą się przecież tej teorii wyłącznie jako ciekawostki historycznej). Uogólnienie, jakie naszkicowałem w niniejszym artykule, posuwa nas krok naprzód; nie na tyle jednak daleko, aby objąć programem nominalizacyjnym takie teorie, jak np. mechanikę kwantową (zwracał na to uwagę m.in. D. Malament). Cóż więc pozostaje nominaliście? Sądzę, że jest on dokładnie w takiej samej sytuacji, jak np. fizyk-teoretyk poszukujący jednej, zunifikowanej Teorii Wszystkiego (*Theory of Everything*). Osiągnięto niewątpliwie pewne sukcesy na drodze do tej teorii, jednakże wynik końcowy jest ciągle wątpliwy. Nie znaczy to jednak, że należy zaprzestać wszelkich prób w tym kierunku. Podobnie oceniałbym sytuację nominalisty — mimo wszelkich uwag krytycznych pewne sukcesy są, a na dalsze trzeba być może cierpliwie zaczekać.

Byle tylko w polemicznym zapale nie zatracić zdolności chłodnej oceny sytuacji — ale tę uwagę kieruję do obu stron sporu filozoficznego[2].

Literatura cytowana

John P. Burgess

1982 — „Why I am not a nominalist", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 24, nr 1, s. 93-105.

Charles Chihara

1990 — *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford.

Hartry Field

1980 — *Science without Numbers*, Princeton University Press, Princeton.

1989 — „Introduction: fictionalism, epistemology and modality", [w:] *Realism, Mathematics, Modality*, Basil Blackwell, Oxford.

1990 — „Mathematics without truth", *Pacific Philosophical Quarterly* 71, s. 206-222.

David H. Krantz i in.

1971 — *Foundation of Measurement*, Vol. I, Academic Press, New York — London.

David Malament

1982 — Review of *Science without Numbers*, *Journal of Philosophy*, 79, s. 523-534.

Michael Resnik

1985 — „How nominalist is Hartry Field's nominalism?", *Philosophical Studies*, 47, s. 163-181.

[2] Sądzę, że przykładem złamania tego postulatu może być argumentacja J. Burgessa, którego zresztą z aprobatą cytuje Wójtowicz [Burgess, 1982]. W swoim artykule Burgess nakłada na nominalizm warunki niemożliwe do spełnienia. Twierdzi mianowicie, że teza nominalizmu byłaby do obrony tylko wówczas, gdyby ewentualne nominalistyczne wersje obecnych teorii były istotnie *lepsze* (płodniejsze, ekonomiczniejsze) od swoich realistycznych odpowiedników. Burgess, jak sądzę, nie zdaje sobie sprawy z zasadniczego faktu, że cała konstrukcja Fielda ma na celu nie dostarczenie *pozytywnego* argumentu za nominalizmem (argumentów pozytywnych należy szukać raczej w kłopotach, jakie pociąga realizm — por. [Field, 1989], szczególnie paragraf „Problems with Platonism"), lecz odparcie argumentu za realizmem (*indispensability argument*). Aby pokazać, że założenie o istnieniu obiektów abstrakcyjnych nie jest niezbędne w nauce, nie trzeba dowodzić, że nauka «nominalistyczna» jest lepsza od «realistycznej».