Filozofia Nauki
Rok III, 1995, Nr 4(12)

Tomasz Bigaj

Jakościowe teorie czasoprzestrzeni[1]

Za jedno z najpoważniejszych wyzwań dla stanowiska, negującego istnienie przedmiotów abstrakcyjnych — a ogólniej, dla wszelkich stanowisk, podających w wątpliwość istnienie jakiegokolwiek związku ontologicznego pomiędzy światem fizycznym a domniemanym światem obiektów abstrakcyjnych — uważam fakt stosowalności matematyki przy opisie rzeczywistości fizycznej. Dokładniej, chodzi tu o znany powszechnie fakt, że niemal wszystkie teorie fizyczne stosują (nierzadko bardzo zaawansowany) aparat matematyczny — czyli, zgodnie z Quine'owskim kryterium zobowiązań ontologicznych, zakładają istnienie całego szeregu obiektów matematycznych: liczb, wektorów, tensorów, rozmaitości różniczkowalnych itd. Co więcej, ze względu na to, że aparat matematyczny wydaje się niezbędny do wyrażenia naszej wiedzy o świecie fizycznym, można przypuszczać, iż istnieje jakaś korelacja pomiędzy światem bytów abstrakcyjnych a dziedziną bytów fizycznych. Hipotezę tę określa się czasem mianem „tezy o matematyczności przyrody". Teza ta rodzi jednak szereg trudności natury ontologicznej i epistemologicznej, stąd też niektórzy próbują podważyć założenie o niezbędności matematyki w teoriach empirycznych.

Najdalej idącą próbę w tym kierunku podjął Hartry Field, który usiłował pokazać, że jest możliwe dla standardowych teorii fizycznych, sformułowanie empirycznie równoważnych odpowiedników, nie posługujących się jednakże terminami matematycznymi *sensu stricto.*[2] Przyjęta przez niego metoda postępowania polega, w najogólniejszych zarysach, na wprowadzeniu do języka zmatematyzowanych teorii empirycznych zestawu predykatów «jakościowych», określonych na zbiorze obiektów materialnych, a następnie na pokazaniu, że przy pomocy tych predykatów można

[1] Praca niniejsza została napisana w ramach grantu KBN 1 H01A 024 10.

[2] Por. H. Field, *Science without Numbers*, Princeton 1980.

wyrazić każde pojęcie definiowalne w tej teorii. W ten sposób teoria wyjściowa może zostać zastąpiona teorią sformułowaną przy pomocy samych tylko predykatów jakościowych. W swojej konstrukcji Field posługuje się metodą przejętą z ogólnej teorii pomiaru (kluczową rolę odgrywa w niej tzw. twierdzenie o reprezentacji). Teorią fizyczną, którą udało się Fieldowi przełożyć na język jakościowy, jest Newtonowska teoria grawitacji. Jako krok wstępny do swojej konstrukcji, Field sformułował również zarys jakościowej teorii czasoprzestrzeni Galileusza.[3]

W niniejszej pracy chciałbym nieco dokładniej zająć się problemem jakościowego sformułowania dwóch teorii czasoprzestrzeni: teorii Galileusza i teorii Minkowskiego (relatywistycznej). Ogólny sposób postępowania, przyjęty w pracy, będzie zgodny z metodą Fielda, aczkolwiek chciałbym nieco większy nacisk położyć na stronę techniczną proponowanych rozstrzygnięć. W szczególności zależy mi na tym, aby pokazać, że przy pomocy odpowiedniego zestawu predykatów jakościowych możliwe jest odtworzenie pełnej matematycznej struktury czasoprzestrzeni — zarówno Galileuszowskiej, jak i relatywistycznej.

Struktura niniejszej pracy jest następująca. Rozważania swoje zacznę od przedstawienia standardowego matematycznego ujęcia tzw. przestrzeni afinicznych, stanowiących podstawę dla sformułowania obu wspomnianych teorii czasoprzestrzeni. Następnie pokażę, że przy pomocy jednego predykatu jakościowego można zdefiniować całą matematyczną strukturę przestrzeni afinicznej. Okazuje się zatem, że matematyczna teoria przestrzeni afinicznych jest definicyjnym rozszerzeniem pewnej teorii jakościowej. W paragrafie 2 przejdę do analizy teorii Galileuszowskiej. Znowu zacznę od przedstawienia jej matematycznego ujęcia, by następnie sformułować wersję jakościową. Analogiczną konstrukcję dla wypadku czasoprzestrzeni Minkowskiego, przeprowadzę w paragrafie 3.

W trakcie wspomnianych konstrukcji formułować będę odpowiednie definicje pojęć matematycznych (niekiedy dość skomplikowane), przy pomocy zestawu predykatów jakościowych. Definicje te wymagają oczywiście dowodu poprawności — tzn. musimy mieć pewność, że definiowane pojęcia są rzeczywiście tożsame ze standardowymi pojęciami matematycznymi. W niniejszym artykule zamieszczam dowody poprawności, które można by nazwać «wewnętrznymi», tzn. będę pokazywał, że formułowane definicje są dowodliwe na gruncie zmatematyzowanych teorii czasoprzestrzeni. Można również mówić o poprawności «zewnętrznej» definicji — chodzi wtedy o to, czy aksjomaty, ustalające sens odpowiednich predykatów jakościowych, gwarantują poprawność takich definicji (np. jednoznaczność, czy istnienie). Tą kwestią nie będę się zajmował, odsyłając Czytelnika do literatury.

[3] Krytyczne omówienie koncepcji Fielda można znaleźć np. w: K. Wójtowicz, „Czy matematyka jest niezbędna w nauce?", *Filozofia Nauki* 3-4(1994), s. 141-160. Por. również moją polemikę: T. Bigaj, „Kilka uwag w sprawie niezbędności matematyki w nauce", *ibid.*, s. 161-173.

1. Przestrzenie afiniczne

Przestrzeń afiniczna jest to trójka $(E, V, +)$, gdzie E jest niepustym zbiorem, V — przestrzenią wektorową, a $+$ — dwuargumentową operacją ($+$: $E \times V \rightarrow E$), spełniającą następujące warunki:

(1) $\forall x \in E\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\ (x + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = x + (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})$;

(2) $\forall x \in E\ x + \mathbf{0} = x$;

(3) $\forall x \in E\ \forall \mathbf{u} \in V\ x + \mathbf{u} = x \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$;

(4) $\forall x, y \in E\ \exists \mathbf{u} \in V\ x + \mathbf{u} = y$,

gdzie $\oplus$ jest operacją dodawania wektorów w przestrzeni V, a $\mathbf{0}$ — to wektor zerowy.[4]

Warunki powyższe gwarantują, że w przestrzeni afinicznej określona jest operacja «dodawania» wektora do punktu, czego rezultatem jest pewien punkt. Warunek (4) zapewnia, że dla każdych dwóch punktów istnieje wektor taki, że dodany do pierwszego z tych punktów daje punkt drugi. Korzystając z powyższych warunków oraz definicyjnych własności przestrzeni wektorowych łatwo można udowodnić, że dla każdych punktów x i y istnieje dokładnie jeden wektor, spełniający warunek (4). Wektor ten będziemy nazywać „różnicą punktów y i x" i oznaczać go przez „$y - x$".

Struktura narzucona na zbiór punktów E przez operację $+$ pozwala na wprowadzenie w E układu współrzędnych. Niech $o \in E$ będzie pewnym wyróżnionym elementem E. Można wtedy zdefiniować odwzorowanie ϕ: $E \rightarrow V$ takie, że $\phi(x) = x - o$ (ϕ przyporządkowuje każdemu punktowi wektor, będący różnicą tego punktu i punktu o). Łatwo widać, że $\phi(o) = \mathbf{0}$. Punkt o ma, jak łatwo się domyślić, odgrywać rolę początku układu współrzędnych. Niech teraz $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ będzie bazą n-wymiarowej przestrzeni V. Para $(o, \mathbf{e})$ wyznacza układ współrzędnych w E, tzn odwzorowanie przyporządkowujące każdemu punktowi z E n-tkę liczb rzeczywistych. Odwzorowanie to definiujemy następująco. Weźmy dowolny $x \in E$. Z definicji funkcji ϕ mamy, że $x = o + \phi(x)$. Rozłóżmy teraz wektor $\phi(x)$ względem bazy $\mathbf{e}$: $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \mathbf{e}_i$. Współczynniki rozkładu $(v_1, ..., v_n)$ są żądanymi współrzędnymi punktu x. Jak widać, współrzędne punktu o wynoszą $(0, ..., 0)$.

W teorii przestrzeni afinicznych niezmiernie istotną rolę odgrywają tzw. przekształcenia afiniczne — czyli automorfizmy struktury afinicznej. Dokładniej, „przekształceniem afinicznym" nazwiemy parę odwzorowań (f, α_f), gdzie f: $E \underset{na}{\overset{1-1}{\rightarrow}} E$, α_f: $V \underset{na}{\overset{1-1}{\rightarrow}} V$, oraz spełniony jest warunek:

$\forall x, y \in E\ \forall \mathbf{u} \in V\ x + \mathbf{u} = y \equiv f(x) + \alpha_f(\mathbf{u}) = f(y)$.

Sprawdźmy dokładniej, jaką postać mają przekształcenia afiniczne. Z warunku (1) definicji przestrzeni afinicznej wynika, że α_f musi być przekształceniem liniowym, tzn. $\alpha_f(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha_f(\mathbf{u}) \oplus \alpha_f(\mathbf{v})$ i $\alpha_f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \alpha_f(\mathbf{u})$, gdzie λ jest liczbą rzeczywistą. Zatem w

---

[4] Por. np. W. Kopczyński, A. Trautman, *Czasoprzestrzeń i grawitacja*, Warszawa 1984, s. 45 i nast.

pewnej bazie przestrzeni *V* odwzorowanie α_f ma postać macierzy $n \times n$ o wyznaczniku różnym od zera. Zauważmy ponadto, że każde przekształcenie α_f określa odwzorowanie f z dokładnością do translacji. Rozważmy bowiem wyróżniony punkt o w E. Dla dowolnego punktu x, $f(x) = f(o) + \alpha_f(\mathbf{u})$. Jeśli teraz dane jest odwzorowanie α_f oraz punkt $o' = f(o)$, to wartość $f(x)$ jest ustalona dla każdego x.

Na teorię przestrzeni afinicznych można spojrzeć jako na teorię tych własności zwykłej przestrzeni euklidesowej, które nie ulegają zmianie przy przekształceniach afinicznych. Okazuje się, że podstawową własnością geometryczną, zachowywaną przy przekształceniach afinicznych, jest własność współliniowości. Łatwo to zauważyć, zważywszy że w teorii przestrzeni afinicznych można zdefiniować prostą. Prosta, wyznaczona przez punkt x_0 i wektor (kierunek) $\mathbf{v}$ jest to zbiór punktów $\{x: x = x_0 + \lambda\mathbf{v}, \lambda \in R\}$. Przekształcenia afiniczne nie zachowują natomiast euklidesowej odległości pomiędzy punktami — tzn. dwa odcinki równej długości, po transformacji afinicznej nie będą na ogół równe.

Z tego właśnie powodu geometria afiniczna nadaje się jako punkt wyjścia do matematycznego opisu czasoprzestrzeni. Jak bowiem wiadomo, w czasoprzestrzeni nie można porównywać ze sobą miar niektórych odcinków — nie można np. porównać odcinka czasowego, trwającego 20 sekund, z odcinkiem przestrzennym o długości 20 metrów. Czasoprzestrzeń nie może zatem być przestrzenią euklidesową, a tylko afiniczną, z ewentualnymi dodatkowymi własnościami matematycznymi, zależnymi od przyjętych rozstrzygnięć fizycznych.

Jakościowa teoria przestrzeni afinicznych operuje jednym terminem pierwotnym. Jest to trójargumentowy predykat Bet(x, y, z), którego sens intuicyjny jest następujący: y znajduje się pomiędzy x a z, na linii prostej łączącej x z z (y może być również tożsame z x lub z). Definicja predykatu Bet na gruncie wprowadzonej wcześniej matematycznej teorii przestrzeni afinicznych, może być następująca:

$$\mathrm{Bet}(x, y, z) \equiv \exists\lambda \in R\ 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ i } (y - z) = \lambda(z - x),$$

tzn. wektor łączący punkty x i y jest równy iloczynowi dodatniej liczby rzeczywistej nie większej od 1 i wektora łączącego z i y. Widać, że skoro predykat Bet można zdefiniować w ramach struktury afinicznej, musi być on niezmienniczy ze względu na przekształcenia afiniczne.

Powyższa definicja terminu Bet ma dla nas jednak charakter wyłącznie poglądowy. Chodzi nam bowiem nie o to, aby zdefiniować predykat Bet przy pomocy terminów matematycznej teorii afinicznej, lecz — na odwrót — chcemy pokazać, że cała matematyczna struktura afiniczna może być nadbudowana nad tym jednym predykatem. Będziemy przy tym zakładać, że sens predykatu Bet dany jest przy pomocy odpowiednich aksjomatów.[5]

[5] Aksjomaty te, w wersji elementarnej, można znaleźć np. w pracy: L.W. Szczerba, A. Tarski, „Metamathematical Properties of Some Affine Geometries", [w:] Y. Bar-Hillel (red.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Amsterdam 1965, s.168-178.

Obecnie zdefiniujemy przy pomocy predykatu Bet kilka pojęć pomocniczych, mających prostą interpretację geometryczną. Pierwszym z nich będzie pojęcie „współliniowości" (wyrażenie „x y i z są współliniowe" zapiszemy, jako „Col(x, y, z)")

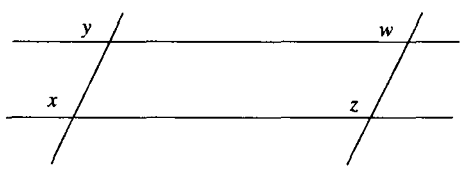
(1) $\mathrm{Col}(x, y, z) \equiv \mathrm{Bet}(x, y, z) \vee \mathrm{Bet}(y, x, z) \vee \mathrm{Bet}(z, x, y)$.

Definicje kolejnych pojęć są następujące:

(2) $\mathrm{Coplan}(x, y, z, w) \equiv \exists v\, [\mathrm{Bet}(x, v, y) \wedge \mathrm{Bet}(z, v, w)] \vee \exists v\, [\mathrm{Bet}(x, v, w) \wedge \mathrm{Bet}(y, v, z)] \vee \exists v\, [\mathrm{Bet}(x, v, z) \vee \mathrm{Bet}(y, v, w)]$,

(3) $\mathrm{Par}(x, y, z, w) \equiv \mathrm{Coplan}(x, y, z, w) \wedge \sim\exists v\, [\mathrm{Col}(x, y, v) \wedge \mathrm{Col}(z, w, v)] \wedge \sim\exists v\, [\mathrm{Col}(y, w, v) \wedge \mathrm{Col}(x, z, v)]$.

Predykat Coplan(x, y, z, w) czytamy jako „x, y, z, i w leżą na jednej płaszczyźnie", a Par(x, y, z, w) jako „x, y, z, w są wierzchołkami równoległoboku" (por. rys. 1).

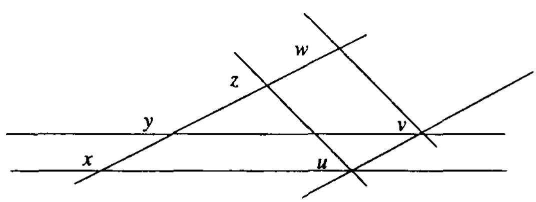


Rys. 1

Podane definicje mają charakter pomocniczy i służą jedynie wprowadzeniu kluczowego pojęcia „równości odcinków równoległych". Jak wspominaliśmy już wcześniej, w geometrii afinicznej nie ma sensu ogólne pojęcie „równości odcinków" („kongruencji"). Jednakże kongruencja pomiędzy odcinkami równoległymi jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych. Obecnie sformułujemy definicję tego pojęcia.

W istocie już predykat Par zdefiniowany w punkcie (3) jest zbliżony do szukanego terminu. Jeśli bowiem punkty x, y, z i w tworzą równoległobok, to odcinki xy i zw są równoległe i równe. Jednakże definicja (3) nie obejmuje sytuacji, w której punkty x, y, z i w są współliniowe. Dlatego też należy ją zmodyfikować (por. rys. 2):

(4) $\mathrm{Conpar}(x, y, z, w) \equiv \exists u, v\, [\mathrm{Par}(x, y, u, v) \wedge \mathrm{Par}(z, w, u, v)]$.



Rys. 2

Predykat Conpar odczytamy następująco: proste przechodzące przez x i y oraz przez z i w są równoległe (bądź tożsame) oraz odległość między x a y równa jest odległości między z a w, a dodatkowo — wektory skierowane od x do y i od z do w mają ten sam zwrot.

Teraz możemy przystąpić do skonstruowania pełnej struktury przestrzeni afinicznej, opartej wyłącznie na predykacie Bet. Punktem wyjścia jest zdefiniowanie na zbiorze par punktów $E \times E$ następującej relacji równoważnościowej:

$\langle x, y\rangle \sim \langle z, w\rangle \equiv \mathrm{Conpar}(x, y, z, w)$.

Przyjmiemy bez dowodu, że relacja $\sim$ istotnie ma własności: zwrotności, symetryczności i przechodniości. Warunki te są w oczywisty sposób spełnione, jeśli odwołamy się do intuicyjnej, geometrycznej interpretacji predykatu Conpar — a zatem można je również udowodnić na gruncie każdej adekwatnej aksjomatyki predykatu Bet. Relacja $\sim$ posłuży nam, jak łatwo się domyślić, do zdefiniowania na zbiorze $E \times E$ klas abstrakcji:

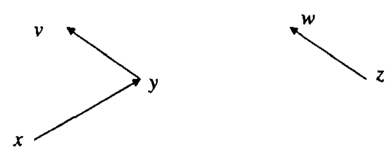
$[\langle x, y\rangle]_{\sim} = \{\langle u, w\rangle : \langle x, y\rangle \sim \langle u, w\rangle\}$.

Zbiór klas abstrakcji $E \times E/_{\sim}$ będziemy teraz utożsamiać z przestrzenią wektorową V, a pojedynczą klasę $[\langle x, y\rangle]_{\sim}$ z wektorem, którego początek znajduje się w punkcie x, a koniec w y. Wektorem zerowym w przestrzeni V będzie oczywiście klasa $[\langle x, x\rangle]_{\sim}$. Określmy następnie na naszym zbiorze V operację dodawania oraz mnożenia przez liczbę rzeczywistą (w dalszym ciągu, dla uproszczenia zapisu, symbolem „$\langle x, y\rangle$" oznaczać będziemy całą klasę abstrakcji, do której należy para $\langle x, y\rangle$):

$\langle x, y\rangle + \langle z, w\rangle = \langle x, v\rangle$,

gdzie punkt v spełnia następujący warunek:

$\mathrm{Conpar}(y, v, z, w)$ (por. rys. 3).



Rys. 3

Poprawność (tzn. jednoznaczność) tej definicji opiera się na następującym założeniu: $\forall y, z, w\ \exists! v\ \mathrm{Conpar}(y, v, z, w)$. Prawdziwość tego założenia wynika w sposób natychmiastowy z geometrycznej interpretacji predykatu $\mathrm{Conpar}(y, v, z, w)$.

Definicja operacji mnożenia wektora przez liczbę jest bardziej skomplikowana i wymaga pewnych kroków pośrednich. Przyjęty sposób postępowania będzie następujący: najpierw zdefiniujemy wyrażenie $\lambda \cdot \langle x, y\rangle$ dla λ należących do liczb naturalnych, następnie rozszerzymy definicję na liczby całkowite i wymierne, aż wreszcie, wykorzystując aksjomat ciągłości, wprowadzimy pełną definicję dla liczb rzeczywistych. Wspomniane definicje będą miały charakter indukcyjny.

(1) $1 \cdot \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$,

(2) $(n + 1) \cdot \langle x, y\rangle = n \cdot \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle$.

Analogicznie dla liczb całkowitych:

(1) $-1 \cdot \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(2) $-(n+1)\cdot\langle x, y\rangle = -n\cdot\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$.

Dodajmy, że dla 0 mamy: $0\cdot\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle$. Definicja dla liczb wymiernych przedstawia się następująco. Niech a i b będą liczbami całkowitymi. Wtedy dowolną liczbę wymierną można przedstawić jako iloraz a i b.

$$\frac{a}{b}\langle x, y\rangle = \langle z, w\rangle \equiv a\cdot\langle x, y\rangle \sim b\cdot\langle x, y\rangle.$$

Dla wypadku liczb rzeczywistych skorzystamy z faktu, że każda liczba rzeczywista może być przedstawiona w postaci ciągu Cauchy'ego liczb wymiernych. Niech ciąg $\{x_n\}$ reprezentuje liczbę r. Wtedy dla danego wektora $\langle x, y\rangle$ można zdefiniować ciąg wektorów $\{\mathbf{v}_n\}$, taki że $\mathbf{v}_n = x_n\cdot\langle x, y\rangle$. Iloczynem liczby r przez wektor $\langle x, y\rangle$ będzie wektor $\langle x, z\rangle$, taki że dla każdego otoczenia punktu z na prostej łączącej z z x istnieje taki element ciągu $\{\mathbf{v}_n\}$, że każdy następny element tego ciągu $\langle x, x_k\rangle$ ma taką własność, iż punkt x_k znajduje się w tym otoczeniu.

Nietrudno sprawdzić, że operacje: dodawania oraz mnożenia przez liczbę, spełniają aksjomaty przestrzeni wektorowej. Aby teraz wprowadzić do opisu przestrzeni E pojęcie przestrzeni afinicznej, należy zdefiniować dodawanie wektora do punktu, co jest łatwym zadaniem:

$$x + \langle y, z\rangle = v \equiv \langle x, v\rangle \sim \langle y, z\rangle.$$

Sprawdźmy jeszcze, że przy powyższej interpretacji operacji + warunki (1) - (4) z definicji przestrzeni afinicznej są spełnione.

Punkt (1). Z powyższej definicji mamy, że dla dowolnych punktów x, y, z, u, v, $(x + \langle y, z\rangle) + \langle u, v\rangle = z' + \langle u, v\rangle = v'$, gdzie $\langle x, z'\rangle \sim \langle y, z\rangle$ i $\langle z', v'\rangle \sim \langle u, v\rangle$. Z drugiej strony mamy z definicji, że $v' = x + \langle x, v'\rangle$. Ale z definicji dodawania wektorów wynika, że $\langle x, v'\rangle = \langle x, z'\rangle + \langle u, v\rangle$, i ponieważ $\langle x, z'\rangle \sim \langle y, z\rangle$, więc $\langle x, v'\rangle = \langle y, z\rangle + \langle u, v\rangle$. Ostatecznie zatem mamy, że $(x + \langle y, z\rangle) + \langle u, v\rangle = x + (\langle y, z\rangle + \langle u, v\rangle)$, co kończy dowód punktu (1).

Punkt (2). Jest natychmiastowy: $x + \langle x, x\rangle = x$.

Punkt (3). Jeżeli $x + \langle x, y\rangle = x$, to $\langle x, x\rangle \sim \langle x, y\rangle$, a stąd $\langle x, y\rangle = \mathbf{0}$.

Punkt (4). Weźmy dowolne x i y. Niech $\mathbf{u} = \langle x, y\rangle$. Wtedy $x + \langle x, y\rangle = v \equiv \langle x, v\rangle \sim \langle x, y\rangle \equiv v = y$.

Osiągnęliśmy zatem żądany cel: korzystając jedynie z predykatu Bet, zdefiniowaliśmy całą strukturę przestrzeni afinicznej na zbiorze E. Można zatem utrzymywać, że teoria przestrzeni afinicznych to w istocie teoria jednej relacji Bet, a cały aparat matematyczny pełni jedynie rolę pomocniczą, instrumentalną.

2. Czasoprzestrzeń Galileusza

Matematyczne ujęcie czasoprzestrzeni Galileusza jest następujące. Czasoprzestrzeń Galileusza jest to piątka $(E, V, +, \tau, h)$, gdzie:

(1) $(E, V, +)$ jest przestrzenią afiniczną,

(2) $\dim V = 4$,

(3) $\tau\colon V \to \mathrm{R}^1$ jest odwzorowaniem liniowym,

(4) $h\colon S \times S \to \mathrm{R}^1$, gdzie $S = \ker\tau$, oraz h spełnia warunki:

(a) dwuliniowości (liniowość dla obu argumentów),

(b) dodatniej określoności ($\forall \mathbf{v}\ h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$),

(c) symetryczności ($\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}\ h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{u})$).

Krótki komentarz. Z powyższego określenia widać, że czasoprzestrzeń Galileusza jest czterowymiarową przestrzenią afiniczną, na której określono dwa odwzorowania. Funkcja τ reprezentuje, jak łatwo się domyślić, współrzędną czasową wektorów. Czas bowiem, w ujęciu klasycznym, pełni wyróżnioną rolę. Symbol „kerτ" oznacza zbiór tych wszystkich wektorów, których współrzędna czasowa jest równa zeru — $\{\mathbf{v} \in V: \tau(\mathbf{v}) = 0\}$. Na tym zbiorze określony jest tzw. iloczyn skalarny h.

Nietrudno sprawdzić, że zbiór $S = \ker\tau$ jest podprzestrzenią przestrzeni V o wymiarze 3. Weźmy taki wektor $\mathbf{v}_0$, dla którego $\tau(\mathbf{v}_0) = 1$. Z liniowości τ mamy, że $\tau(\lambda\mathbf{v}_0) = \lambda$. Weźmy teraz dowolny wektor $\mathbf{v}$, dla którego $\tau(\mathbf{v}) = \lambda$ i rozłóżmy go na sumę $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$. Ponieważ $\tau(\mathbf{v}) = \lambda + \tau(\mathbf{u})$, więc $\tau(\mathbf{u}) = 0$, co pokazuje, że $\mathbf{u} \in \ker\tau$. Zatem każdy wektor z V można rozłożyć na sumę dwóch wektorów, z których jeden jest równoległy do ustalonego wektora $\mathbf{v}_0$, a drugi należy do $\ker\tau$, tzn. V da się przedstawić w postaci sumy prostej podprzestrzeni jednowymiarowej rozpiętej przez $\mathbf{v}_0$ i zbioru S, a więc $\dim S = 3$. Wektory należące do S nazywać będziemy dalej „wektorami przestrzennymi", a pozostałe — „czasowymi".

Funkcję τ można łatwo rozszerzyć na zbiór punktów E. Niech o będzie, jak poprzednio, wyróżnionym punktem (początek układu). Wtedy $\tau(x) = \tau(x - o)$ dla dowolnego x. Rozpatrzmy teraz takie dwa punkty x, y, dla których $\tau(x) = \tau(y)$. Przy pomocy wprowadzonego aparatu pojęciowego możemy zdefiniować odległość pomiędzy x i y. Ponieważ $\tau(x - o) = \tau(y - o)$, więc $\tau(x - y) = \tau[(x - o) - (y - o)] = 0$, a zatem $x - y \in S$, czyli dla wektora $x - y$ określony jest iloczyn skalarny h. Odległość między x a y będzie zatem określona wzorem: $d(x, y) = \sqrt{h(x - y, x - y)}$. Widać więc, że w czasoprzestrzeni Galileusza można mierzyć odległość między punktami czasoprzestrzeni o tych samych współrzędnych czasowych. Nie można natomiast tego zrobić dla dwóch punktów nierównoczesnych — wypływa to z faktu, że w czasoprzestrzeni Galileusza nie jest określona «przestrzeń absolutna», czy też «absolutny spoczynek». Innymi słowy, czasoprzestrzeń Galileusza nie ma pełnej struktury przestrzeni euklidesowej, rozwarstwia się natomiast na popdprzestrzenie euklidesowe, zawierające punkty wzajemnie równoczesne.

Zauważmy, że w czasoprzestrzni Galileusza linie proste, definiowalne w geometrii afinicznej, uzyskują specjalną interpretację. Niech $\mathbf{u}$ będzie dowolnym niezerowym wektorem przestrzennym. Wtedy prosta zdefiniowana jako zbiór $\{\mathbf{v}: \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}\}$ będzie zwykłą linią prostą w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa. Jeśli natomiast wybierzemy jako $\mathbf{u}$ pewien wektor czasowy, to prosta zdefiniowana powyżej reprezentować będzie linię świata ciała, poruszającego się ruchem jednostajnym i prostoliniowym, czyli — mówiąc w skrócie — pewien układ inercjalny.

Standardowe, podręcznikowe ujęcie czasoprzestrzeni Galileusza operuje układem współrzędnych określonym na zbiorze punktów E. Taki układ nie jest trudno wprowadzić w ramach naszej struktury. Wybierzmy mianowicie cztery wektory $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, takie że $\tau(\mathbf{e}_0) = 1$ i $\tau(\mathbf{e}_i) = 0$ dla $i = 1, ..., 3$, czyli $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in S$. Załóżmy ponadto, że $h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ dla $i, j = 1, ..., 3$, tzn. wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ są wzajemnie prostopadłe i mają jednostkową długość. Nietrudno sprawdzić, że z własności iloczynu h wynika, iż wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ są liniowo niezależne, a ponieważ wymiar podprzestrzeni S wynosi 3, są one bazą tej podprzestrzeni. Z wcześniejszych rozważań wiemy ponadto, że każdy wektor w V można rozłożyć na składową równoległą do $\mathbf{e}_0$ i składową, należącą do S, a zatem czwórka $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ stanowi bazę przestrzeni V. Jeśli teraz weźmiemy dowolny punkt x w przestrzeni E, to jego współrzędne można określić standardowo — rozkładając wektor $x - o$ względem bazy $\mathbf{e}$ i biorąc współczynniki rozkładu jako jego odpowiednie współrzędne. Łatwo widać, że pierwsza współrzędna x-a wynosić będzie $\tau(x)$ — jest to zatem współrzędna czasowa.

Zwróćmy jeszcze uwagę na następujący fakt. Układ współrzędnych w czasoprzestrzeni Galileusza przedstawia się zwykle graficznie jako kartezjański układ współrzędnych, z osiami wzajemnie prostopadłymi (oś czasowa zwykle zaznaczana jest pionowo). Jest to jednak pewne uproszczenie, które może prowadzić do nieporozumień. W teorii Galileusza nie można w ogóle mówić o prostopadłości wektorów czasowych do wektorów przestrzennych — nie pozwala na to wprowadzony aparat matematyczny, który operuje iloczynem skalarnym jedynie na zbiorze wektorów przestrzennych. Gdyby było możliwe wprowadzenie pojęcia prostopadłości pomiędzy wektorami czasowymi a przestrzenymi, to łatwo można byłoby wprowadzić również pojęcie „absolutnego spoczynku". Aby to pokazać, załóżmy, że dla każdego wektora czasowego można stwierdzić, czy jest on prostopadły do jakiegoś wektora przestrzennego. Nie jest trudno udowodnić, że w takim wypadku istniałby wektor czasowy, który byłby prostopadły do wszystkich wektorów przestrzennych. Można by więc następująco zdefiniować dla dowolnych punktów czasoprzestrzennych x i y predykat „x znajduje się w tym samym miejscu, co y" — „wektor $x - y$ jest prostopadły do dowolnego wektora przestrzennego". Pojęcie to musiałoby być oczywiście niezmienicze ze względu na przekształcenia Galileuszowskie, co pokazuje, że wprowadziliśmy pojęcie „absolutnego spoczynku".

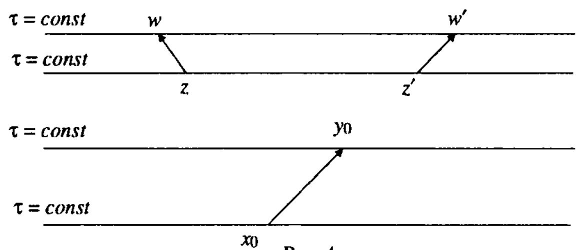
Na koniec tego krótkiego szkicu matematycznego ujęcia czasoprzestrzeni Galileusza, przypomnijmy może pojęcie transformacji Galileuszowskich. Jak zwykle ma się tu na myśli po prostu automorfizmy przedstawionej powyżej struktury. Na uwagę zasługuje jedynie fakt, że w takim ujęciu przekształcenie Galileusza nie może zmieniać wartości funkcji τ ani iloczynu h, co znaczy, że miary czasu i przestrzeni stają się w pewnym sensie «absolutne». Jest to pewna niedogodność przyjętego aparatu pojęciowego. Jak się okaże, niedogodności tej pozbawione jest ujęcie jakościowe przestrzeni Galileuszowskiej, które obecnie przedstawimy.

Ujęcie jakościowe opierać się będzie na jakościowej teorii przestrzeni afinicznych, rozszerzonej o dwa nowe predykaty: $\mathrm{Sim}(x, y)$ oraz $\mathrm{Consim}(x, y, z, w)$. Intuicyjny sens tych predykatów jest następujący: $\mathrm{Sim}(x, y)$ czytamy jako „x jest równoczesne z y", a $\mathrm{Consim}(x, y, z, w)$ — „x jest równoczesne z y i z jest równoczesne z w, i odległość między x a y jest równa odległości między z a w". Oba predykaty można łatwo zdefiniować przy pomocy wyżej sformułowanego aparatu matematycznego:

$\mathrm{Sim}(x, y) \equiv \tau(x) = \tau(y)$;

$\mathrm{Consim}(x, y, z, w) \equiv \tau(x) = \tau(y) \wedge \tau(z) = \tau(w) \wedge h(x - y, x - y) = h(z - w, z - w)$.

Obecnie pokażemy, że trzy podane predykaty wystarczają do wprowadzenia pełnej struktury matematycznej czasoprzestrzeni Galileusza. W poprzednim paragrafie pokazaliśmy, jak przy pomocy predykatu Bet zdefiniować przestrzeń wektorową $(E, V, +)$. Teraz musimy jedynie skonstruować funkcje τ i h, spełniające warunki wymienione w definicji czasoprzestrzeni Galileusza. Niech x_0, y_0 będą dowolnymi punktami takimi, że $\sim\mathrm{Sim}(x_0, y_0)$. Połóżmy $\tau(\langle x_0, y_0\rangle) = 1$. Teraz należy rozszerzyć definiowaną funkcję na wszystkie wektory. Weźmy dowolny wektor $\langle z, w\rangle$. Znajdźmy teraz taki wektor $\langle z', w'\rangle$, że $\mathrm{Sim}(z, z')$ i $\mathrm{Sim}(w, w')$, i $\langle z', w'\rangle = \lambda\langle x_0, y_0\rangle$. (To, że taki wektor istnieje, i że jest on wyznaczony jednoznacznie, gwarantowane jest aksjomatami, ustalającymi sens predykatu Sim.[6]) Wartość funkcji τ dla wektora $\langle z, w\rangle$ wynosić będzie λ (por. rys. 4).



Rys. 4

Liniowość tak określonej funkcji jest widoczna. Pokażmy tylko, że dla dowolnych x, y i z, $\tau(\langle x, y\rangle + \langle y, z\rangle) = \tau(\langle x, y\rangle) + \tau(\langle y, z\rangle)$. Z definicji $\tau(\langle x, y\rangle) = \lambda_1 \equiv \exists x', y'\ \mathrm{Sim}(x, x') \wedge \mathrm{Sim}(y, y') \wedge \langle x', y'\rangle = \lambda_1\langle x_0, y_0\rangle$. Analogicznie, $\tau(\langle y, z\rangle) = \lambda_2 \equiv \exists z'\ \mathrm{Sim}(z, z') \wedge \langle y', z'\rangle = \lambda_2\langle x_0, y_0\rangle$. Dalej, mamy $\langle x', z'\rangle = \langle x', y'\rangle + \langle y', z'\rangle = \lambda_1\langle x_0, y_0\rangle + \lambda_2\langle x_0, y_0\rangle = (\lambda_1 + \lambda_2)\langle x_0, y_0\rangle$. Ponieważ $\mathrm{Sim}(x, x')$ i $\mathrm{Sim}(z, z')$, więc z definicji funkcji τ mamy, że $\tau(\langle x, z\rangle) = \lambda_1 + \lambda_2$, co kończy dowód.

Teraz zdefiniujmy odwzorowanie h. Niech $S = \{\langle x, y\rangle : \mathrm{Sim}(x, y)\}$. Na zbiorze S określona jest relacja kongruencji Consim, która razem z relacją Bet tworzy strukturę przestrzeni Euklidesowej[7]. Wprowadźmy najpierw pojęcia pomocnicze:

$\mathrm{Perp}(x, y, z) \equiv \exists w\ \mathrm{Bet}(w, y, x) \wedge \mathrm{Consim}(w, y, y, x) \wedge \mathrm{Consim}(u, z, z, x)$;

---

[6] Aksjomaty te można znaleźć np. u Fielda, chociaż bez dowodu poprawności. Por. H. Field, *op. cit.*, s. 118-119.

[7] Jakościowe ujęcie geometrii euklidesowej omawia A. Tarski w swoim artykule. Podaje on tam *explicite* zestaw aksjomatów, charakteryzujących predykaty Bet i Con, a następnie udowadnia, że przestrzeń Euklidesowa jest modelem dla tego zestawu. Por A. Tarski, „What is Elementary Geometry", [w:] J. Hintikka (red.) *The Philosophy of Mathematics*, Oxford 1969, s. 164-175

Parplan$(x, y, z, u, v, w) \equiv [\sim\exists x' \,\mathrm{Coplan}(x, y, z, x') \wedge \mathrm{Coplan}(x', u, v, w)] \vee [\mathrm{Coplan}(x, y, z, u) \wedge \mathrm{Coplan}(y, z, u, v) \wedge \mathrm{Coplan}(z, u, v, w)]$,

rozumiane intuicyjnie, jako odpowiednio — „odcinek $\overline{xy}$ jest prostopadły do odcinka $\overline{yz}$", oraz „płaszczyzna wyznaczona przez x, y, z jest równoległa do (lub tożsama z) płaszczyzny wyznaczonej przez u, v, w".

Przejdźmy teraz do konstrukcji iloczynu skalarnego h. Wybierzmy najpierw w zbiorze S cztery punkty x_0, x_1, x_2, x_3, takie że Perp(x_1, x_0, x_2), Perp(x_1, x_0, x_3), Perp(x_2, x_0, x_3) i Consim(x_1, x_0, x_2, x_0), Consim(x_2, x_0, x_3, x_0) (istnienie takich punktów wynika z aksjomatu, określającego wymiar przestrzeni E). Weźmy teraz dowolny wektor $\langle z, w\rangle \in S$ i zdefiniujmy następująco punkt z_1:

$\mathrm{Col}(z_1, x_0, x_1) \wedge \exists u \,\mathrm{Parplan}(x_0, x_2, x_3, u, z, z_1)$.

Punkt z_1 jest więc punktem przecięcia osi x_0x_1 z płaszczyzną równoległą do płaszczyzny (x_0, x_2, x_3) i przechodzącą przez punkt z. W analogiczny sposób można zdefiniować punkty z_2, z_3 oraz w_1, w_2 i w_3. Uzyskamy w ten sposób trzy wektory $\langle z_1, w_1\rangle$, $\langle z_2, w_2\rangle$ i $\langle z_3, w_3\rangle$, równoległe odpowiednio do osi x_0x_1, x_0x_2 i x_0x_3. Zatem istnieją takie trzy liczby λ_1, λ_2 i λ_3, że $\langle z_1, w_1\rangle = \lambda_1\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle z_2, w_2\rangle = \lambda_2\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle z_3, w_3\rangle = \lambda_3\langle x_0, x_3\rangle$. Trójka liczb $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ określa współrzędne wektora $\langle z, w\rangle$ w układzie współrzędnych (x_0, x_1, x_2, x_3). Teraz definicja funkcji h jest już standardowa: $h(\mathbf{u}, \mathrm{v}) = \lambda_1^u\lambda_1^v + \lambda_2^u\lambda_2^v + \lambda_3^u\lambda_3^v$, gdzie $(\lambda_1^u, ..., \lambda_3^u)$ i $(\lambda_1^v, ..., \lambda_3^v)$ są współrzędnymi wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ określonymi w wyżej scharakteryzowany sposób.

Oczywistym faktem jest, że konkretna postać funkcji h nie jest wyznaczona w sposób jednoznaczny powyższą procedurą. Jednakże okazuje się (nie będziemy tego dowodzić) że funkcja h zależy tylko od długości wektorów bazowych $\langle x_0, x_i\rangle$, a nie od ich kierunków — tzn. zamiana układu (x_0, x_1, x_2, x_3) na układ (x_0', x_1', x_2', x_3') taki, że Consim(x_0, x_i, x_0', x_i'), nie zmieni postaci funkcji h.

Dwuliniowość funkcji h wynika z tego, iż w opisanej powyżej procedurze współrzędne sumy wektorów równają się sumie współrzędnych tych wektorów. Symetryczność i dodatnia określoność są oczywiste. Nasze zadanie zostało zatem wykonane — odtworzyliśmy pełną strukturę czasoprzestrzeni Galileusza. Na uwagę zasługuje jeszcze wspomniany już wcześniej fakt, że o ile automorfizmy matematycznej struktury czasoprzestrzeni Galileusza zawierają tylko «czyste» transformacje Galileusza, o tyle w wypadku predykatów jakościowych Sim i Consim ich automorfizmy obejmują także liniowe przekształcenia współrzędnej czasowej i współrzędnych przestrzennych. Znaczy to, że jeśli np. funkcja τ spełnia warunki narzucone przez powyższą konstrukcję, to warunki te spełniać będzie również funkcja $a\tau$, gdzie a — dowolna liczba rzeczywista. Pokazuje to, że wybór jednostki do pomiaru interwałów czasowych, a także odległości przestrzennych, jest sprawą umowną.

Na koniec poruszmy jeszcze jedną kwestię. W trakcie całej konstrukcji zakładaliśmy, że sens predykatów Bet, Sim i Consim dany jest odpowiednimi aksjomatami. Ponieważ jednak mają to być predykaty empiryczne — tzn. odnoszące się do pewnych obiektów fizycznych — niezbędne jest pokazanie, że ich sens może być również określony operacyjnie, tj. powinniśmy umieć określić, przy pomocy odpowiedniej procedury, między którymi punktami zachodzą powyższe relacje. W wypadku predykatu Bet sprawa jest (przynajmniej teoretycznie) prosta — musimy jedynie dysponować metodą określania, czy dany układ jest inercjalny (np. przez sprawdzenie warunku znikania sił pozornych) oraz metodą określania współliniowości (np. przy pomocy promienia świetlnego). Powiemy zatem, że trzy punkty x, y i z spełniają predykat Bet, gdy zachodzi jeden z dwóch warunków: (1) istnieje taki układ inercjalny, w którym zdarzenie zachodzące w x jest niepóźniejsze od zdarzenia zachodzącego w y, zdarzenie zachodzące w y jest niepóźniejsze od zdarzenia zachodzącego w y, a ponadto wszystkie trzy zdarzenia zachodzą w jednym miejscu; (2) istnieje układ, w którym zdarzenia zachodzące w x, y i z są równoczesne, a ponadto y znajduje się na linii prostej pomiędzy x a z w zwykłym sensie geometrycznym.

Niestety, sprawa komplikuje się w wypadku predykatu Sim, a pośrednio także w wypadku predykatu Consim. Przez lata w fizyce zakładano milcząco, że określenie równoczesności pomiędzy zdarzeniami jest sprawą banalną. Sądzono tak zapewnie z powodu przypuszczenia o istnieniu sygnałów rozchodzących się z nieskończoną prędkością. Ponieważ jednak przypuszczenie to okazało się błędne, potrzeba operacyjnego zdefiniowania równoczesności zdarzeń stała się paląca. Jednym z najpoważniejszych ciosów zadanych fizyce klasycznej było pokazanie, że nie ma sposobu na absolutne ustalenie, czy dwa odległe od siebie zdarzenia są równoczesne — można tego dokonać jedynie ze względu na pewien układ odniesienia. Fakt ten prowadzi nas bezpośrednio do relatywistycznej koncepcji czasoprzestrzeni.

3. Czasoprzestrzeń Minkowskiego

Kluczowym założeniem relatywistycznej teorii czasoprzestrzeni jest założenie stałości prędkości światła w każdym inercjalnym układzie odniesienia. Fakt, iż prędkość światła jest uniwersalną stałą przyrody, w istotny sposób wpływa na ujęcie czasoprzestrzeni. Okazuje się bowiem, że współrzędne czasowe i przestrzenne stają się współmierne, w odróżnieniu od fizyki Galileuszowskiej. Możemy zatem przyjąć, że interwał czasowy Δt «równy jest» interwałowi przestrzennemu Δs, gdy $c\Delta t = \Delta s$, gdzie c — prędkość światła. Nic nie stoi więc na przeszkodzie, aby wprowadzić taką samą jednostkę do pomiaru czasu i przestrzeni. Postulat ten zresztą jest realizowany w praktyce — np. odległość w astronomii mierzy się w latach (ściślej w latach świetlnych, tzn. miarą odległości jest czas potrzebny na przebycie danej drogi przez światło). Dlatego w fizyce teoretycznej, gdzie często przymuje się układ jednostek, w którym prędkość światła wynosi 1, miary czasu i przestrzeni zostają utożsamione.

Powyższe rozważania sugerować by mogły, że w nowym modelu czasoprzestrzeni możliwe jest wprowadzenie standardowej struktury przestrzeni Euklidesowej. Wydaje się bowiem, że można przyjąć jako miarę odległości pomiędzy punktami czasoprzestrzeni funkcję daną wzorem $d(x, y) = \sqrt{c^2\Delta t^2 + \Delta s^2}$, gdzie Δt jest interwałem czasowym między punktami x i y, a Δs — interwałem przestrzennym. Okazuje się jednak, że funkcja $d(x, y)$ nie spełnia podstawowego wymogu adekwatnej metryki — nie jest mianowicie jednakowa we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Innymi słowy «odległość» między punktami zależałaby od wyboru układu odniesienia, a to jest nie do przyjęcia. Dokładniejsza analiza, na którą nie mamy tu miejsca, pokazuje, że własność niezmienniczości ze względu na wybór układu odniesienia posiada wyrażenie zbliżone do powyższego, które definiuje tzw. interwał czasoprzestrzenny: $c^2 \Delta t^2 - \Delta s^2$.[8] Relatywistyczna koncepcja czasoprzestrzeni znajduje swój wyraz w następującej matematycznej strukturze, zwanej „czasoprzestrzenią Minkowskiego". Czasoprzestrzeń Minkowskiego jest to czwórka $(E, V, +, g)$, gdzie:

(1) $(E, V, +)$ jest 4-wymiarową przestrzenią afiniczną;

(2) g: $V \times V \to R^1$ spełnia następujące warunki:

(a) g jest dwuliniowe;

(b) g jest symetryczne;

(c) g ma sygnaturę $(+, -, -, -)$.

Zauważmy, że definicja funkcji g różni się od definicji zwykłego iloczynu skalarnego w jednym punkcie: warunek dodatniej określoności został zastąpiony warunkiem (c). To, że g ma sygnaturę $(+, -, -, -)$, znaczy tyle, że w przestrzeni V istnieje baza $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, taka że $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ dla $i \neq j$, oraz $g(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = 1$ i $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = -1$, dla $i = 1, 2, 3$. Pokażmy teraz, jaką postać przyjmie iloczyn skalarny g w bazie spełniającej powyższe warunki. Niech $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{3} u_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{3} v_i\mathbf{e}_i$. Wtedy $g(\sum_{i=0}^{3} u_i\mathbf{e}_i, \sum_{j=0}^{3} v_j\mathbf{e}_j) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} u_iv_j\, g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = u_0v_0 - u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3$. Współrzędną zerową można utożsamić ze współrzędną czasową (ct), a pozostałe z przestrzennymi. Widać więc, że iloczyn $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2$ definiuje nam interwał czasoprzestrzenny pomiędzy punktami x i y, takimi że $x - y = \mathbf{u}$.

Wektory w czasoprzestrzeni Minkowskiego można łatwo podzielić na trzy grupy. Są to: wektory czasopodobne, dla których $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$; przestrzennopodobne ($g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ oraz wektory zerowe (świetlne), dla których $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$. Intuicyjna interpretacja powyższych pojęć jest następująca. Jeśli wektor łączący punkty x i y jest zerowy, znaczy to, że $c^2\Delta t^2 = \Delta s^2$, czyli zdarzenia zachodzące w x i y mogą być połączone promieniem świetlnym. Jeśli wektor $x - y$ jest czasopodobny, to $c^2\Delta t^2 > \Delta s^2$, czyli punkty x i y mogą być połączone sygnałem rozchodzącym się wolniej niż światło. Jeśli natomiast wektor ten jest przestrzennopodobny, to nie istnieje sygnał, który mógłby dotrzeć z punktu x do y (lub *vice versa*). W takim wypadku mówi się również, że zdarzenia zachodzące w x i y są *quasi*-równoczesne.

---

[8] Dowód tego można znaleźć w każdym podręczniku fizyki relatywistycznej. Por. np. B.F. Schutz, *Wstęp do ogólnej teorii względności*, Warszawa 1995, s. 21 i nast.

Przy pomocy iloczynu skalarnego g możemy wprowadzić niezmiernie istotne pojęcie prostopadłości wektorów, kładąc:

u jest prostopadły do **v** ztw $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Przyjrzyjmy się nieco bliżej temu pojęciu. Ze względu na to, że iloczyn g ma inne własności, niż standardowy iloczyn skalarny w przestrzeni Euklidesowej, zdefiniowana wyżej prostopadłość będzie również «niestandardowa». W szczególności zachodzą następujące fakty.

(1) Jeżeli **u**, **v** są wektorami zerowymi, to $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ztw $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

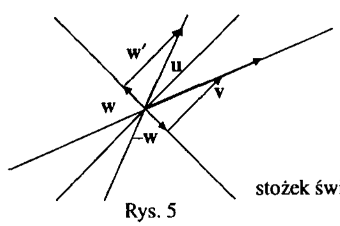
Słownie: dwa wektory zerowe są do siebie prostopadłe (w sensie iloczynu g) zawsze i tylko wtedy gdy są do siebie równoległe (w sensie równoległości afinicznej). Brzmi to jak paradoks, ale fakt ten pokazuje jedynie, że z pojęciem prostopadłości w przestrzeni Minkowskiego nie należy wiązać intuicji wyniesionych z geometrii Euklidesa. Dowód faktu (1) wynika wprost z definicji iloczynu g i definicji wektora zerowego.

(2) Jeżeli **u** jest wektorem czasopodobnym i $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, to **v** jest wektorem przestrzennopodobnym.

Słownie: wektory czasopodobne są prostopadłe tylko do wektorów przestrzennopodobnych. Dla dowodu przyjmijmy, że wybraliśmy układ współrzędnych, w którym wektor **u** ma tylko dwie niezerowe składowe: u_0 i u_1. Z czasopodobności mamy, że $u_0^2 > u_1^2$. Iloczyn skalarny $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ wynosi $u_0v_0 - u_1v_1 = 0$, a zatem widać, że $v_0^2 < v_1^2$, a tym bardziej $v_0^2 < v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, czyli **v** jest przestrzennopodobny.

Dodajmy jeszcze, że prostopadłość wektorów: czasopodobnego i przestrzennopodobnego, ma prostą interpretację fizykalną. Jeśli bowiem wektor czasopodobny **u** reprezentuje pewien inercjalny układ odniesienia U, to prostopadły do niego wektor **v** wyznacza linię prostą, taką że wszystkie znajdujące się na niej punkty są równoczesne względem U.

(3) Jeżeli **u** jest wektorem czasopodobnym, a **v** — przestrzennopodobnym, to $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ztw istnieją wektory zerowe **w** i **w′**, takie że $\mathbf{w} + \mathbf{w}' = \mathbf{u}$ i $-\mathbf{w} + \mathbf{w}' = \lambda\mathbf{v}$ (por. rys. 5).



Rys. 5

Dowód. (a) Wybierzmy bazę, w której wektor przestrzennopodobny **v** ma rozkład $(0, v_1, 0, 0)$ (dla wektorów przestrzennopodobnych taka baza zawsze istnieje). Załóżmy, że wektor **u** jest prostopadły do **v**, czyli **u** ma postać $(u_0, 0, u_2, u_3)$, oraz $u_0^2 > u_2^2 + u_3^2$. Rozpatrzmy teraz następujące wektory $\mathbf{w} = (\frac{1}{2}u_0, \alpha, \frac{1}{2}u_2, \frac{1}{2}u_3)$, $\mathbf{w}' = (\frac{1}{2}u_0, -\alpha, \frac{1}{2}u_2, \frac{1}{2}u_3)$, gdzie $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 - u_1^2 - u_3^2}$. Prosty rachunek pokazuje, że wektory **w** i **w′** spełniają wszystkie warunki sformułowane w twierdzeniu (3).

(b) Zakładamy, że istnieją wektory **w** i **w′**, spełniające warunki sformułowane w (3). Pokażemy teraz, że **u** i **v** są ortogonalne. Iloczyn **u** i **v** wynosi: $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g((\mathbf{w} + \mathbf{w}'), \beta(-\mathbf{w} + \mathbf{w}'))$, gdzie $\beta = 1/\lambda$. Z liniowości iloczynu skalarnego mamy:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\beta g(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \beta g(\mathbf{w}', \mathbf{w}') - \beta g(\mathbf{w}, \mathbf{w}') + \beta g(\mathbf{w}', \mathbf{w}).$$

Pierwsze dwa człony znikają na mocy definicji wektorów zerowych, a ostatnie dwa się redukują ze względu na symetryczność iloczynu g. Ostatecznie więc, $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, co należało pokazać.

Udowodnione powyżej twierdzenie można wysłowić swobodnie tak: linia czasopodobna jest prostopadła do linii przestrzennopodobnej, gdy można skonstruować przy pomocy linii świetlnych prostokąt, taki że jedna z jego przekątnych leży na jednej prostej, a druga na drugiej. Twierdzenie to będzie nam potrzebne później, przy definiowaniu jakościowego odpowiednika pojęcia prostopadłości wektorów.

(4) Jeżeli **u** i **v** są wektorami przestrzennopodobnymi, to $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ztw istnieje taki wektor czasopodobny **w**, że $g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$,i dla każdego wektora czasopodobnego $\mathbf{w}' = \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{v}$, $g(\mathbf{u}, \mathbf{w}') = 0$.

Słownie: dwa wektory przestrzennopodobne są do siebie prostopadłe, gdy istnieje wektor czasopodobny **w** prostopadły do nich obu oraz taki, że każdy wektor czasopodobny, znajdujący się w płaszczyznie wyznaczonej przez **w** i jeden z nich, jest prostopadły do drugiego.

Dowód. (a) Niech **u**, **v** będą wektorami przestrzennopodobnymi. Przyjmijmy, że $\mathbf{v} = (0, v_1, 0, 0)$, $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$. Załóżmy, zgodnie z prawą stroną udowadnianej równoważności, że istnieje wektor $\mathbf{w} = (w_0, 0, w_2, w_3)$ taki, że $w_0^2 > w_2^2 + w_3^2$ i $u_0w_0 - u_2w_2 - u_3w_3 = 0$. Rozpatrzmy teraz wektor $\mathbf{w}' = (w_0, \gamma v_1, w_2, w_3)$ taki, że $\gamma^2 < \frac{w_0^2 - w_2^2 - w_3^2}{v_1^2}$. Łatwo pokazać, że **w′** jest wektorem czasopodobnym, a więc z założenia $g(\mathbf{w}', \mathbf{u}) = 0$, czyli $u_0w_0 - \gamma u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3 = 0$. Korzystając z wypisanej wcześniej równości mamy: $\gamma u_1v_1 = 0$, czyli $u_1 = 0$, z czego już w oczywisty sposób wynika, że $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

(b) Załóżmy, że dwa przestrzennopodobne wektory **u** i **v** są prostopadłe. Przyjmijmy układ współrzędnych, w którym wektor **u** ma rozkład $(0, u_1, 0, 0)$. Wtedy, z warunku prostopadłości, wektor **v** ma postać $(v_0, 0, v_2, v_3)$. Rozpatrzmy teraz następujący wektor czasopodobny: $\mathbf{w} = (w_0, 0, w_2, w_3)$, taki że $w_0v_0 = w_2v_2 + w_3v_3$ (wektor taki zawsze będzie istniał, jako że można udowodnić, iż dla każdego wektora przestrzennopodobnego istnieje prostopadły do niego wektor czasopodobny). Wektor **w** jest również, jak widać, prostopadły do **u**. Weźmy teraz dowolny wektor **w′** o postaci $\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{u} = (\alpha w_0, \beta u_1, \alpha w_2, \alpha w_3)$. Wtedy łatwo widać, że $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}') = \alpha w_0v_0 - \alpha w_2v_2 - \alpha w_3v_3 = 0$, co kończy dowód.

Pokażmy jeszcze, że zachodzi pewien prosty fakt, który również będzie potrzebny nam w dalszym toku wywodów.

(5) Jeżeli **u** i **v** są wektorami czasowymi nierównoległymi do siebie, to istnieje taki wektor $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, który nie jest wektorem czasowym.

Sens powyższego twierdzenia jest taki, że zbiór wszystkich wektorów czasopodobnych nie zawiera podprzestrzeni o wymiarze większym niż jeden — tzn. zbiór wektorów rozpiętych przez dwa nierównoległe wektory czasopodobne zawiera wektory, które nie są czasopodobne. Dowód jest prosty. Weźmy jako **u** wektor $(u_0, 0, 0, 0)$, a $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, gdzie $v_0^2 > v_1^2 + v_0^2 + v_3^2$. Wystarczy teraz rozpatrzyć wektor $\mathbf{u} - u_0/v_0\mathbf{v}$. Ponieważ jego pierwsza składowa wynosi zero, nie może to być wektor czasopodobny — co było do okazania.

I na koniec ostatni fakt:

(6) Jeżeli **u** jest wektorem czasopodobnym, a **v** — przestrzennopodobnym, to $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = -g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ i $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ztw istnieją wektory czasowe **w** i **w′** takie, że $\mathbf{w} + \mathbf{w}' = \mathbf{u}$ i $\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{v}$.

Dowód. W jedną stronę jest to niemal dokładnie powtórzenie dowodu twierdzenia 3 w punkcie (b). Pokażmy zatem jedynie, że jeśli $\mathbf{u} = (u_0, 0, 0, 0)$ i $\mathbf{v} = (0, v_1, v_2, v_3)$ oraz $u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, to wektory $\mathbf{w} = (1/2u_0, 1/2v_1, 1/2v_2, 1/2v_3)$ i $\mathbf{w}' = (1/2u_0, -1/2v_1, -1/2v_2, -1/2v_3)$ spełniają powyższe warunki. Istotnie, widać, że są to wektory zerowe, a ponadto ich suma daje wektor **u**, a różnica — **v**.

Przejdźmy teraz do konstrukcji jakościowej teorii czasoprzestrzeni Minkowskiego. Teorię tę oprzemy na jednym (oprócz predykatu Bet) predykacie pierwotnym Conint(x, y, z, w), rozumianym intuicyjnie jako — „interwały czasoprzestrzenne pomiędzy x a y oraz z a w są równe".[9] Definicja predykatu Conint na gruncie wyżej scharakteryzowanego matematycznego ujęcia jest prosta:

$\mathrm{Conint}(x, y, z, w) \equiv g(y - x, y - x) = g(w - z, w - z)$.

Pierwszym krokiem w kierunku odtworzenia pełnej struktury matematycznej czasoprzestrzeni Minkowskiego będzie zdefiniowanie pojęcia interwału zerowego. Wprowadźmy zatem dwuargumentowy predykat Light:

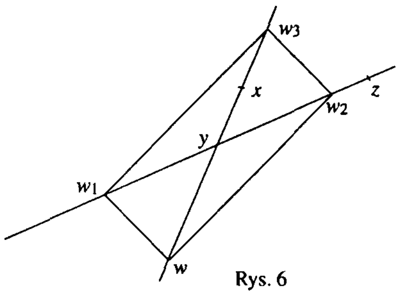
$\mathrm{Light}(x, y) = \forall z\, \mathrm{Conint}(x, y, z, z)$.

Dwa punkty łączy interwał zerowy, gdy ich interwał jest równy interwałowi pomiędzy każdym punktem a nim samym. Pamiętajmy przy tym, że dla predykatu Conint nie obowiązuje aksjomat «zwykłej» kongruencji: $\mathrm{Con}(x, y, z, z) \to x = y$.

[9] Dodajmy, że nie jest to jedyna możliwość wyboru terminu pierwotnego dla teorii czasoprzestrzeni Minkowskiego. Np. J. Winnie pokazał, że całą matematyczną strukturę czasoprzestrzeni Minkowskiego można zrekonstruować przy pomocy dwuargumentowego predykatu „x jest kauzalnie powiązane z y", gdzie przez „kauzalny związek" rozumie się, trochę myląco, możliwość dotarcia sygnału z x do y. Por. J. Winnie „The Causal Theory of Space-Time", [w:] J.S. Earman *et al.* (red.), *Foundations of Space-Time Theories*, Minneapolis 1977, s. 134-205.

Teraz możemy zdefiniować pojęcie prostopadłości przecinających się prostych, z których jedna jest czasopodobna, a druga przestrzennopodobna.

Orthtime$(x, y, z) \equiv \forall w\ \{\mathrm{Col}(w, x, y) \rightarrow \exists w_1, w_2, w_3\ [\mathrm{Light}(w, w_1) \wedge \mathrm{Light}(w, w_2) \wedge \mathrm{Light}(w_1, w_3) \wedge \mathrm{Light}(w_2, w_3) \wedge \mathrm{Col}(w_1, y, z) \wedge \mathrm{Col}(w_2, y, z) \wedge \mathrm{Col}(w_3, y, x)]\}$ (por. rys. 6).



Rys. 6

Poprawność powyższej definicji wynika z twierdzenia (3). Zauważmy, że nie stwierdza się tutaj, który z odcinków: $\overline{xy}$, $\overline{yz}$ jest czasopodobny, a który przestrzennopodobny. Potrzebne nam więc będzie dodatkowe pojęcie. Okazuje się, że w przyjętym przez nas aparacie pojęciowym, jedyną możliwością odróżnienia punktów rozdzielonych interwałem czasowym od punktów rozdzielonych interwałem przestrzennym — jest odwołanie się do faktu udowodnionego w punkcie (5) powyżej. Okazuje się więc, że — mówiąc swobodnie — jedyna różnica między czasem a przestrzenią, wyrażalna w teorii Minkowskiego, jest różnicą wymiaru: czas jest jednowymiarowy, a przestrzeń — trójwymiarowa.

Najpierw jednak musimy zdefiniować pojęcie pomocnicze Type:

Type$(x, y, z, w) \equiv \exists u\ \mathrm{Col}(z, w, u) \wedge \mathrm{Conint}(x, y, z, u)$.

Chodzi tu o to, że interwał pomiędzy x a y jest tego samego typu, co interwał pomiędzy z a w, gdy można przemnożyć jeden z dwóch wektorów (np. $z - w$) tak, aby otrzymać wektor o tym samym interwale, co $x - y$. Jak widać, wektory zerowe tworzą osobny typ, a oprócz tego mamy jeszcze dwa typy — o interwale dodatnim i ujemnym.

Zdefiniujmy teraz predykat Time:

Time$(x, y) \equiv {\sim}\mathrm{Light}(x, y) \wedge {\sim}\exists z\ \{\mathrm{Type}(x, y, x, z) \wedge {\sim}\mathrm{Col}(x, y, z) \wedge \forall w\ [\exists y', z'\ (\mathrm{Col}(y', y, x) \wedge \mathrm{Col}(z', z, x) \wedge \mathrm{Par}(x, y', z', w)) \rightarrow \mathrm{Type}(x, y, x, w)]\}$.

Słownie: punkty x i y łączy interwał przestrzennopodobny, gdy nie łączy ich interwał zerowy oraz: nie istnieje taki wektor $\overrightarrow{xz}$ o tym samym typie, co $\overrightarrow{xy}$, nierównoległy do $\overrightarrow{xy}$, i taki że każdy wektor rozpięty przez $\overrightarrow{xy}$ i $\overrightarrow{xz}$ jest tego samego typu, co $\overrightarrow{xy}$. Ze względu na twierdzenie (5) definicja powyższa jest poprawna.

Teraz zdefiniowanie interwału czasopodobnego jest już banalne:

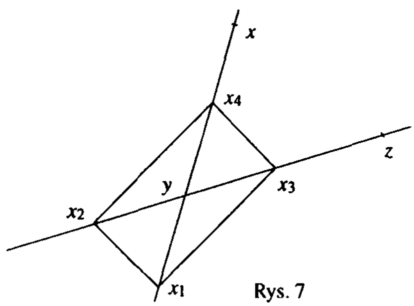
Space$(x, y) \equiv {\sim}\mathrm{Light}(x, y) \wedge {\sim}\mathrm{Time}(x, y)$.

Następnym krokiem przygotowawczym jest zdefiniowanie prostopadłości linii przestrzennopodobnych.

Orthspace(x, y, z) $\equiv \exists w$ {Time (y, w) $\wedge$ Orthtime(w, y, x) $\wedge$ Orthtime(w, y, z) $\wedge \forall w_1$ [(Time(y, w_1) $\wedge$ Coplan(y, w, w_1, z)) $\rightarrow$ Orthtime(w_1, y, x)]}

I znów poprawność podanej definicji gwarantowana jest udowodnionym wcześniej twierdzeniem — tym razem twierdzeniem (4). Ostatni krok to zdefiniowanie pojęcia, które umożliwiłoby «porównywanie» długości prostopadłych wektorów czasopodobnych i przestrzennopodobnych. Wprowadźmy zatem predykat Conorth:

Conorth(x, y, z) $\equiv \exists x_1, x_2, x_3, x_4$ Col(x_1, y, x) $\wedge$ Col(x_4, y, x) $\wedge$ Col(x_2, y, z) $\wedge$ Col(x_3, y, z) $\wedge$ Light(x_1, x_2) $\wedge$ Light(x_1, x_3) $\wedge$ Light(x_2, x_4) $\wedge$ Light(x_3, x_4) $\wedge$ Conpar(x_2, x_3, y, z) $\wedge$ Conpar(x_1, x_4, y, x) (por rys. 7).



Rys. 7

Twierdzenie (6) upewnia nas, że jeśli między punktami x, y a z zachodzi zdefiniowana wyżej relacja Conorth, to interwał pomiędzy y a x równy jest interwałowi między y a z ze znakiem minus.

Teraz jesteśmy już w stanie zdefiniować iloczyn skalarny g, występujący w matematycznym sformułowaniu czasoprzestrzeni Minkowskiego. Wprowadźmy zatem piątkę punktów (x, y_0, y_1, y_2, y_3), reprezentujących układ współrzędnych w czasoprzestrzeni, które mają spełniać następujące warunki:

(a) Time(x, y_0) oraz Space(x, y_i), dla i = 1,...3;

(b) Orthtime(y_0, x, y_i) dla i = 1,...,3 oraz Orthspace(y_i, x, y_j), dla $i \neq j$;

(c) Conint(x, y_1, x, y_2) i Conint(x, y_2, x, y_3);

(d) Conorth(y_0, x, y_i), dla i = 1,...,3.

Jak się łatwo domyślić, zdefiniowane punkty wyznaczają nam ortonormalną bazę w przestrzeni V. Zatem każdy wektor **u** można jednoznacznie przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\langle x, y_i \rangle$. Współczynniki rozkładu (u_0, u_1, u_2, u_3) dają nam współrzędne wektora **u**, a iloczyn skalarny dwóch wektorów **u** i **v** dany będzie standardowym wzorem: $u_0v_0 - u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3$. Dwuliniowość i symetryczność tak zdefiniowanego odzworowania jest oczywista, a fakt, że ma ono sygnaturę (+, –, –, –) wynika wprost z definicji punktów (x, y_i). Nasze zadanie zostało więc wykonane.

Wspomnijmy może na koniec o możliwości empirycznego zdefiniowania predykatu Conint, który jest podstawowym terminem jakościowego ujęcia teorii czasoprzestrzeni Minkowskiego. Definicję taką najłatwiej jest przedstawić osobno dla punktów odseparowanych czasowo, osobno dla punktów odseparowanych przestrzennie, a osobno dla punktów leżących na jednym stożku świetlnym:

(a) jeżeli istnieją takie układy odniesienia U_1 i U_2, że punkty x i y znajdują się w tym samym miejscu względem układu U_1, a punkty z i w znajdują się w tym samym miejscu względem układu U_2, to Conint(x, y, z, w), zawsze i tylko wtedy gdy interwał czasowy pomiędzy x a y mierzony w U_1 równy jest interwałowi czasowemu pomiędzy z a w mierzonemu w U_2;

(b) jeżeli istnieją takie układy odniesienia U_1 i U_2, że punkty x i y są równoczesne względem U_1, a punkty z i w są równoczesne względem U_2, to Conint(x, y, z, w), zawsze i tylko wtedy gdy odległość przestrzenna pomiędzy x i y mierzona w U_1 jest równa odległości przestrzennej pomiędzy z a w mierzonej w U_2;

(c) jeżeli x może być połączony promieniem świetlnym z y, a z może być połączony promieniem świetlnym z w, to Conint(x, y, z, w).

* * *

Chciałbym zakończyć niniejsze rozważania krótką dygresją polemiczną. Otóż pod adresem konstrukcji podobnych do powyższej, wysuwa się następujący zarzut. Twierdzi się mianowicie, że zastąpienie np. standardowej, zmatematyzowanej teorii czasoprzestrzeni teorią «jakościową» tylko pozornie eliminuje matematykę z nauki empirycznej. Istotnie, jakościowe odpowiedniki zmatematyzowanych teorii nie posługują się liczbami, ale przecież są to nadal zaksjomatyzowane teorie formalne — czyli teorie kwalifikujące się jako nieempiryczne. Zakładaliśmy przecież, że sens wprowadzanych terminów (Bet, Con, Sim, Consim, Conint) dany jest odpowiednimi zestawami aksjomatów. W rzeczywistości więc — twierdzą krytycy — eliminacji uległa nie matematyka, a co najwyżej teoria liczb (ogólniej, teoria przestrzeni R^n). Jednakże geometria, np. w ujęciu Hilberta czy Tarskiego, jest nadal teorią matematyczną. Sukces nominalisty jest zatem iluzoryczny.

Cząstkowej odpowiedzi na ten zarzut udzieliłem już w toku powyższych wywodów. We wszystkich bowiem wypadkach, w których wprowadzałem nowe predykaty jakościowe, rozważałem także kwestię ich empirycznej interpretacji. Jeśli zatem uznamy, że dla każdego predykatu jakościowego określona została pewna procedura, dzięki której możliwe jest stwierdzenie, które obiekty fizyczne spełniają ten predykat, to nie możemy już dłużej utrzymywać, że wyjściowa teoria jest nadal jedynie zaksjomatyzowaną teorią formalną. Oczywiście osobną kwestią jest to, czy zaproponowane procedury interpretacyjne są akceptowalne np. ze względu na zachowanie prawdziwości wszystkich aksjomatów. Można chociażby mieć wątpliwość, czy empirycznie zinterpretowana geometria zachowuje prawdziwość aksjomatu ciągłości. Problem ten jednak nie stanowi trudności wyłącznie dla stanowiska nominalistycznego — borykają się z nim wszyscy, którzy chcą zdać sprawę z tego, w jaki sposób można stosować matematykę do opisu świata fizycznego.

Powstaje jednak pytanie, czy takiej empirycznej interpretacji nie można przeprowadzić również dla wyjściowych, nieznominalizowanych teorii fizykalnych. Gdyby to było możliwe, to oczywiście cała przedstawiona w niniejszej pracy konstrukcja byłaby niepotrzebna, gdyż okazałoby się, że dysponujemy już teorią odnoszącą się wyłącznie doobiektów fizycznych, a zatem akceptowalną także przez nominalistę. Jednakże możliwość taka nie istnieje. Wynika to z prostego faktu, iż słownictwo matematyczne występujące w zmatematyzowanych teoriach empirycznych ma już jednoznacznie określoną interpretację — tzw. interpretację właściwą — którą stanowią określone obiekty matematyczne. Jeśli zatem w języku jakiejś teorii pojawi się np. termin „0", to nie ma się on odnosić do dowolnego obiektu spełniającego określone aksjomaty Peana, ale **właśnie do liczby 0**. To samo dotyczy interpretacji symbolu R^n, czy R^4 — mają one desygnować jedną, szczegółową strukturę matematyczną, a zatem nie mogą w żadnym razie być empirycznie zinterpretowane. Teorie empiryczne w swoim standardowym sformułowaniu są niejako «skazane» na założenie istnienia obiektów matematycznych.

Reasumując, można się zgodzić z krytykami, że w rezultacie naszkicowanej konstrukcji możemy zastąpić pewną sformalizowaną teorię czasoprzestrzeni T jedynie przez inną sformalizowaną teorią T′. Jednakże różnica między tymi teoriami polega na tym, że w T występują terminy, które mają jednoznacznie scharakteryzowaną interpretację — są to terminy matematyczne, podczas gdy w teorii T′ wszystkie terminy są w punkcie wyjścia traktowane czysto formalnie — a zatem można próbować znaleźć dla nich taką szczególną interpretację, która czyni zadość nominalistycznym intuicjom. Jeśli dodamy do tego względną «naturalność», z jaką taka interpretacja narzuca się każdemu, kto zetknął się z teorią T′, to można powiedzieć, że zarzut sformułowany powyżej przestaje mieć istotne znaczenie.