Filozofia Nauki
Rok VI, 1998, Nr 1(21)

Szymon K. Kapeniak

Dyskusyjne spięcie naukowców i filozofów

***Otwarta nauka i jej zwolennicy*. Michał Heller i Jacek Urbaniec (red.), Biblos, Tarnów 1996**

«Dyskusyjne spięcie» między nauką a filozofią to deklarowany przez organizatorów cel krakowskiej konferencji metodologicznej, której efekty — w postaci wykrystalizowanych w czasie dyskusji poglądów — znaleźć można w wydanej przez tarnowskie wydawnictwo Biblos oraz Ośrodek Badań Interdyscyplinarnych przy PAT książce *Otwarta nauka i jej zwolennicy*.

Materiały zgromadzone w książce podzielono na trzy grupy tematyczne: (a) nauki empiryczne a filozofia, (b) matematyka a filozofia, (c) metodologia. Proponuję, abyśmy — przedstawiając rezultaty, do których doszli uczestnicy Sympozjum — przekornie odwrócili kolejność, na jaką zdecydowali się redaktorzy książki; to znaczy, abyśmy nie dopuścili do spięcia pomiędzy nauką a filozofią, dopóki nie dowiemy się, co ta druga w czasie krakowskiego spotkania miała do powiedzenia pierwszej. Zaczniemy więc od metodologii.

Trzecia, metodologiczna część materiałów rozpoczyna się od postawienia dwóch pytań: (1) *Czy proces poznawczy zbliża nas do prawdy?* (2) *Czy można o „prostocie" mówić ściśle, odwołując się do jednego specyficznego predykatu?* Na pytania te starają się odpowiedzieć autorzy dwóch artykułów zawartych w tej części: Ryszard Wójcicki (IFiS PAN), zajmujący się Popperowską koncepcją zbliżania się do prawdy, oraz Jacek Jadacki (IF UW) stawiający sobie za cel rozważenie pojęcia „prostoty".

ZBLIŻAĆ SIĘ DO PRAWDY...

Artykuł R. Wójcickiego „Popperowska koncepcja zbliżania się do prawdy" nie dotyczy bezpośrednio poglądów Poppera, a jedynie do nich nawiązuje. Będziemy za autorem poszukiwać odpowiedzi na pytanie, na ile uzasadnione jest ujmowanie rozwoju nauki na sposób Popperowski, jako zbliżanie się do prawdy.

Warunkiem owego zbliżania się do prawdy w wydaniu Poppera jest, jak wiadomo, dbałość badacza o to, aby przyjmowane przez niego hipotezy były w maksymalnym stopniu podatne na falsyfikację empiryczną. Warunek ten powinien ostatecznie gwarantować stały proces wymieniania starych teorii na nowe, tj. takie, w których w porównaniu z poprzednimi powiększyła się liczba twierdzeń prawdziwych, a nie powiększyła liczba fałszywych.

Warto krótko wspomnieć trudności, jakie wiążą się z taką koncepcją. Po pierwsze, nierozwiązane — lub, co gorsza, rozwiązane na niekorzyść falsyfikacjonizmu — pozostają problemy dotyczące empirycznej rozstrzygalności teorii, a dokładniej rozstrzygalności zdań obserwacyjnych. [Próby stworzenia teorii tzw. języka rzeczy, zdań protokolarnych, oraz inne pomysły Koła Wiedeńskiego, napotkały poważne trudności, z którymi, jak się wydaje, także Popper sobie nie poradził; przyjął bowiem ostatecznie koncepcję, która według niego miała być wolna od zarzutu psychologizmu, a *de facto* ujmowała rzecz nie inaczej niż psychologistyczny empiryzm. Por. *Logika odkrycia naukowego*; rozdział 5 — w kwadratowych nawiasach uwagi moje, S.K.K.] Po drugie, jak wykazują krytycy Poppera, nie da się zmodyfikować żadnej teorii tak, aby z szeregu twierdzeń prawdziwych i fałszywych, wchodzących w skład tej teorii, otrzymać dłuższy szereg tez prawdziwych nie wydłużając jednocześnie listy fałszywych. W istocie zarysowana przez Poppera wizja nauki, zdaniem R. Wójcickiego, prowadzi teoretyka odkrycia naukowego na manowce. Ujmuje ona bowiem naukę tak, jakby o każdej teorii mającej uzasadnione pretensje do naukowości, można było powiedzieć, że jest prawdziwa lub fałszywa. R. Wójcicki wykazuje, że jest to niewykonalne.

Obraz nauki składającej się z wiedzy ujętej *explicite* w zdaniach teorii podatnych na empiryczną falsyfikację jest nie tylko mało prawdopodobny, ale — co gorsza — szkodliwy, gdyż wyrzuca poza obręb nauki teorie niefalsyfikowalne w sensie Popperowskim. Gdy przyjrzymy się uważniej praktyce naukowej, to bez trudu zauważymy, że wiedzie ona do co najmniej trzech rodzajów teorii, z których tylko jeden nadaje się do tego, by stosować doń z powodzeniem falsyfikacjonizm. Pech chciał, że teorii tego rodzaju jest w nauce najmniej, natomiast dominują w niej teorie, co do których rzadko można ustalić, na ile wiernie oddają rzeczywistość. Mimo to nazywamy je „naukowymi", ponieważ dostarczają potrzebnych do lepszego zrozumienia niejednego zjawiska schematów i idealizacji, lub dają duże szanse rozwoju nauki w przyszłości.

Te trzy rodzaje teorii — to teorie: werystyczne, idealizacyjne i heurystyczne. Droga do ich ściślejszego określenia na gruncie logicznej teorii nauki wiedzie przez formalny aparat logiki matematycznej i ujmowane w tym aparacie teorie matematyczne. Kiedy dotrzemy stąd do teorii dedukcyjnych zinterpretowanych empirycznie oraz przyjrzymy się trudnościom, jakie niesie ze sobą ta interpretacja, łatwiej dostrzeżemy, co w koncepcji Poppera powinniśmy odrzucić, a co warto zachować.

Teorią będzie się tu nazywać ciąg zdań, z których każde posiada w niej dowód. Dowód to ciąg zdań, z których każde jest albo przesłanką (najczęściej będą to aksjomaty teorii), albo jest otrzymane ze zdań wcześniejszych za pomocą logicznych reguł inferencji. Jeśli zdanie α posiada dowód na gruncie zbioru zdań X, tj. posiada dowód, którego wszystkie przesłanki mieszczą się w zbiorze X, to fakt ten będziemy notować: $X \vdash \alpha$. Ustalenia te umożliwiają wprowadzenie pojęcia *teorii matematycznej* i *teorii dedukcyjnej*. Pojęcia te można i trzeba utożsamić: trzeba, gdyż inaczej nie można by nauki analizować metodami logicznymi. Podkreślmy jeszcze raz, że nauka nie składa się wyłącznie z wiedzy dającej się ująć w ramy sformalizowanych matematycznie systemów. Jednakże takie właśnie systemy dają nam najlepszy — jak dotąd — sposób kontroli wiarygodności gromadzonej wiedzy. Nie powinno nas więc dziwić, że obraz nauki, jakim operuje logiczna teoria nauki jest idealizacją; nie powinniśmy też o tym fakcie zapominać, stosując jej wyniki do realnie funkcjonujących «organizmów» naukowych.

Przyjmujemy zatem, że teoria matematyczna zinterpretowana empirycznie stanowi w obrębie nauk empirycznych pewną jednostkę teoretyczną — teorię w sensie dedukcyjnym; w skrócie — teorię dedukcyjną.

Tak więc, dla *W* — dowolnego układu warunków wysłowionych w języku teorii matematycznej *T*, parę (W, $\vdash_t$), w której „$\vdash_t$" jest określone za pomocą równoważności „$X \vdash_t \alpha$ zawsze i tylko wtedy gdy $X, T \vdash \alpha$" nazywamy *teorią dedukcyjną sformalizowaną w języku teorii T* czyli *teorią nadbudowaną nad T*.

W wypadku teorii empirycznych układ warunków — *W*, będą tworzyć odpowiednio wybrane i skonceptualizowane w języku teorii *T* zdania i pojęcia charakteryzujące lub pomagające analizować zjawisko, którego dotyczy teoria *T*. Widać z tego, że istota sprawy polega na dobraniu teorii matematycznej *T* do interesujących nas zjawisk tak, aby dawała ona możliwie najlepsze efekty [por. podrozdział „Miejsce dla Platona"]. Inny istotny problem tkwi w tym, by analizowane zjawisko właściwie skonceptualizować.

W tym ostatnim wypadku powinniśmy zwrócić uwagę na dwie sprawy. Po pierwsze, konceptualizacja polega na odpowiednim dobraniu zmiennych charakteryzujących zjawisko i na jednoczesnym znalezieniu relacji łączących te zmienne z innymi zmiennymi, które mogłyby być stosowane zamiennie (choć nie z tym samym skutkiem). Po drugie, ważną rolę w procesie konceptualizacji gra fakt, że dobranie takich zmiennych nie obywa się bez przyjęcia kilku formalnych założeń dotyczących tego, czego wymagamy od dobranych zmiennych. Założenia te R. Wójcicki nazywa „wiedzą *a priori*", zaznaczając jednocześnie, że nie zamierza wnikać w zasadność tego określenia. [Warto jednak zauważyć, że w ten sposób do problemów z dotarciem do zdań obserwacyjnych, mających służyć za podstawę weryfikacji teorii empirycznych, dodajemy mimochodem trudności z rozpoznaniem natury założeń teoretycznych. Mogłyby się one okazać (w lepszym wypadku) tezami empirycznymi lub (w gorszym wypadku) pewnymi konstrukcjami matematycznymi. Wiedzie to nas oczywiście do odwiecznych wątpliwości, jak w takich warunkach można w ogóle rozsądnie mówić o poznaniu w sensie, który wymusza na nas klasyczna definicja prawdy.]

Oto proponowane przez R. Wójcickiego odróżnienie trzech typów teorii empirycznych:

Dowolna teoria jest *teorią werystyczną z uwagi na jej użytkowników* zawsze i tylko wtedy, gdy *oczekują oni pełnej zgodności warunków tej teorii ze stanem faktycznym, lub co najmniej z wynikami empirycznych badań dotyczących zjawiska ujmowanego przez tą teorię.*

Ponieważ to, czy oczekiwania użytkowników są spełniane czy nie, określa się na gruncie metodologicznych warunków stawianych teorii, pragmatyczny kontekst tej definicji jest jedynie pozorny i nie wyprowadza nas poza ramy rozważań logicznej teorii nauki. Pozostajemy w nich tym bardziej, że odnajdujemy w tej definicji ślady takich fundamentalnych pojęć metodologicznych, jak „prawda" i „zgodność z doświadczeniem". To właśnie za ich sprawą do teorii werystycznych można stosować kryteria falsyfikacjonizmu. Nie stosują się one natomiast do teorii idealizacyjnych określonych następująco:

Dowolna teoria jest *teorią idealizacyjną z uwagi na jej użytkowników* zawsze i tylko wtedy, gdy *użytkownicy ci oczekują, że warunki tej teorii dają jedynie uproszczony obraz stanu faktycznego*, z zastrzeżeniem, że *przy każdym zastosowaniu teorii możliwa jest względnie trafna ocena stopnia rozbieżności przewidywań teorii ze stanem faktycznym.*

Nietrudno się domyślić, co może skłonić do posługiwania się takimi teoriami. Przyjęcie w nich idealizacji stanów faktycznych pomaga niejednokrotnie stosować satysfakcjonująco teorię tam, gdzie jej werystyczny odpowiednik nie istnieje, lub gdyby jego zastosowanie utrudniało tylko zadanie stojące przed naukowcami. Oczywiście nie można wymagać od takich teorii pełnej zgodności z doświadczeniem. Tym bardziej niestosowne jest to w odniesieniu do teorii heurystycznej:

Dowolna teoria jest *teorią heurystyczną* zawsze i tylko wtedy, gdy *warunki tej teorii dają pewien godny uwagi wgląd w prawidłowości charakterystyczne dla pewnego zjawiska, od której nie oczekuje się jednak określenia jakichkolwiek systematycznych zależności między owymi warunkami a tym zjawiskiem.*

Trzeba podkreślić, że wprowadzony wyżej podział nie jest rozłączny, co w wielu wypadkach poważnie utrudnia dokonanie oceny metodologicznej teorii, ponieważ kryteria tej oceny są dla każdego typu teorii inne. Jedno nie ulega wątpliwości:

Postulat falsyfikowalności ma sens wyłącznie w odniesieniu do teorii w sensie werystycznym. Nie można go stosować (a w każdym razie stosować w niezmienionej postaci) do teorii idealizacyjnych, ponieważ teorie takie ze swej natury zawierają założenia niezgodne ze stanem faktycznym, i nie można go stosować do teorii heurystycznych, ponieważ te ostatnie pozbawione są dobrze określonego odniesienia do zja-

wisk, które wyznaczają właściwą dla tej teorii dziedzinę badawczą, a tym samym w odniesieniu do tych teorii pojęcie prawdy traci sens.

R. Wójcicki ostrzega przed pochopnym pesymizmem, który mógłby być owocem takich rozważań. Nic nie wskazuje na to, żeby wszystkie teorie naukowe miały okazać się fałszywe, są natomiast racje by wierzyć, że wraz z rozwojem nauki nasz zasób zdań nietrywialnie prawdziwych się powiększa.

Możemy być świadkami tego procesu, obserwując postęp technologiczny, jaki przynosi ze sobą nauka. O ile zwykle nie dysponujemy jasnymi kryteriami rozróżnienia teorii fałszywych od prawdziwych, o tyle postęp w gromadzeniu przez nas wiedzy dość jasno ujawnia się w poszerzaniu się naszych możliwości reorganizacji rzeczywistości. Wypływa z tego dalej, że przyjmując nową teorię naukową w miejsce starej, winniśmy dbać o to, aby nowa konstrukcja teoretyczna przejmowała wszystkie zastosowania swej poprzedniczki. Nie znaczy to, że stosowalność jest jedynym kryterium «doboru naukowego». Otóż nowa teoria jest ponadto lepsza, jeśli umożliwia zrozumienie natury sukcesów i porażek jej poprzedniczki.

Nie jest zatem tak, że nie dysponujemy żadnymi kryteriami selekcji teorii naukowych w drodze zbliżania się do prawdy, choć jednocześnie ambicje Poppera na wypracowanie ścisłej definicji postępu naukowego nie wydają się R. Wójcickiemu realne, gdyż opierały się na idei falsyfikacjonizmu, wymuszającego stosowanie jednego kryterium tam, gdzie wachlarz kryteriów może i powinien być bogatszy.

...PROSTĄ DROGĄ...

Jedno z takich kryteriów jest tematem drugiego artykułu w trzeciej części książki: „O pojęciu prostoty" J. Jadackiego.

Czytając ten bogaty w definicje artykuł można odnieść wrażenie, że dowiemy się wszystkiego o możliwych użyciach terminu „prostota". Zgromadzenie czternastu definicji „prostoty" nie jest jednak sprawozdaniem z występujących w języku wariantów tego terminu, bo praca taka nie mogła by się odbyć bez empirycznych badań językoznawczych, do których J. Jadacki się nie odwołuje. Nie jest także projektem terminologicznym, gdyż efekt — wprowadzenie czternastu pojęć związanych z jednym terminem — gwałciłby jeden z postulatów precyzyjnego języka: postulat monosemiczności.

W związku z powyższym, spośród przedstawionych w artykule koncepcji „prostoty" odwołamy się jedynie do tej, która nadaje się chyba najlepiej na kryterium selekcji teorii naukowych, nie żywiąc przy tym złudnego — moim zdaniem — poczucia, że owe czternaście definicji wybawia nas z kłopotów związanych z wieloznacznością i niejasnością tego słowa.

Jak powiada J. Jadacki, zagadnienie prostoty/złożoności opisu świata — a więc prostoty/złożoności semiotycznej — sprowadza się do zagadnienia prostoty/złożoności języka tego opisu i teorii w tym języku wyrażonej. Tak więc, kiedy się mówi o prostocie/złożoności syntaktycznej, semantycznej, pragmatycznej opisu świata, ma się na myśli opis dokonany przez teorie naukowe.

Na złożoność syntaktyczną opisu składa się złożoność słownika, czyli liczba stałych logicznych, predykatów i zmiennych, tj. złożoność partytywna słownika, oraz różnorodność własności predykatów — przede wszystkim formalnych — tj. złożoność materialna słownika. Oceniając złożoność syntaktyczną teorii bierzemy pod uwagę liczbę i złożoność tez tej teorii, tj. złożoność partytywną i materialną teorii, oraz złożoność reguł inferencji teorii, tj. złożoność strukturalną.

Takie ujęcie prostoty jest niezgodne ze stanowiskiem Poppera, który z dwóch teorii uznawał za prostszą tę, która wskazywała związek uprzednio nie zauważony. Na gruncie przedstawionego ujęcia taka teoria byłaby syntaktyczno-partytywnie bardziej złożona.

Dochodzimy tu do zagadnienia, rozważanego przez R. Wójcickiego, a mianowicie możliwości i warunków porównywania teorii naukowych — koniecznego do selekcji konkurencyjnych teorii. J. Jadacki pokazuje, jak miałoby wyglądać takie porównanie pod względem złożoności syntaktycznej. Otóż można go dokonać wyłącznie wtedy, gdy możliwy jest przekład tez obu teorii na tezy zawierające te same stałe logiczne lub określony układ kwantyfikatorów. Taki przekład mógłby polegać na doprowadzeniu porównywanych formuł do postaci zawierających tylko dobrze interpretowalne stałe logiczne, takie jak koniunkcja i negacja.

Miarą złożoności syntaktycznej formuły F mogłaby być np. długość odpowiadającej jej formuły o postaci normalnej albo stopień złożoności innej najprostszej formuły równoważnej formule F.

Przejdźmy teraz do prostoty semantycznej, którą J. Jadacki rozumie jak następuje:

Teza/teoria T1 jest prostsza semantycznie od tezy/teorii T2, gdy przedmiot tezy/teorii T1 jest prostszy od przedmiotu tezy/teorii T2.

Prostota semantyczna związana jest zatem z zasięgiem — dziedziną przedmiotową teorii. Jeśli przedmioty *T1* i *T2* pozostają do siebie w stosunku bycia częścią, zwiększanie złożoności partytywnej teorii nazwać można „uogólnianiem". Widać z tego, że dążenie do ogólności teorii nie jest równoznaczne z jej upraszczaniem (semantycznym).

Prostotę/złożoność pragmatyczną teorii, ocenia się pod względem łatwości zrozumienia, łatwości zapamiętywania i łatwości ustalania jej wartości logicznej, które zależą bezpośrednio do stopnia złożoności syntaktycznej i semantycznej oraz stopnia złożoności działania prowadzącego do zrozumienia, zapamiętania lub sprawdzenia teorii.

J. Jadacki dokonuje też za pomocą przyjętej aparatury pojęciowej interpretacji zasady ekonomii myślenia, którą wyraża następująco:

Z dwu teorii o tym samym przedmiocie wybierz syntaktycznie prostszą, zaś z dwu teorii o tym samym stopniu złożoności syntaktycznej wybierz tę, która jest uogólnieniem drugiej, a zatem jest też od drugiej bardziej złożona semantycznie.

Inną drogą otrzymania prostszego opisu świata — poza wyborem prostszych teorii spośród teorii konkurencyjnych, jest upraszczanie teorii starych. Odbywa się ono, w wypadku upraszczania syntaktycznego, przez upraszczanie partytywne słownika, np. redukcję empirystyczną do predykatów obserwacyjnych, a także przez definiowanie, aksjomatyzację i formalizację. Takie zabiegi «zubożania» języka rzadko doprowadzają do uproszczenia samej wyrażonej weń teorii, dlatego też skupimy się raczej na upraszczaniu semantycznym, tym bardziej, że prowadzi nas ono do znanego z artykułu R. Wójcickiego problemu idealizacji.

Idealizacja, zdaniem J. Jadackiego jest — wraz z redukcją kategorialną, wyjaśnianiem analitycznym i matematyzacją — szczególnym przypadkiem upraszczania semantycznego. Powiada on, że idealizacja to upraszczanie przedmiotów teorii przez abstrahowanie od pobocznych, nieistotnych ich części. Zastosowawszy to do wspomnianej w artykule R. Wójcickiego idealizacji jako uproszczonego obrazu stanu faktycznego w teoriach empirycznych, otrzymamy, że polega ona na pozbawieniu tez (warunków) empirycznych teorii ich części, tj. na abstrahowaniu od pewnych, mogących wystąpić w nich argumentów — zmiennych. Ujęcie J. Jadackiego jest oczywiście za wąskie (w stosunku do ujęcia R. Wójcickiego), nie obejmuje bowiem idealizacji związanych z czysto numerycznymi rozbieżnościami między przyjętymi wartościami zmiennych a stanem faktycznym (chyba że pozbawianie argumentu liczbowego kilku miejsc po przecinku, uznamy za pozbawienie całego równania pewnych jego (nieistotnych) części, co nie wydaje mi się jednak intuicyjne).

Tak oto wygląda w zarysie i po «uproszczeniu» stanowisko J. Jadackiego w sprawie „prostoty". To, co u Poppera brzmi: „Zdania proste cenimy wyżej niż zdania mniej proste, ponieważ są lepiej sprawdzalne", J. Jadacki ująłby więc tak: sprawdzanie pierwszych zdań jest prostsze — pod względem czynności składowych — od sprawdzania drugich, bowiem wymaga ustalenia mniejszej ilości informacji: dokonania mniejszej ilości pomiarów.

* * *

Zgodnie z zapowiedzią przejdziemy teraz do drugiej części książki, poświęconej matematyce. Kolejność ta wydaje się racjonalna: od metodologii, przez aparat formalny, do nauk empirycznie poznających rzeczywistość.

...NA PIECHOTĘ

Podstawowa teza artykułu Anny Kanik (IF UJ) „Komputer a dowód matematyczny", głosi, że dopuszczenie stosowania komputerów do uzasadnienia twierdzeń matematycznych zmieniłoby w sposób zasadniczy matematykę: zarówno czynności poznawcze, jak i wytwory poznania matematycznego.

Wnioski takie A. Kanik wysnuwa z opisu nowych procedur badawczych z użyciem komputerów, które podważają tradycyjne — wypracowane i przyjęte w XX wieku —

standardy uzasadniania i dowodzenia twierdzeń matematycznych. Chciałbym już teraz zaznaczyć, że nie ze wszystkim, co jest napisane w tekście A. Kanik, mogę się zgodzić. Trudno by mi było podpisać się pod przewidywaniami, że matematyka nie będzie mogła się rozwijać dalej, jeśli nie zostaną rozwiązane kwestie filozoficzne, związane z pojawieniem się w praktyce matematycznej komputerów. A. Kanik pisze:

Trudno nie zgodzić się z tym, że współczesnej matematyce są potrzebne nowe rozwiązania filozoficzne. Kryzys dowodów długich i skomplikowanych, niewystarczalność metod formalnych do przedstawiania poprawnych dowodów oraz stosowanie komputerów w matematyce wymaga nowych koncepcji filozoficznych. [...] Nie można komputerów wprowadzić do matematyki bezboleśnie, bez sprzeciwiania się pewnym silnym tradycjom filozoficznym.

Jestem gotów zgodzić się z tym twierdzeniem pod warunkiem, że chodzi o ból filozofów. Dopóki bowiem matematycy, a nie filozofowie, uprawiają matematykę, nie muszą się oni przejmować żadną tradycją filozoficzną, która ponoć obowiązuje w ich nauce, ponieważ obowiązuje ona tak długo, jak ... oni sobie tego życzą! Każda rzetelna nauka posiada wystarczającą ilość «własnych» metod weryfikacji swoich wyników i kontroli swoich procedur poznawczych, żeby nie musieć się przejmować tym, co mówią w tej sprawie filozofowie. To, czego matematycy potrzebują, to nie tyle nowa koncepcja filozoficzna, z którą większość z nich zapewne nie będzie miała w ogóle okazji się zapoznać, ale zapał i energia w forsowaniu problemów związanych z nowym współpracownikiem — komputerem.

Skądinąd trafniejsze wydają mi się socjologiczne obserwacje autorki. Zgadzam się np. z tym, że «niejawność» dowodów nieraz kluczowych dla współczesnej matematyki twierdzeń, odtąd ukrytych w skomplikowanych procedurach komputerowych, osłabi lub wyeliminuje rolę heurystyczną niezrealizowanych projektów, błędów, zauważanych tylko intuicyjnie związków z innymi dziedzinami lub twierdzeniami, z czym mieliśmy do czynienia przeprowadzając żmudne dowody «na piechotę». O prawdziwym zagrożeniu można by jednak mówić tylko w wypadku skomplikowanych i trudnych dowodów automatycznych. Tymczasem współczesne dowody automatyczne są zazwyczaj banalnymi powtórzeniami dowodów, które równie dobrze mógłby przeprowadzić zdolniejszy matematyk. Dowody, o których wspomina A. Kanik, to dowody wspomagane komputerowo, czyli siłą rzeczy pozostające pod całkowitą kontrolą człowieka. Autorzy takiego dowodu wiedzą o nim «wszystko»: ludzie wymyślają dowód od początku do końca, a komputer wykonuje tylko pewne kroki tego dowodu. Automatyczne dowodzenie niebanalnych twierdzeń bez kontroli człowieka, byłoby równoznaczne z wynalezieniem sztucznej inteligencji — a to nam jeszcze nie grozi, mimo że ponoć bardzo się o to staramy.

Tak więc, choć trudno nie zgodzić się, że użycie komputerów do dowodzenia twierdzeń matematycznych istotnie zmieni matematykę, nie widzę powodu, aby matematyków niepokoić koniecznością zmiany filozoficznej koncepcji dowodu czy podmiotu poznającego (tym bardziej, że o tym drugim nie da się w ogóle w matematyce mówić).

* * *

Omówione dotąd artykuły dają nam pogląd na to, co podczas krakowskiej konferencji chcieli powiedzieć naukowcom filozofowie. Przejdźmy teraz do wyrażonych tam metanaukowych poglądów ludzi uprawiających naukę.

PORA NA REWANŻ czyli CHAOS I DETERMINIZM

Wprowadzenia do dyskusji na temat związków matematyki z filozofią dokonał Andrzej Lasota (IM UŚ) ze świadomością, że jego poglądy są wielce kontrowersyjne. Oto kolejnych sześć tez przedstawionych w jego wypowiedzi:

(1) Przedmiotem matematyki jest rzeczywistość; matematyka jest uniwersalna, lub inaczej — matematyka jest strukturą naszego świata. Jakkolwiek daleko oddaliłby się matematyk w swej pracy od rzeczywistości, produkując abstrakcyjne modele, zawsze wcześniej czy później okaże się, że jest to opis fragmentu rzeczywistości. Wynika z tego dalej, że gdyby świat był inny, inna byłaby matematyka. Ujmując rzecz jeszcze inaczej, matematyka uczy, że pewne możliwości są wykluczone.

(2) Obserwujemy obecnie bardzo szybki, intensywny rozwój matematyki. Przejawia się on we wzroście liczby prac matematycznych, czasopism i badaczy. Jest to jednak złudzenie. Tysiące udowadnianych twierdzeń niczego nowego do matematyki nie wnosi. Od początku stulecia nic ciekawego w tej dyscyplinie się nie stało. Dotyczy to także prób stosowania matematyki w naukach społecznych i biologii. Zresztą stagnacja ma miejsce również w innych dziedzinach naukowych oraz w technice.

(3) Niekorzystne tendencje w matematyce nie są nieodwracalne, a nierozsądne poczynania hamujące postęp naukowy nie są w stanie zatrzymać go w ogóle. Powinniśmy wiązać nasze nadzieje na przyszłe rewolucje naukowe z tymi dziedzinami matematyki, które teraz traktuje się po macoszemu. Skądinąd zdrowy sceptycyzm także nam nie zaszkodzi.

Dwie ostatnie tezy miały charakter socjologiczny i odbiegają od przedmiotu naszego zainteresowania. Proponuję więc, abyśmy zajęli się kolejną, czwartą tezą, a ściślej jej uzasadnieniem. Ono bowiem ma — jak mniemam — istotne znaczenie dla filozofii:

(4) Odkrycia matematyczne mają istotne znaczenie filozoficzne.

Dla zilustrowania tej tezy A. Lasota przedstawia matematyczne argumenty dotyczące sporu determinizmu z indeterminizmem. Argumenty te postaram się dokładnie zreferować, gdyż wyglądają na bardzo intrygujące.

Niezwykle ciekawe rozwiązania wnoszą do rozważań nad tym zagadnieniem badania E. N. Lorentza nad ogólną dynamiką procesów stochastycznych. Świadczą one o tym, że nasz spór musi pozostać nierozstrzygnięty — przynajmniej w wypadku, gdyby do jego rozstrzygnięcia miały posłużyć odkrycia naukowe, ujawniające np. deterministyczny charakter procesów obecnie obserwowanych jako chaotyczne. Oto jak przebiega rozumowanie:

Wyobraźmy sobie jakiś najprostszy układ — niewspółmiernie prostszy od jakiegokolwiek spotykanego w przyrodzie — dajmy na to, opisywany przez jeden tylko parametr x. Dla dalszego ułatwienia przyjmijmy, że wartości x ograniczone są do przedziału $[0,1]$. Sytuacja, w której wartość x ulegałaby zmianie co pewną jednostkę czasu w całkowicie deterministyczny sposób, można opisać następującym równaniem rekurencyjnym:

(1) $x_{n+1} = T(x_n),\ n = 0,1,2,...$

gdzie „x_n" oznacza wartość parametru x w chwili n, a T jest zadaną transformacją odcinka $[0,1]$ w siebie. Przy tak skonstruowanej przestrzeni wystarczy wybrać nawet bardzo prostą funkcję T, aby uzyskać zaskakujące efekty. Dla ilustracji wybierzmy pierwszy z brzegu wielomian drugiego stopnia:

$$T(x) = \lambda x\,(1 - x),$$

gdzie λ jest ustalonym parametrem. Dla $0 \leq \lambda \leq 4$ przeprowadza on odcinek $[0,1]$ w siebie. Ostatecznie nasz układ rekurencyjny wygląda tak:

(2) $x_{n+1} = \lambda x_n\,(1 - x_n),$

gdzie $n = 0, 1, 2, ...; x_n \in [0,1], \lambda \in [0,4]$.

Jak powiada A. Lasota, ten prosty układ potrafi imitować prawie wszystkie spotykane w przyrodzie przebiegi. Zależnie od tego, jaką wartość parametru wybierzemy, otrzymamy przebiegi okresowe o zadanym z góry okresie, przebiegi ograniczone, nieokresowe, bez zauważalnych regularności. Te ostatnie, nazywane „chaotycznymi", najłatwiej otrzymać przyjmując $\lambda = 4$. Układy takie są niezwykle czułe na błąd początkowy, co sprawia, że przewidywanie ich przebiegów na dłuższą metę jest właściwe niemożliwe. Tylko kilkadziesiąt kroków wystarczy, aby błąd na dwudziestym miejscu po przecinku wpłynął w sposób istotny na ostateczny wynik. Inaczej będzie dla $\lambda = 2$ — wtedy nasz model dynamiczny zachowuje się stabilnie. Takie układy nie sprawiają nam tyle kłopotu, co procesy chaotyczne, uniemożliwiające — nawet przy wyczerpującej znajomości praw rządzących światem — przewidywanie zjawisk w nim zachodzących.

Ciekawostką jest, że dla licznych procesów stochastycznych pokazano, iż są one wyłącznie granicami procesów deterministycznych; dlatego też ciąg wartości takiego układu jest nie do odróżnienia od ciągu otrzymanego metodą prób losowych. Widać to choćby na naszym modelu:

Dla $\lambda = 4$ w układzie $x_{n+1} = \lambda x_n\,(1 - x_n)$ z wybranym dowolnym $x_0 \in [0,1]$ określimy ciąg ξ_n, kładąc:

$$\xi_n = \begin{cases} 0 \text{ dla } x_n \leq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ dla } x_n > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Można udowodnić, że dla prawie żadnego $x_0 \in [0,1]$ nie da się odróżnić tego ciągu od wyników otrzymanych na przykład przez rzucanie monetą. Mówiąc ogólnie i fachowo, każdy operator Markowa może być w topologii mocnej zbieżności aproksymowany przez operatory pochodzące od transformacji deterministycznych. Wynik tego jest taki:

Bez względu na to, czy na podstawie naszych obserwacji, doświadczeń i rozważań dojdziemy do wniosku, że świat jest rządzony prawami deterministycznymi, czy też probabilistycznymi, to może to być złudzenie wynikające ze skończonej rozdzielczości naszych instrumentów.

Na tym istotne argumenty, jakie mogą przedstawić matematycy w sporze o determinizm, się nie kończą. Oto jeszcze jedna uwaga.

Klasycznym układem dynamicznym (z czasem ciągłym) działającym w przestrzeni X nazywamy rodzinę $\{S_t\}$ odwzorowań przestrzeni X w siebie, indeksowaną parametrem rzeczywistym $t \in R$, która spełnia następujące dwa warunki:

(1) $S_0(x) = x$ dla $x \in X$

(2) $S_{t_1+t_2}(x) = S_{t_2}(S_{t_1}(x))$ dla $x \in X$; $t_1, t_2 \in R$

Układ ten interpretujemy jako ruch w przestrzeni X. „$S_t(x)$" opisuje w takim układzie pozycje danego punktu w chwili t, natomiast odwzorowanie $t \longrightarrow S_t(x)$, przy zadanym x nazywamy trajektorią punktu. Z warunku (1) wiemy, że w chwili $t = 0$ trajektoria przechodzi przez punkt x, a z warunku (2), że punkty przestrzeni X poruszają się od chwili t_1 do $t_1 + t_2$ tak samo, jak od chwili $t = 0$ do t_2. Z warunków (1) i (2) widać, że nie wszystkie krzywe w przestrzeni X mogą być trajektoriami. Mogą nimi być jedynie funkcje stałe ($S_t(x) = x$ dla $t \in R$), okresowe ($S_{t+T}(x) = S_t$ dla $t \in R$) lub różnowartościowe. Dla dowolnego zbioru Y śladem trajektorii $(S_t(x))$ na Y nazywamy każdą funkcję $f: R \longrightarrow Y$ postaci:

$f(t) = \varphi(S_t(x))$ dla $t \in R$,

gdzie „φ" jest pewnym odwzorowaniem X na Y (rzutem X na Y). W ten sposób dochodzimy do ostatecznego wniosku. Na pytanie, jakie funkcje mogą być śladami jakiegoś układu dynamicznego, pada zwięzła odpowiedź: wszystkie. Znaczy to, że niedeterministyczne zjawiska obserwowane przez nas w «naszym» świecie Y nic w sporze determinizmu z indeterminizmem nie przesądzają. Zawsze może istnieć «inny świat» X, w pełni deterministyczny, a my obserwujemy tylko rzut jego dynamiki.

W bogatym wystąpieniu A. Lasoty znajdziemy jeszcze dwie ważne refleksje. Ustosunkowuje się on w nich do pretensji poznawczych matematyki skierowanych na podmiot uprawiający matematykę, oraz zauważa niezwykłą sytuację lekceważenia probabilistyki przez większość matematyków, mimo że może się ona już poszczycić znacznymi sukcesami jako dyscyplina stosowana zarówno w innych naukach, jak i w innych działach matematyki.

OWOCE REWOLUCJI

Jak należało się spodziewać, wprowadzenie A. Lasoty wywołało głosy polemiczne. Roman Duda (IM UWr) odniósł się krytycznie do tezy A. Lasoty, że matematyka jest strukturą wszechświata. Zauważył on mianowicie, że funkcjonują w niej pojęcia, których źródła nie sposób się doszukać w świecie zewnętrznym — takie jak pojęcie „nieskończoności". Zdaniem R. Dudy matematyka ma podwójne źródło: świat fizyczny i niezależną działalność ludzkiego umysłu.

Natomiast Michał Heller (WF PAT) zauważył, że utożsamienie matematyki ze strukturą wszechświata naraża na pewne nieprzyjemne konsekwencje krytyki, z jaką spotkał się swego czasu dowód na istnienie Boga św. Anzelma. Mimo tego, sam opowiedział się za tą koncepcją, zaznaczając zarazem, że trudno by mu było jednak wyobrazić sobie taką *rewolucyjną ontologię* jako pierwotną. Zamiast niej M. Heller wprowadza intuicyjne pojęcie „pola racjonalności": Matematyki przez duże *M*, z której miałaby się wywodzić «nasza matematyka».

Sprzeczność z Matematyką wyklucza z istnienia. (...) Świat może realizować tylko te możliwości, które są dopuszczalne przez pole racjonalności.

Tak rozumiana Matematyka ma oczywiście coś do powiedzenia w dyskusji na temat naszej świadomości — co przeczy tezie A. Lasoty — gdyż ma coś do powiedzenia w dyskusjach o wszystkim, co istnieje.

Z kolei Jacek Urbaniec (II UJ) podejmuje kwestię wpływu matematyki na argumentację filozoficzną. Wyróżnia on dwa rodzaje refleksji nad matematyką.

W pierwszej z nich traktuje się matematykę całościowo, jako fenomen intelektualny, umieszczając w centrum uwagi podstawy matematyki, twierdzenia metamatematyczne itp.

Przykładem drugiego rodzaju refleksji było wprowadzenie A. Lasoty, w którym rozważano poszczególne obiekty matematyki po to (!), by wyprowadzić wnioski odnoszące się do rzeczywistego, fizycznego świata. Nie ma w tym — według J. Urbańca — nic zaskakującego dopóty, dopóki przedmiotem naszych badań jest abstrakcyjny model pewnego fragmentu rzeczywistości. Co jednak począć z przedmiotami matematyki, które nijak nie mają się do poznanego dotychczas świata fizycznego? W takich przypadkach pozostaje założyć, że rozważania nie ograniczone do modelu znanej rzeczywistości są z jakichś powodów ciekawe i twórcze — że mogą wnieść istotny wkład do naszego rozumienia świata.

SZTUKA OGRODOWA

Powrócimy teraz do poruszonych już wyżej zagadnień związanych z falsyfikacjonizmem. Jego matematycznych odpowiedników poszukuje R. Duda w „Uwagach o rozwoju matematyki".

Rozpoczyna on od twierdzenia, że matematyka jest elementem kultury i doznaje wpływów swego otoczenia kulturowego. Charakterystyczną cechę «ciała matematycznego» jest to, że w czasie swego rozwoju ulega ciągłemu przewartościowaniu i selekcji. Z wielu przyczyn tego stanu rzeczy należy wymienić tendencje kompleksyfikacyjne — pogłębiające złożoność przedmiotów matematyki, oraz symplifikacyjne — prowadzące do uproszczenia, uogólnienia, jasności struktur matematycznych. Takim procesom towarzyszy, rzecz jasna, eliminowanie pewnych fragmentów matematyki, tak jak ma to miejsce w naukach empirycznych, gdy pozbywają się one pewnych teorii.

Jednakże w tym wypadku, «dosłowny» falsyfikacjonizm nie ma zastosowania. Jego odpowiednikami w matematyce są procedury, nazwane roboczo przez R. Dudę „zasadą wypierania", oraz „zasadą petryfikacji". Zgodnie z pierwszą zasadą usuwamy z matematyki fragmenty o ograniczonej skuteczności, niepotrzebnie złożone, zbyt wąskie zakresowo i zastępujemy je skuteczniejszymi, prostszymi, ogólniejszymi. Druga zasada nie jest już tak oczywista. Zgodnie z nią muszą iść w zapomnienie te działy matematyki, które nie spełniły oczekiwań twórców i użytkowników lub (!) wręcz przeciwnie — spełniły oczekiwania aż nazbyt satysfakcjonująco, zostały «wyeksploatowane»: nie ma już w nich ważnych pytań, wielkich problemów. W obu wypadkach nie mamy oczywiście do czynienia z falsyfikacją teorii. W pierwszym wypadku decydują względy pragmatyczne lub estetyczne; w drugim — teorie w ogóle nie są zastępowane przez inne: tracą jedynie na ważności, pozostając w cieniu często od nich zależnych konstrukcji.

Taki obraz matematyki, w którym R. Duda dopatruje się podobieństwa do sztuki, porównany zostaje ostatecznie do drzewa, dla którego zdrewniałe, martwe komórki w pniu i konarach, są niezbędne po to, by drzewo mogło żyć — sięgać korzeniami w głąb i dawać owoce w koronie.

* * *

Dyskusja zamykająca drugą część książki — „Dowód — algorytm — komputer" — obraca się wokół wspomnianej już kwestii coraz częstszego stosowania komputerów do dowodzenia twierdzeń matematycznych. Tym jednak razem głos mają matematycy.

AKSJOMATYCZNY RACHUNEK «MASZYNOWY»

A. Pelczar (IM UJ) uważa, że wraz z użyciem komputerów w matematyce pojawiła się nowa jakość. Chodzi oczywiście o użycie istotne: w dowodach matematycznych, a nie do rysowania wykresów. W obliczu tego faktu matematycy — zdaniem A. Pelczara — stosują trzy strategie działania. Po pierwsze, dowody prowadzi się tak, aby wyeliminować ewentualne ryzyko związane z błędami numerycznymi komputera. Po drugie, uważa się dowody komputerowe za nową klasę dowodów matematycznych i z takim zastrzeżeniem dopuszcza się je do funkcjonowania w matematyce, jako «prawie» dowody lub dowody z «danym prawdopodobieństwem». Po trzecie, uznaje się, że w matematyce trzeba uporać się z nowymi problemami związanymi z brakiem ścisłości, w sensie dotychczas rozumianym przez matematyków.

Według A. Pelczara, jedną z możliwości wyjścia z zaistniałej sytuacji będzie próba wprowadzenia do systemu aksjomatycznego dodatkowych pojęć pierwotnych oraz dodatkowych aksjomatów (np. aksjomatu głoszącego, że program jest poprawny).

Powstaje naturalnie pytanie, po co narażać na szwank status matematyki jako nauki absolutnej? Czy chodzi tylko o zwykłe ułatwienie pracy matematyków, znudzonych wielogodzinnymi obliczeniami, co jest zapewne uzasadnieniem użycia komputerów w większości dziedzin, w których je stosujemy? A może matematycy wykorzystujący w swej pracy maszyny liczące ufają im bardziej niż sobie samym?

W POSZUKIWANIU STRACONEGO CZASU

Tekst Stanisława Sędziwego (II UJ) „Czas w matematyce" przynosi częściową odpowiedź na pytanie o przyczynę używania komputerów w matematyce.

Jak zauważa na wstępie S. Sędziwy, pojawienie się w matematyce dowodów wspomaganych komputerowo jest ściśle związane z czynnikiem czasu, mierzonego liczbą operacji matematycznych potrzebnych do przeprowadzenia danego rozumowania. [Jeśli istotnie wykonanie pewnej liczby — niezbędnych dla przeprowadzenia dowodu — obliczeń przekraczałoby możliwości intelektualne człowieka, byłaby to, jak się wydaje, wystarczająca legitymizacja dowodów wspomaganych komputerowo.]

Nietrudno tu o przekonywający przykład. Jak wiadomo rozwiązanie układu równań liniowych można wyznaczyć za pomocą wzorów Cramera przy pomocy wyznaczników. Metoda ta staje się jednak zupełnie bezużyteczna w wypadku wysokiego wymiaru wyznacznika — ponieważ czas potrzebny do przeprowadzenia wymaganych obliczeń przekracza czas obecnie dostępny badaczom. Już przy układzie 20 niewiadomych, projektowanej dopiero [w 1995 roku] maszynie cyfrowej, mającej wykonywać 1012 operacji na sekundę, obliczenie samych tylko mnożeń takiego układu zajęłoby 30 lat. To stanowczo za wiele, zważywszy, że rozwiązujemy obecnie układy mające dziesiątki tysięcy zmiennych. Oczywiste jest więc, że do listy wymagań metodologicznych powinniśmy dołączyć jeszcze jedno:

Spośród wszystkich równoważnych (bo dających ten sam wynik) algorytmów rozwiązania układu równań liniowych wybrać ten, który minimalizuje liczbę obliczeń.

Właściwie z tym samym problemem mamy do czynienia w znanym dowodzie hipotezy czterech barw, kiedy to komputer posłużył jedynie do rozwiązania ponad 1000 przypadków szczegółowych zagadnienia z teorii grafów, których wykonanie bez użycia komputera leży poza możliwościami czasowymi człowieka.

Powracając do kontrowersji, jakie budzi używanie komputerów w matematyce, warto zwrócić uwagę na przytaczany przez S. Sędziwego fakt, że i w matematyce «czystej», niekomputerowej, rzadko mamy do czynienia z dowodami o stopniu ścisłości, jaki chcieliby tu widzieć metodologowie. Bywa często, że za dowód uznaje się szereg niezbyt uporządkowanych hipotez. Przewagą dowodów tradycyjnych jest jednak to, że błędy i niedociągnięcia metodologiczne mogą być zauważone, kiedy całość dowodu znajduje się na papierze i może być uchwycona przez człowieka.

W przypadku użycia komputerów takiej bezpośredniej kontroli jesteśmy pozbawieni.

Takim wnioskiem kończy się praca S. Sędziwego. Jak widać, świadomość problemów, jakie stoją przed matematyką w związku z jej nowym narzędziem naukowym, nie jest obca samym matematykom. Dalecy są oni jednak od snucia katastroficznych prognoz.

EWOLUCJA
homo mathematicus — homo informaticus

Najpełniejsze chyba ujęcie problemów związanych z obecnością komputerów w praktyce matematycznej odnajdujemy w artykule Krzysztofa Szyszkiewicza (II UJ) i J. Urbańca pt. „Ewolucja dowodu matematycznego".

Początek artykułu przynosi garść nowych informacji na temat zagadnienia czterech barw (dowiadujemy się między innymi, że przewidywany przez autorów dowodu czas pracy komputera wynosił 1000 godzin!). Jednak najistotniejsze w tym artykule jest przybliżenie «technicznych» problemów związanych z używaniem komputerów w matematyce.

Istotnym zagadnieniem, jakie powinniśmy brać pod uwagę przy analizie dowodu wspomaganego komputerowo, jest to, czy kroki dowodu odbywają się w arytmetyce dokładnej — co znaczy, że otrzymany wynik jest ścisły — czy też komputer prowadzi swe obliczenie w matematyce ciągłej, gdzie kombinatoryczne obliczenia mogą być wyłącznie przybliżone. Problem bowiem w tym, że przybliżenie to ma tendencję do oddalania się od właściwego wyniku przy kolejnych krokach obliczeń. Mówiąc ogólnie, możemy mieć do czynienia z błędami danych wejściowych (kiedy komputer zaokrągla daną, którą jest np. liczba niewymierna), z błędami zaokrągleń (kiedy komputer zaokrągla «rozważane» przez siebie liczby, by ich zapis składał się z tej samej ilości cyfr, gdyż tylko takimi potrafi się posługiwać), oraz błędami obcięcia (kiedy np. ogranicza szereg nieskończony do skończonej liczby składników lub aproksymuje funkcję nieliniową za pomocą liniowej).

Widać z tego, że najwięcej problemów sprawia maszynom liczącym matematyka ciągła. Nie znaczy to jednak, że w zagadnieniach dotyczących nieskończonych zbiorów nieprzeliczalnych komputery są bezużyteczne. Na przykład jeśli chcemy ustalić, czy dana funkcja f posiada miejsce zerowe w przedziale $[a, b]$, możliwe jest kontrolowanie numerycznych błędów komputera. Jeśli bowiem f jest funkcją ciągłą, stosują się do niej twierdzenia Darboux o przyjmowaniu przez funkcję ciągłą wartości pośrednich. Takie rozwiązanie, choć radzi sobie z błędami obcięcia, nie uwalnia nas od problemu błędów zaokrąglania: nadal niezbędna jest ich dokładna kontrola. Należy jednak zwrócić jeszcze raz uwagę na to, że takie problemy nie dotyczą dowodów w arytmetyce dokładnej (por. dowód hipotezy czterech barw).

Dla podbudowania swego optymizmu w kwestii stosowania komputerowych metod numerycznych dla dowodzenia twierdzeń matematycznych K. Szyszkiewicz i J. Urbaniec przedstawiają dowód Mischaikowa i Mrozka na istnienie chaosu w równaniach Lorenza.

Najważniejszym momentem tego dowodu jest wyznaczenie niezwykle skomplikowanego pojęcia topologiczno-algebraicznego tzw. indeksu Conleya — niezbędnego do sprawdzenia założeń pewnego twierdzenia. Do obliczenia funkcji dla której liczy się ten indeks, autorzy dowodu posłużyli się metodą całkowania numerycznego Rungego--Kutty rzędu 4, i w tym miejscu pojawiły się błędy zaokrągleń. Kontrola tych błędów odbywała się za pomocą arytmetyki przedziałowej, która opiera się na pomyśle reprezentowania pewnej nieznanej dokładnie liczby przedziałem przybliżającym ją od dołu i od góry i dalej wykonywania obliczeń matematycznych na przedziałach. Aby metoda ta funkcjonowała poprawnie, trzeba się jeszcze uporać z wykładniczym tempem poszerzania przedziałów w czasie wykonywania kolejnych obliczeń. Uporawszy się z tym problemem, Mischaikow i Mrozek otrzymali zgrabny dowód, który jednocześnie świadczy o przydatności komputerów w dowodzeniu twierdzeń w matematyce ciągłej (a przez *Encyclopedia Britannica* został zaliczony — m.in. obok dowodu twierdzenia Fermata — do czterech najważniejszych wydarzeń matematycznych w 1995 roku).

Nie ulega wątpliwości, że dowodów wspomaganych komputerowo oraz automatycznego dowodzenia twierdzeń, nie można traktować jak zwykłych dowodów matematycznych. Ich uwikłanie w technologię informatyczną ma znaczący wpływ na ostateczny wynik. Nieuzasadniony jest jednak sprzeciw wobec przyjmowania takich dowodów. Stanowią one — zdaniem K Szyszkiewicza i J. Urbańca — kolejny etap w ewolucji pojęcia dowodu matematycznego.

* * *

Na tym kończy się druga część książki *Otwarta nauka i jej zwolennicy*. Spięcie między naukowcami a filozofami, o które chodziło organizatorom konferencji, doszło już w niej do skutku, choć jeszcze nie w odniesieniu do fundamentalnych rozbieżności, być może dlatego, że rozbieżności fundamentalnych nie ma. Można powiedzieć żartobliwie, nawiązując do tytułu książki, że jeśli już ktoś naukę «domyka», to są to filozofowie, stawiający przed nią limitujące wymagania metodologiczne. Nie wychodzi to nauce na dobre tylko wtedy, gdy wymagania postawione są zbyt wysoko i nie liczą się dostatecznie z rzeczywistymi warunkami badań.

Przejdźmy teraz do pierwszej części omawianej książki.

JAK HEISENBERG Z POPPEREM

Przegląd treści tej części rozpoczniemy od artykułu Andrzeja Staruszkiewicza (I Fiz. UJ) „Absolutność prawdy odkrywanej przez fizykę".

A. Staruszkiewicz chwali najpierw Poppera, co dobrze wygląda na początku książki zbierającej materiały spotkania odbytego pod «patronatem» tego filozofa. Chwali go jednak za to, na czym filozofom nauki najmniej chyba zależy, tzn. za jego poglądy w dziedzinie filozofii społecznej. Jednocześnie wcale nie chce się z nim zgodzić w sprawach kluczowych dla nauki. Wypowiedź A. Staruszkiewicza jest modelowym przykładem niewspółmierności stanowisk filozoficznych i naukowych. Tam gdzie filozof jest sceptykiem, bo nie widzi możliwości logicznego (a więc pewnego) uzasadnienia twierdzeń nauki, naukowiec powiada, że byłoby niedorzecznością przypuszczać, że twierdzenia te są fałszywe. Płynie z tego wniosek , że filozofowie nie powinni przejmować się zbytnio swoją rolą w nauce. Czym innym jest twierdzić, że z teoriami jest tak, jak każe sądzić falsyfikacjonizm (filozofowie); czym innym zaś jest przejmować się falsyfikacjonizmem (naukowcy).

A. Staruszkiewicz falsyfikacjonizmem się nie przejmuje i twierdzi, że zawartość elementarnych podręczników fizyki stanowi w ogromnej części prawdę ostateczną, która nigdy nie zostanie zakwestionowana (np. zasada nieoznaczoności, prawa Keplera). Oczywiście jedno — to coś twierdzić, drugie — to swoje twierdzenie udowodnić. Jeszcze jaskrawszym przykładem «niedomówienia się stron» jest twierdzenie A. Staruszkiewicza, że teoria względności nie falsyfikuje mechaniki klasycznej, a jedynie ją «rozszerza», polepsza: wymienia pewne części, inne pozostawiając. Kwestia tego, czy falsyfikacja pewnych zdań teorii jest falsyfikacją całości tej teorii, czy też tylko ulepszającą zmianą, jest marginalna i nie musimy się nią tu zajmować. (Oczywiście, aby teorię x sfalsyfikować, wystarczy sfalsyfikować jedno jej zdanie: teoria x', identyczna z teorią x minus sfalsyfikowane zdania — to nie-ta-sama-teoria-x.)

Nie jest oczywiście tak, że falsyfikacjonizm nie ma, zdaniem A. Staruszkiewicza, zastosowania w fizyce. Mówiąc dokładniej twierdzi on, że powyższe pretensje dotyczą błędnej interpretacji falsyfikacjonizmu. Zastosowanie falsyfikacjonizmu tłumaczyć można jednak inaczej. Jak wiadomo, wielkie teorie naukowe są matematycznymi modelami rzeczywistości fizycznej, «zamkniętymi» w równaniach fizyki matematycznej, takich jak równania Newtona, Maxwella, czy równania Einsteina w teorii względności. Problem z owymi równaniami jest taki, że choć wszystkie równania matematyczne są wypowiedziami nieskończenie ostrymi (czyli w wysokim stopniu narażonymi na błąd), w fizyce równań nieskończenie ostrych właściwie nie ma. Czym innym jest równanie podające masą protonu wyrażoną wielokrotnością masy elektronu $m_p / m_e = 1836{,}1...$ a czym innym banalne $1/3 = 0{,}333...$. Różnica polega właśnie na tym, że kropki kończące drugie z powyższych równań interpretujemy jako nieskończony szereg cyfr 3, i otrzymujemy wyrażenie nieskończenie dokładne, a kropki w pierwszym z nich, wyrażają naszą niewiedzę na temat cyfr, które powinny zajmować miejsca wykropkowane: wyrażają fakt, że nie znamy pewnej wielkości z taką dokładnością. Co więcej, można przedstawić przekonywające racje, przemawiające za tym, że poznać jej nie uda nam się nigdy (choćby z takiego powodu, że zarówno *elektron jak i proton potrzebują nieskończenie długiego czasu, żeby odbudować swoje pole Coulomba zniekształcone uprzednio przez przyspieszenie*; masa ich więc po przekroczeniu pewnej dokładności przestaje być wielkością dobrze określoną).

Tak więc, podstawowa i najbardziej owocna metoda fizyki teoretycznej — tworzenie matematycznych modeli rzeczywistości — jest ze swej natury narażona na błąd, na który narażone są wszystkie wypowiedzi nieskończenie ostre, a nie będące wypowiedziami czysto matematycznymi. Dlatego właśnie A. Staruszkiewicz twierdzi, że zastępowania jednych teorii drugimi nie powinniśmy traktować jako falsyfikacji. Wprowadzenie w przyszłości modyfikacji w teorii względności nie będzie jej falsyfikować, jako że i dziś wiemy, że jest ona jedynie przybliżeniem, mimo że nie potrafimy wskazać tych własności fizycznych, których ogólna teoria względności poprawnie nie opisuje.

Falsyfikować można twierdzenia, które ktoś wypowiada, a nikt nie twierdzi, że ogólna teoria względności stosuje się na odległościach rzędu odległości Plancka.

Stanowisko A. Staruszkiewicza jest jasne, choć trochę niekonsekwentne. Filozofowie, jak sądzę, uznali, że teoria względności falsyfikuje teorię Newtona, gdyż pojęli tę drugą właśnie jako ostateczną (zatem głoszącą, że stosuje się zawsze i w każdych warunkach). Nie było to przypadkiem; przecież — jak sam zauważył A. Staruszkiewicz — fizycy epoki Newtona (Laplace) za taką ją właśnie uznawali. Jeśli jednak faktycznie w teorii względności Einsteina, istnieje formalne zastrzeżenie, że jest jedynie przybliżeniem, i że należy się spodziewać przypadków niezgodnych z przewidywaniami równań teorii, lub tak się ją powszechnie interpretuje, to oczywiście nie ma o czym mówić. Nie zgadzać się można z twierdzeniami, które ktoś wypowiada, a nikt nie twierdzi, że teorię, która sama zakłada swoją falsyfikowalność można sfalsyfikować.

* * *

Zbliżamy się do końca naszego omówienia. Z pozostałych trzech tekstów pierwszej części książki omówimy tylko jeden, gdyż pozostałe, autorstwa Michała Kokowskiego (IHN PAN) oraz Adama Łomnickiego (IZ UJ), choć bardzo ciekawe, dotyczą zagadnień, które odbiegają nieco od naszego głównego wątku. Tak się złożyło, że wymiana uwag między filozofami i naukowcami w czasie krakowskiego sympozjum była jednostronna: naukowcy wypowiadali się chętniej o filozofii niż o nauce, a filozofowie o nauce — niż o filozofii. Od matematyków usłyszeliśmy kilka argumentów do wykorzystania w sporze o determinizm, a fizycy mówili dużo o falsyfikacjonizmie. Filozofowie natomiast woleli rozmawiać o teoriach naukowych — mniej o filozoficznych.

MIEJSCE DLA PLATONA

Nie inaczej jest w wypadku „Mechaniki kwantowej i neopozytywizmu" Michała Hellera. Artykuł ten stawia sobie za zadanie znalezienie wytłumaczenia dla historycznej obserwacji związku pomiędzy mechaniką kwantową i neopozytywizmem oraz ich późniejszych losów. Chodzi dokładnie o pytanie, dlaczego — mimo istotnych i daleko idących pokrewieństw miedzy kopenhaską interpretacją mechaniki kwantowej i neopozytywizmem — tylko tej pierwszej udało się odnieść sukces, podczas gdy neopozytywizm poniósł sromotną klęską, okazując się po prostu programem błędnym? Od razu winniśmy uczynić zastrzeżenie. M. Heller nie zamierzał wnikać w trafność kilku wcale nieoczywistych tez, koniecznych do postawienia powyższego pytania. Dlatego też kwestie pokrewieństw, klęsk i sukcesów, powinniśmy odsunąć na bok. Uczynić to warto, jeśli dzięki temu zdobywamy szansę poznania ciekawego stanowiska.

Punktem wyjścia tych poszukiwań jest (zupełnie wystarczające do tych celów) krótkie sformułowanie doktryny Koła Wiedeńskiego, łatwo dające się zinterpretować dla celów i zastosowań mechaniki kwantowej w jej kopenhaskim wcieleniu:

D1. Cała dostępna nam wiedza empiryczna da się wyrazić w języku obserwacyjnym, tj. w języku, w którym rejestrowane są spostrzeżenia dostępne w normalnych warunkach każdemu nieupośledzonemu obserwatorowi.

D2. Treść empiryczna terminów teoretycznych (terminów, za pomocą których formułowane są twierdzenia teorii empirycznych) wyczerpuje się w pełni w związkach logicznych, łączących je z terminami obserwacyjnymi (terminami pozalogicznymi języka obserwacyjnego).

Teraz zacytujmy kwantową wersję tych tez:

F1. Cała dostępna nam wiedza empiryczna o świecie kwantowym daje się wyrazić przy pomocy obserwabli, tj. tych wielkości, które można mierzyć, a wyniki pomiarów wyrażać w postaci liczb rzeczywistych

F2. Cała fizyczna treść mechaniki kwantowej wyczerpuje się w związkach formalnych łączących matematyczną strukturę mechaniki kwantowej z obserwablami.

Dlaczego D1 i D2 uznano za fałszywe, mimo że F1 i F2 przetrwały próbę czasu?

Kluczem do rozwiązania tej zagadki jest rola, jaką pełnią w mechanice kwantowej obserwable i ich związki ze strukturą matematyczną przestrzeni Hilberta. Przestrzeń ta rozumiana jest jako przestrzeń fazowa układu kwantowego. Jej wektory reprezentują stany obiektów kwantowych. Hermitowskie ograniczone operatory liniowe działające na przestrzeni Hilberta, czyli fizyczne wielkości mierzalne, to właśnie obserwable. Tak więc $B(H)$ — zbiór wszystkich ograniczonych operatorów liniowych na H (przestrzeni Hilberta) — przedstawia zbiór wszystkich możliwych wielkości mierzalnych danego układu kwantowego. Twierdząca odpowiedź na pytanie, czy możliwe jest, by dla celów poznawczych ograniczyć się wyłącznie do rozpatrywania zbioru $B(H)$, zawierającego zgodnie z ideologią pozytywistyczną całą treść fizyczną teorii, jest realizacją «programu pozytywistyczno-kopenhaskiego».

Oczywiście taka twierdząca odpowiedź pada. Opisany wyżej zbiór $B(H)$, czy raczej jego istotne własności, możemy wyekstrahować podnosząc je do rangi aksjomatów nowej struktury matematycznej nazywanej „C^*-algebrą". Elementy nowej struktury interpretujemy jako obserwable układu kwantowego, a jego stany są teraz dodatnimi funkcjonałami liniowymi na danej C^*-algebrze. Tak więc otrzymujemy podwójne ujęcie mechaniki kwantowej, którą możemy odtąd uprawiać w dwóch strukturach matematycznych, zależnie od tego, jak nam wygodnie.

Istotną własnością tych struktur jest to, że są one ściśle ze sobą związane, co ujawnia twierdzenie Gelfanda-Neimarka-Segala. W swojej fizycznej interpretacji głosi ono, że dla dowolnego obiektu kwantowego w stanie *x*, będącego dodatnim liniowym funkcjonałem na *C**-algebrze, można zdefiniować reprezentację *C**-algebry na pewnej przestrzeni Hilberta. Korzyści płynące z tego faktu są oczywiste; posługując się wprawdzie ogólniejszą i w wielu miejscach lepszą *C**-algebrą, zawsze mamy szansę powrócić do ujęcia Hilbertowskiego, odzyskując przydatny w innych okolicznościach bogaty aparat tej teorii.

W świetle tych rozważań, można już dać odpowiedź na postawione pytanie. Mechanika kwantowa spełnia program postawiony nauce przez neopozytywizm w tym sensie, że jest teorią wielkości mierzalnych, a nie dlatego, że doktryna filozoficzna neopozytywizmu jest słuszna. Jej wymagania stosują się bowiem tylko tam, gdzie teorie fizyczne mają swoje twierdzenie „GMS". W mechanice kwantowej to właśnie GMS zapewnia redukowalność teorii do języka obserwacyjnego, dzięki czemu *daje się ją uprawiać, w zasadzie myśląc tylko o wielkościach mierzalnych.*

Oczywiście sam fakt występowania tego twierdzenia nic by nam nie dał, gdyby nie to, że dysponujemy dodatkowo wystarczającą liczbą wielkości mierzalnych. Mechanika kwantowa znajduje się w takiej komfortowej sytuacji. Znacznie gorzej jest z mechaniką klasyczną, w wypadku której ograniczenie się wyłącznie do wielkości mierzalnych byłoby istotnym zubożeniem. Na szczęście taki program ograniczania nie jest w ogóle potrzebny, ponieważ w wypadku mechaniki klasycznej, wszystkie wielkości mierzalne pochodzą wprost z naszego — makroskopowego — świata, dzięki czemu potrafimy je łatwo zinterpretować w strukturze matematycznej.

Zupełnie inaczej — zdaniem M. Hellera — sprawa ma się z próbami zbudowania kwantowej teorii grawitacji. Tutaj jesteśmy prawie całkowicie «skazani» na uśmiech losu — nie dysponujemy bowiem prawie żadnymi obserwablami. Jedyne więc co możemy zrobić, to *próbować rozmaitych struktur matematycznych w nadziei, że któraś z nich «wpadnie w rezonans» ze strukturą świata rządzonego prawami kwantowej grawitacji.*

Rozważania te prowadzą nas w stronę wątpliwości, w jaki sposób powinniśmy interpretować związek teorii fizycznych z ich matematycznymi «rusztowaniami». M. Heller wyraża przekonanie, że nie powinniśmy zbyt łatwo ulec wrażeniu dosłownej odpowiedniości struktur matematycznych teorii fizycznych względem opisywanych przez nie obszarów świata. Chodzi o to, że pewne teorie (np. mechanika kwantowa) posiadają tych struktur więcej, dlatego też trudno byłoby mówić o jedno-jednoznaczej odpowiedniości.

Choć ostatni akapit tekstu M. Hellera ma wydźwięk sceptyczny, wierności temu tonowi autor nie dochowuje i kończy ryzykowną hipotezą (być może bardziej cytowaną niż akceptowaną). Hipoteza ta głosi istnienie ostatecznej struktury świata — „platońskiej matematycznej idei", której cieniami miałyby być struktury przestrzeni Hilberta lub *C**-algebry. Nie zwróciłbym na to być może uwagi, gdyby nie wcześniejsza opinia M. Hellera na temat matematycznej struktury świata. W zreferowanej wcześniej dyskusji nazwał on ją „polem racjonalności", „Matematyką przez duże *M*" i uznał ją za źródło matematyki (przez małe *m*) — dostępnej ludziom...

* * *

W ten sposób dotarliśmy do końca — a zatem, jak pamiętamy, wedle przyjętej drogi, do początku — książki. Zwróciłem już wcześniej uwagę na szczególną zamianę ról uczestniczących w dyskusji stron: filozofów i naukowców. Jeśli celem krakowskiej konferencji było doprowadzenie do ich «dyskusyjnego spięcia», to obie strony dokonały tego «dywersyjną» metodą wniknięcia w szeregi przeciwnika.