Filozofia Nauki
Rok VII, 1999, Nr 3—4(27—28)

ARCHIWUM

Stanisław Leśniewski

Podstawy ogólnej teorii mnogości. I

(Część. Ingrediens. Mnogość. Klasa. Element. Podmnogość. Niektóre ciekawe rodzaje klas.)

Łatwiej bądź co bądź prawdę wypisać, wyrozmawiać, wydyskutować — niż ją wymilczeć.

Tadeusz Kotarbiński,
„Metoda konstrukcyjna a rozumowanie osobiste",
Przegląd Filozoficzny, 1914, s. 182

Żonie mojej ofiaruję

1. Już po raz szósty gościmy w ***Filozofii Nauki*** *Stanisława Leśniewskiego. Dotąd zmieściliśmy na naszych łamach następujące teksty: „Przyczynek do analizy zdań egzystencjalnych" (****Filozofia Nauki*** *r. II(1994) nr 1 s. 117—134); „Próba dowodu ontologicznej zasady sprzeczności" (****Filozofia Nauki*** *r. II(1994) nr 2 s. 117—147); Głos w dyskusji wokół genezy logiki trójwartościowej (****Filozofia Nauki*** *r. II(1994) nr 3—4 s. 235-237); „O podstawach filozoficznych teorii mnogości" (****Filozofia Nauki*** *r. VI(1998) nr 2 s. 123—139); Listy do Kazimierza Twardowskiego (****Filozofia Nauki*** *r. VI(1999) nr 1—2 s. 115—133). Obecnie przyszła kolej na* ***Podstawy ogólnej teorii mnogości. I*** *— dzieło, które w oryginale jest dostępne w Polsce w zaledwie kilku bibliotekach publicznych. Zostało ono wydane w 1916 roku jako druga pozycja Prac Polskiego Koła Naukowego w Moskwie (Sekcja Matematyczno-Przyrodnicza) — w Drukarni A.P. Popławskiego. Tak o okolicznościach powstania* Podstaw *pisał Tadeusz Kotarbiński („Garstka wspomnień o Stanisławie Leśniewskim", [w:]* ***Studia z historii filozofii i logiki****, Warszawa 1979, PWN, s. 294):*

Z zarodkiem [...] mereologii w głowie wyjechał Leśniewski do Rosji na czas pierwszej wojny światowej. Tam nauczał matematyki w szkole polskiej próbując pono częstować malców* a limine *potężnymi abstrakcjami i uściśleniami. O tym okresie jego życia mogliby zapewne opowiedzieć dość dużo panowie: profesor Wacław Sierpiński i profesor Wojciech Świętosławski, z których pierwszy zwłaszcza mógł z bliska obserwować jego działalność. Tam i w owym czasie Leśniewski sformułował i po polsku ogłosił pierwszy zarys systemu formalnego mereologii, nazywając ją jeszcze wtedy teorią mnogości. Nazwa mereologii dopiero później zaczęła wchodzić w użycie.*

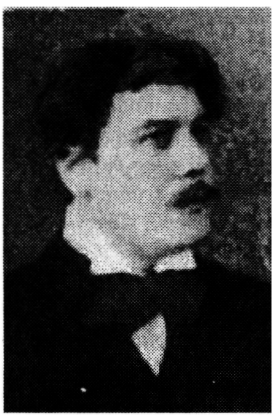
*2. W jednej z najnowszych poważnych encyklopedii filozoficznych można przeczytać, że Leśniewski był logikiem polskim pochodzenia... rosyjskiego (*sic*!). Jednym ze źródeł tego nieporozumienia jest zapewne to, że pierwsze oryginalne dzieło Leśniewskiego —* ***Podstawy ogólnej teorii mnogości*** *— było opublikowane właśnie w Moskwie, gdzie skądinąd w latach 1916—1918 uczył także matematyki w polskim gimnazjum pp. Jakubowskich. Innym źródłem jest być może fakt, że w 1913 roku Leśniewski wydał w Petersburgu broszurę* Logičeskie razsuždenija, *zawierającą rosyjskie przekłady „Przyczynku do analizy zdań egzystencjalnych" i „Próby dowodu ontologicznej zasady sprzeczności". Nie wykluczone wreszcie, że nieporozumienie wzięło się stąd, że Leśniewski urodził się w Sierpuchowie pod Moskwą. Sierpuchów był w owym czasie dużym węzłem kolejowym i mieszkała tam stale duża kolonia kolejarzy-Polaków, a wśród nich — ojciec Leśniewskiego, Izydor, który był inżynierem kolejnictwa, a także m.in. (jak się niedawno okazało) ojciec naszego znanego kompozytora, Witolda Rudzińskiego.*

3. Zamieszczona ubiegłego roku w ***Filozofii Nauki*** *praca „O podstawach teorii mnogości" została napisana — jak głosi napis pod tekstem pierwszego wydania — w Kimborciszkach, we wrześniu 1914 roku. W majątku teściów bywał następnie Leśniewski wielokrotnie: ostatni raz na rok przed śmiercią. Była to okolica pełna krewniaków żony: koło Kimborciszek, w Lipniszkach, mieszkał z rodziną jej stryj. Wspomina o nim w książce* ***Pani na Berżenikach*** *Wojciech Wiśniewski: „Był żonaty, ale dość nieszczęśliwy w małżeństwie". W liście (19) z Kimborciszek z dnia 6 czerwca 1936 roku Leśniewski tak opisywał ten majątek: „Żyto przed oknem, drzewa kwitnące, słowiki, rechot żab, koń «do dyspozycji» i inne tego rodzaju przyjemności" (s. 131). Jak wyglądają Kimborciszki dzisiaj?*

---

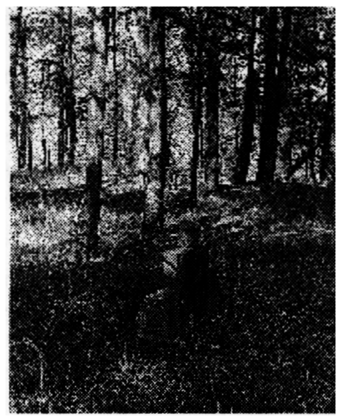
* Chodzi o szkołę Komitetu Polskiego w Moskwie — późniejsze warszawskie gimnazjum Władysława Giżyckiego. Traf chciał, że jednym z uczniów Leśniewskiego był wówczas Konstanty Gałczyński, przyszły poeta. Jego kolega z ławy szkolnej tak wspominał tamte moskiewskie czasy: „Na lekcji algebry, którą wykładał wielki logista Leśniewski (według naszej nomenklatury: Lew), można było używać. Każdy robił co chciał. Lew nie zwracał uwagi na takie drobiazgi" (zob. Jan Hoppe, „Mały Ildefons", [w:] A. Kamieńska i J. Śpiewak (red.), *Wspomnienia o K.I. Gałczyńskim*, Warszawa 1961, Czytelnik, s. 49). [Bardzo dziękuję Panu Lechowi Stępniewskiemu za zwrócenie mi uwagi na ten barwny epizod z życia dwóch wielkich ludzi (JJJ).]

Żyto tu i ówdzie rośnie, ale nie można już na nie patrzyć przez okna dworu — bo pozostały po nim jedynie fundamenty, które porasta bujna roślinność. Sady zdziczały zupełnie, ale przetrwały — i jeszcze dziś robią imponujące wrażenie. Słowiki kląskają w resztkach dworskiego parku, żaby rechocą w zapuszczonym stawie, ale konia do dyspozycji oczywiście nie ma — ocalałą stajnię przerobiono na dom mieszkalny. Za to od okolicznych mieszkańców można się dowiedzieć (po polsku!), jak dotrzeć do porośniętego sośniną wzgórza, gdzie zachowały się fragmenty kamiennego nagrobka — z inskrypcją: **Śp. Marian Prewysz-Kwinto, syn ziemi brasławskiej, ochotnik WP, por. 13 puł. ułanów, ur. 1856 r. zm. 27 XI 1938 r. Cześć jego pamięci.***



Stanisław Leśniewski w wieku młodzieńczym

Z archiwum J.J. Jadackiego



Ocalały fragment nagrobka Mariana Prewysz-Kwinty w Kimborciszkach

Fot. J.J. Jadacki (1999)

*4. Ze względu na skąpość informacji biograficznych o Leśniewskim — każde nowe źródło takich informacji jest na wagę złota. Należą do nich dwa tomy **Dzienników** Kazimierza Twardowskiego, opublikowane w 1997 roku przez nieodżałowanej pamięci kronikarza Szkoły Lwowsko-Warszawskiej — Ryszarda Jadczaka.*

*Oto wzmianki dotyczące Leśniewskiego zaczerpnięte z owych **Dzienników** (cz. 1, s. 52—57, 67, 104, 111—113, 115, 236, 282, 300, 309, 324; cz. 2, s. 74, 110—113, 133, 149, 211 i 308).*

> ***Warszawa 1918 r.:** Posiedzenie Fakultetu Filozoficznego w Seminarium Filozoficznym [...] — referat Leśniewskiego, kawiarnia — wszyscy razem (9 czerwca). Od dziewiątej trzydzieści do dwunastej w Ministerstwie [Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego] z Leśniewskim pracuję. [...] Kawiarnia z Janiszewskim, Leśniewskim (który odprowadza mnie potem do do-*

* To tutaj, w 1939 roku — tuż po śmierci Leśniewskiego — Henryk Hiż zdawał u Kotarbińskiego egzamin z *Elementów*. Por. „Uwagi o Leśniewskim", *Ruch Filozoficzny*, t. L(1993), nr 1, s. 60.

mu), Tatarkiewiczem, Kotarbińskim, Znamierowskim (15 czerwca). Spotkanie z Górskimi i z Leśniewskim (17 czerwca). Cukiernia na Marszałkowskiej. Leśniewski i Kotarbiński odprowadzają mnie do hotelu (20 czerwca). Ministerstwo z Leśniewskim do wpół do drugiej. [...] Na Marszałkowskiej na podwieczorku z Łukasiewiczem, Kotarbińskim, Tatarkiewiczem, Leśniewskim, Znamierowskim, Chojeckim [...] do wpół do ósmej. Łukasiewicz i Leśniewski odprowadzają mnie na Foksal (22 czerwca). U Leśniewskich. Z nim do Instytutu [Filozoficznego]. [...] Potem razem od dziesiątej do jedenastej w cukierni. Wracamy razem. Kotarbiński, Leśniewski i Zabielski odprowadzają mnie aż do hotelu (25 czerwca). Wszyscy oni [tj. Łukasiewicz, Kotarbiński, Leśniewski i Czeżowski] i jeszcze inni byli na posiedzeniu, zwołanym przypadkiem na dziś, na którym uchwalili wobec zbliżającego się 25-lecia mej działalności akademickiej wydać zbiorowo moje niedostępne w handlu księgarskim prace (31 października). ***Lwów 1919 r.:*** *Z Wartenbergiem rozmowa o Leśniewskim. Wartenberg jest stanowczo przeciwny jego habilitacji (21 maja).* ***Warszawa 1919 r.:*** *Mówiliśmy [z Kotarbińskim] o sprawie Tatarkiewicza i Leśniewskiego. Powiedziałem mu o stosunku Wartenberga (28 czerwca). Z Łukasiewiczem omówiłem sprawę [...] Leśniewskiego (katedra filozofii matematyki) (29 czerwca). W restauracji „Warszawa" na Nowym Świecie wieczór spędziłem z Czeżowskim, Kotarbińskim, Borowskim, Lesniewskim, Chojeckim, a przyszedł czas jakiś Radecki. Leśniewski rozwijał zasady swej nowej najogólniejszej aksjomatyki, której I aksjomat brzmi: Jeżeli **a** jest **b**, to **a** jest **a** (1 lipca). U Sierpińskiego omawiam 3 sprawy: Leśniewskiego, Steinhausa, Żylińskiego (6 lipca).* ***Warszawa 1926 r.:*** *Od ósmej do dwunastej z Kazikiem [Ajdukiewiczem], Kotarbińskim i Łukasiewiczem u Leśniewskich. On dziś kończy 40 lat (28 marca). Obiad u Kazików, u którego po obiedzie Kotarbiński z Leśniewskim (17 grudnia). Załatwiając po drodze sprawunki, wróciłem do domu za kwadrans pierwsza — chwilkę był Leśniewski szukając Kazika (18 grudnia).* ***Lwów 1927 r.:*** *Maryna [córka Twardowskiego i żona Ajdukiewicza] opowiadała mi o nieprzyjemnościach koleżeńskich, których doznawał w ostatnich czasach Kazik w Warszawie ze strony Leśniewskiego i W. Witwickiego (24 marca).* ***Warszawa 1927 r.:*** *Około dziesiątej byłem kwadransik u Kotarbińskiego, następnie u W. Witwickiego do dwunastej — idąc do niego spotkałem na schodach Leśniewskiego (27 maja). Po referacie Izy [Dąmbskiej] miałem krótką dyskusję prywatną z Leśniewskim. Na obiedzie był Józek Tomczak, po obiedzie był chwilkę Lesniewski (20 września).* ***Warszawa 1929 r.:*** *Od Leśniewskiego [udałem się] do Wali [Buczyńskiej] (30 maja).* ***Lwów 1930 r.:*** *Komisja [do sprawy obsadzenia katedry logiki we Lwowie] zebrała [...] opinie: otrzymała je od Kotarbinskiego, Leśniewskiego i Łukasiewicza — jedną wspólną — z Warszawy [...]. Warszawa [opowiedziała się] za Tarskim, Kraków za Chwistkiem (11 stycznia). Rada [...] [Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego] wbrew opinii Leśniewskiego, Kotarbińskiego i Łukasiewicza oraz wbrew mojej opinii, na katedrę, którą zamierza stworzyć dla logiki, zaproponować uchwaliła nie Tarskiego, lecz Chwistka (24 stycznia). Wysłuchawszy sprawozdania Kazika o jego rozmowach z Kotarbińskim, Łukasiewiczem, Leśniewskim i Tarskim [...], uchwalił Wydział [PTF] jednomyślnie przekazać dalszą akcję w sprawie zorganizowania udziału Polaków w VII Zjeździe Filozoficznym, który ma się odbyć w Oxfordzie, Warszawskiemu Towarzystwu Filozoficznemu (27 stycznia). Ci co postępują wedle wzoru Leśniewskiego, bardzo arbitralnie domagają się analizy tam, gdzie im to dogodne, gdy jednak ktoś od nich domaga się analizy tam, gdzie im to niedogodne, powołują się na „intuicję". A [gdy] przeciwnik w dyskusji próbuje kiedyś również powołać się na „intuicję", odpowiadają: „Nie rozumiemy tego, co według ciebie ma być intuicyjnie dane" (12 sierpnia).* ***Lwów 1932 r.:*** *Opowiedział [*scil. *Kazik] [...] o tym, że prof. Leśniewski z Warszawy, którego PTF uchwaliło prosić na odczyt do Lwowa, nie przyjął zaproszenia (7 kwietnia).* ***Lwów 1933 r.:*** *Oświadczył*

[...] Chwistek [Kazikowi], że nic nie ma przeciw Kazikowi prócz tego, że tenże uznaje Leśniewskiego (13 października).

Redakcja

PRZEDMOWA

Praca niniejsza jest pierwszym ogniwem w dłuższym szeregu prac, które zamierzam wydać w bliższej lub dalszej przyszłości, pragnąc przyczynić się w miarę możności do uzasadnienia matematyki współczesnej. Że uzasadnienie takie nie jest rzeczą zbyteczną, jasne jest dla każdego, kto zna choćby „antynomie", do których doszła matematyka w ostatnich dziesięcioleciach swego rozwoju.

Układ definicji i pewników, które ustaliłem w niniejszej pracy, poświęconej najogólniejszym zagadnieniom teorii mnogości, ma dla mnie w porównaniu z innymi znanymi dotąd układami definicji i pewników (Zermelo, Russell itd.) tę zaletę, iż usuwa „antynomie" ogólnej teorii mnogości bez zwężania pierwotnego Cantorowskiego zakresu wyrazu „mnogość", jak to widać choćby z mego aksjomatu III, z drugiej zaś strony nie prowadzi do twierdzeń, znajdujących się w tak rażącym konflikcie z intuicjami „ogółu", jak choćby twierdzenie dotychczasowej „nie naiwnej" teorii mnogości, nakazujące odróżniać jakiś przedmiot od zbioru, zawierającego ten tylko jeden przedmiot jako element. Wyznaję chętnie, że niektóre twierdzenia moje, jak np. tw. XXVII, mogą urazić „intuicje matematyczne" różnych mniej lub więcej subtelnych myślicieli, kontemplujących wytworność pewnych konstrukcji teoretycznych niezależnie od tego, czy konstrukcje owe przyczyniają się w jakimkolwiek stopniu do ujęcia naukowego rzeczywistości, czy też służą tylko do usprawiedliwienia panujących w naszej epoce, a odznaczających się dużym stopniem bezwładności, matematycznych przyzwyczajeń. Nie mogę jednak odmówić sobie przyjemności skonstatowania faktu, że starałem się pisać pracę moją tak, by dotyczyła ona nie tylko wszelkiego rodzaju „wolnych tworów" rozmaitych mniej lub więcej dedekindujących duchów twórczych; wypada stąd, iż bardziej się troszczyłem o to, aby twierdzenia moje, posiadając postać możliwie ścisłą, harmonizowały ze „zdrowym rozsądkiem" zajmujących się badaniem nie przez nich samych „tworzonej" rzeczywistości przedstawicieli „esprit laique", aniżeli o to, aby to, co mówię, zgodne było z tymi „intuicjami" fachowych teoretyków mnogości, które wyszły z zaopatrzonej w aparat „wolnej twórczości" centryfugi matematycznych umysłów, zdemoralizowanych przez „oderwane od rzeczywistości" spekulacyjne konstrukcje.

Pragnę tu jeszcze dodać słów parę, jako środek profilaktyczny na ewentualne zarzuty krytyków z obozu „filozoficznego": oto — system swój traktuję wyraźnie jako system hipotetyczno-dedukcyjny, z czego wypada, iż stwierdzam właściwie jedynie to, że ze zdań, które nazywam „aksjomatami" wynikają zdania, które nazywam „twierdzeniami". „Źródłem" psychicznym moich aksjomatów są moje „i n t u i c j e", co znaczy po prostu, że w prawdziwość moich aksjomatów wierzę, dlaczego zaś wierzę, powiedzieć nie umiem, nie znam się bowiem na teorii przyczynowości. „Źródła" logicznego aksjomaty moje nie posiadają, co znaczy po prostu, że aksjomaty te nie posiadają dowodów w moim systemie, podobnie jak żadne w ogóle aksjomaty nie są z natury rzeczy udowadniane w tym systemie, dla którego są aksjomatami. Nie umiem wcale odpowiedzieć na pytanie, jaka jest „wartość obiektywna" moich aksjomatów, ani na żadne inne podobne pytania, które zadają sobie przedstawiciele tak zwanej teorii poznania — wyznaję bowiem z boleścią i na swoją wyraźną niekorzyść, że nie potrafiłem dotąd pomimo najszczerszych chęci zrozumieć ani jednego z problematów, które sobie stawia wspomniana właśnie a szanowna „nauka".

W kwestiach, dotyczących sposobów używania wyrazów, mam do nadmienienia, iż z terminów matematycznych, którymi się posługuję, nie definiuję jedynie wyrazu „część", przypuszczając, że termin ten może nie wzbudzać nieporozumień — z uwagi na to, iż intuicyjny jego charakter nabiera znacznej przejrzystości w świetle aksjomatów I i II. Terminy „mnogość" i „element", przyjmowane zwykle bez definicji w teorii mnogości, są zdefiniowane w niniejszej pracy.

Na zakończenie tych uwag wstępnych składam serdeczne podziękowania tym wszystkim, którzy w ten lub inny sposób przyczynili się do powstania mojej pracy, a przede wszystkim memu szanownemu profesorowi Wacławowi Sierpińskiemu, który mi nie szczędził swych kompetentnych informacji i wskazówek, oraz memu przyjacielowi drowi Tadeuszowi Kotarbińskiemu, którego liczne a pełne finezji logicznej uwagi przyczyniły się bardzo w swoim czasie do wypracowania głównych zrębów bronionej przeze mnie koncepcji. „Polskiemu Kołu Naukowemu w Moskwie" składam wyrazy prawdziwej wdzięczności za umożliwienie ukazania się mej pracy w druku już obecnie.

St. Leśniewski

Moskwa, w kwietniu 1916 roku

§ 1.

Aksjomat I. Jeżeli przedmiot P jest częścią przedmiotu P_1, to przedmiot P_1 nie jest częścią przedmiotu P.

Aksjomat II. Jeżeli przedmiot P jest częścią przedmiotu P_1, a przedmiot P_1 jest częścią przedmiotu P_2, to przedmiot P jest częścią przedmiotu P_2.

Twierdzenie I. Żaden przedmiot nie jest częścią samego siebie.

Dowód: Przypuśćmy, że pewien przedmiot X jest częścią samego siebie, to znaczy częścią przedmiotu X. Z przypuszczenia tego wypada — zgodnie z aksjomatem I —

iż przedmiot X nie jest częścią przedmiotu X, co jest sprzeczne z naszym założeniem. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że pewien przedmiot jest częścią samego siebie. Tak więc — żaden przedmiot nie jest częścią samego siebie, co właśnie należało udowodnić.

§ 2.

Definicja I. Używam wyrażenia „ingrediens przedmiotu P" dla oznaczenia samego przedmiotu P oraz każdej części tego przedmiotu.[1]

Bezpośrednimi wnioskami z tej definicji są dwa twierdzenia następujące:

Twierdzenie II. Każdy przedmiot jest swoim własnym ingrediensem.

Twierdzenie III. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

§ 3.

Twierdzenie IV. Jeżeli P jest ingrediensem przedmiotu P_1, a P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2, to P jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Dowód: Zgodnie z definicją I — zdanie:

(1) „P jest ingrediensem przedmiotu P_1, a P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2" jest prawdą zawsze i tylko wtedy, jeżeli jest prawdą jedno z czterech zdań następujących:

(2) „P jest P_1, P_1 jest P_2",

(3) „P jest P_1, P_1 jest częścią przedmiotu P_2",

(4) „P jest częścią przedmiotu P_1, P_1 jest P_2",

(5) „P jest częścią przedmiotu P_1, P_1 jest częścią przedmiotu P_2".

Jeżeli jest prawdą zdanie 2, to — na podstawie zasady sylogizmu — P jest P_2, a wobec tego — na zasadzie twierdzenia II — P jest ingrediensem przedmiotu P_2. Jeżeli jest prawdą zdanie 3, to P jest tu tym właśnie przedmiotem P_1, który jest częścią przedmiotu P_2, z czego wypada, że P jest częścią przedmiotu P_2, a więc — zgodnie z twierdzeniem III — P jest ingrediensem przedmiotu P_2. Jeżeli jest prawdą zdanie 4, to P, będąc częścią przedmiotu P_1, jest przez to samo częścią przedmiotu P_2, albowiem P_1 jest to — zgodnie ze zdaniem 4 — nic innego, jak właśnie P_2; tak więc i w tym wypadku P jest — zgodnie z twierdzeniem III — ingrediensem przedmiotu P_2. Jeżeli jest prawdą zdanie 5, to — zgodnie z aksjomatem II — P jest częścią przedmiotu P_2, z czego wypada na podstawie twierdzenia III, iż P jest ingrediensem przedmiotu P_2. Widzimy tedy, że jeżeli jest prawdą którekolwiek ze zdań — 2, 3, 4, 5 — to P jest ingrediensem przedmiotu P_2; ponieważ jednak zdanie 1 jest prawdą tylko

[1] Projekt zastosowania w tym wypadku wyrazu „ingrediens" poddał mi p. Lucjan Zarzecki.

w takim razie, jeżeli jest prawdą jedno z czterech zdań — 2, 3, 4, 5 — więc, jeżeli jest prawdą zdanie 1, to P jest ingrediensem przedmiotu P_2; inaczej: jeżeli P jest ingrediensem przedmiotu P_1, a P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2, to P jest ingrediensem przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie V. Jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż istnieje pewien taki ingrediens I_1 przedmiotu P, że żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P. Wnosimy stąd, że i sam I_1 (który zgodnie z twierdzeniem II jest ingrediensem przedmiotu I_1) nie jest ingrediensem przedmiotu P. Otrzymany wniosek, że I_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P, musi być fałszem, określiłem bowiem wyżej przedmiot I_1 jako ingrediens przedmiotu P. Musi więc być również fałszem prowadzące do tego wniosku przypuszczenie nasze, że twierdzenie V jest fałszem. Tak więc — twierdzenie V jest prawdą.

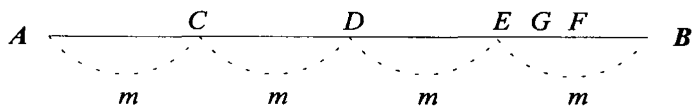
Twierdzenie VI. Jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż istnieje pewien taki ingrediens I_1 przedmiotu P, że żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem żadnego ingrediensu przedmiotu P. Wypada stąd dalej, iż żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P (który — zgodnie z twierdzeniem II — jest ingrediensem przedmiotu P). Możemy to sformułować inaczej (wiedząc o tym, że I_1 jest ingrediensem przedmiotu P), a mianowicie: żaden ingrediens pewnego ingrediensu przedmiotu P nie jest ingrediensem tego właśnie przedmiotu P. Twierdzenie otrzymane jest sprzeczne z twierdzeniem V. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie VI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie VI jest prawdą.

§ 4.

Definicja II. Wyrażenia „mnogość przedmiotów *m*" używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu P, który czyni zadość następującemu warunkowi: jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego *m*, które jest ingrediensem przedmiotu P.

[Przykłady: I. Każdy dany naród N, jest mnogością ludzi, albowiem, jeżeli I jest ingrediensem narodu N, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego człowieka, który jest ingrediensem narodu N. II. Powierzchnia szachownicy nie jest mnogością białych kwadratów, nie jest tu bowiem zachowany wymagany w definicji II warunek: oto — żaden czarny kwadrat, będąc ingrediensem szachownicy, nie posiada ani jednego takiego ingrediensu, któryby był ingrediensem jakiegoś białego kwadratu, nie jest więc prawdą, iż jeżeli I jest ingrediensem szachownicy, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego białego kwadratu, który jest ingrediensem szachownicy. III. Uważajmy odcinek AB rysunku 1 i użyjmy wyrazu „m" dla oznaczenia każdego z odcinków — AC, CD, DE i EB — będących częściami odcinka AB. Odcinek AF nie jest mnogością przedmiotów m, albowiem odcinek GF, będąc ingrediensem odcinka AF, nie posiada ani jednego takiego ingrediensu, który by był ingrediensem jakiegoś m, będącego ingrediensem odcinka AF, nie jest więc prawdą, iż jeżeli I jest ingrediensem odcinka AF, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego m, które jest ingrediensem odcinka AF.]



Rys. 1

Definicja III. Wyrażeń — „mnogość wszystkich przedmiotów m" oraz „klasa przedmiotów m" — używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu P, który czyni zadość dwom następującym warunkom:

1) każde m jest ingrediensem przedmiotu P,

2) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego m.

[Przykłady: I. Ludzkość jest mnogością wszystkich ludzi, czyli klasą ludzi, albowiem: 1) każdy człowiek jest ingrediensem ludzkości, 2) jeżeli I jest ingrediensem ludzkości, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego człowieka.

Rys. 2

II. Odcinek AC rysunku 2 nie jest klasą części odcinka AB, albowiem nie każda część odcinka AB jest ingrediensem odcinka AC, nie jest więc zachowany warunek 1 definicji III. III. Odcinek AB rysunku 2 nie jest klasą części odcinka AC, albowiem nie jest tu zachowany warunek 2 definicji III: odcinek DB, będący ingrediensem odcinka AB, nie posiada ani jednego takiego ingrediensu, który by był ingrediensem jakiejś części odcinka AC, nie jest więc prawdą, że jeśli I jest ingrediensem odcinka AB, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnej części odcinka AC.]

Aksjomat III. Jeżeli pewien przedmiot jest m, to pewien przedmiot jest klasą przedmiotów m.

Aksjomat IV. Jeżeli P jest klasą przedmiotów m, oraz P_1 jest klasą przedmiotów m, to P jest P_1.

§ 5.

Twierdzenie VII. Jeżeli P jest klasą przedmiotów m, to P jest mnogością przedmiotów m.

Dowód: załóżmy, że

(1) P jest klasą przedmiotów m.

Zgodnie z definicją III możemy zapisać:

(2) każde m jest ingrediensem przedmiotu P,

(3) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego m.

Z twierdzenia 3 wnosimy na podstawie twierdzenia 2, że jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego m, które jest ingrediensem przedmiotu P. Wynika stąd — w myśl definicji II — że

(4) P jest mnogością przedmiotów m.

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 4. Wypada stąd, że jeżeli P jest klasą przedmiotów m, to P jest mnogością przedmiotów m, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie VIII. Każdy przedmiot P jest klasą ingrediensów tego właśnie przedmiotu P.

Dowód: Na podstawie zasady tożsamości możemy zapisać:

(1) każdy ingrediens przedmiotu P jest ingrediensem przedmiotu P. Z twierdzenia VI wiemy, iż

(2) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu P.

Z twierdzeń — 1 i 2 — otrzymujemy zgodnie z definicją III twierdzenie żądane.

Twierdzenie IX. Jeżeli pewien przedmiot jest częścią przedmiotu P, to P jest klasą części przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) pewien przedmiot jest częścią przedmiotu P.

Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że

(2) P_1 jest częścią przedmiotu P.

Wobec prawdziwości twierdzenia 1 wnosimy z twierdzenia III, iż

(3) każda część przedmiotu P jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 3 i 2 — wynika, że

(4) P_1 jest ingrediensem przedmiotem P.

Z twierdzenia II wiemy, iż

(5) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 4 i 5 — wypada, że

(6) pewien ingrediens przedmiotu P jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 6 i 2 — wnosimy, iż

(7) pewien ingrediens przedmiotu P jest ingrediensem pewnej części P.

Możemy powiedzieć, że

(8) jeżeli *C* jest częścią przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *C* jest ingrediensem pewnej części przedmiotu *P*,

gdybyśmy bowiem przypuścili, że jest inaczej, to wypadłoby stąd, że pewna część C_1 przedmiotu *P* jest taka, iż żaden ingrediens przedmiotu C_1 nie jest ingrediensem żadnej części przedmiotu *P*, z czego wynikłoby (zgodnie z twierdzeniem II), że i sam przedmiot C_1 nie jest ingrediensem żadnej części przedmiotu *P*, stąd zaś otrzymalibyśmy wniosek, sprzeczny z twierdzeniem II, a mianowicie wniosek, iż C_1 nie jest ingrediensem przedmiotu C_1. Zgodnie z definicją I piszemy:

(9) każdy ingrediens przedmiotu *P* jest albo przedmiotem *P* albo częścią przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — 7 i 8 — wnosimy na podstawie twierdzenia 9, iż

(10) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnej części przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — 3 i 10 — wypada zgodnie z definicją III, że

(11) *P* jest klasą części przedmiotu *P*.

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 11. Wypada stąd, że jeżeli pewien przedmiot jest częścią przedmiotu *P*, to *P* jest klasą części przedmiotu *P*, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie X. Każdy dany przedmiot *P* jest klasą przedmiotów *P*.

Dowód: Wiedząc z twierdzenia II, iż *P* jest ingrediensem przedmiotu *P*, możemy zapisać:

(1) każde *P* jest ingrediensem przedmiotu *P*.

Z twierdzenia V wiadomo, że

(2) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnego *P*.

Z twierdzeń — 1 i 2 — otrzymujemy na podstawie definicji III twierdzenie żądane.

§ 6.

Definicja IV. Używam wyrażenia „element przedmiotu *P*" dla oznaczenia jakiegokolwiek przedmiotu P_1 wtedy, jeżeli przy pewnym znaczeniu wyrazu „*x*" zostają zachowane dwa następujące warunki:

1) *P* jest klasą przedmiotów *x*,

2) P_1 jest *x*.

[Przykłady: I. Odcinek *AC* na rysunku 2 jest elementem odcinka *AB*, albowiem, jeżeli wyraz „*x*" jest użyty w znaczeniu wyrażenia „odcinek, będący *AC* albo *AB*", to 1) odcinek *AB* jest klasą przedmiotów *x*, 2) odcinek *AC* jest *x*. II. Dowolny koń *K* nie jest elementem klasy myszy, albowiem przy żadnym znaczeniu wyrazu „*x*" nie jest zarazem prawdą, że klasa myszy jest klasą przedmiotów *x*, oraz że koń *K* jest *x*. (Komentarz: koń *K* nie jest ani klasą myszy, ani też częścią klasy myszy; wypada stąd

— zgodnie z definicją I — iż koń K nie jest ingrediensem klasy myszy; gdyby jednak przy jakimkolwiek znaczeniu wyrazu „x" były zarazem prawdami zdania — 1) „klasa myszy jest klasą przedmiotów x" oraz 2) koń K jest x" — to ze zdań tych wynikłoby na zasadzie definicji III, że koń K jest ingrediensem klasy myszy.)]

§ 7.

Twierdzenie XI. Jeżeli P_1 jest ingrediensem przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

O przedmiocie P możemy — zgodnie z twierdzeniem VIII — powiedzieć, że

(2) P jest klasą ingrediensów przedmiotu P.

Używając wyrazu „x" w znaczeniu wyrażenia „ingrediens przedmiotu P", wnosimy z twierdzeń 2 i 1, że

(3) P jest klasą przedmiotów x,

(4) P_1 jest x.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wypada zgodnie z definicją IV, iż

(5) P_1 jest elementem przedmiotu P.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli P_1 jest ingrediensem przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XII. Jeżeli P_1 jest elementem przedmiotu P, to P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P_1 jest elementem przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wypada — zgodnie z definicją IV — iż istnieje takie znaczenie wyrazu „x", że —

(2) P jest klasą przedmiotów x,

(3) P_1 jest x.

Z twierdzenia 2 wnosimy na podstawie definicji III, że

(4) każde x jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 4 i 3 — wypada, iż

(5) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli P_1 jest elementem przedmiotu P, to P_1 jest ingrediensem przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XIII. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P.

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — III i XI.

Twierdzenie XIV. Każdy przedmiot jest swoim własnym elementem.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem *P*, że

(1) *P* nie jest elementem przedmiotu *P*.

Wypada stąd, iż

(2) *P* nie jest ingrediensem przedmiotu *P*,

gdyby bowiem *P* było ingrediensem przedmiotu *P*, to *P* byłoby — zgodnie z twierdzeniem XI — elementem przedmiotu *P*, co byłoby sprzeczne z twierdzeniem 1. Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem II. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XIV jest fałszem. Tak więc twierdzenie XIV jest prawdą.

Twierdzenie XV. Jeżeli *P* jest elementem przedmiotu P_1, a P_1 jest elementem przedmiotu P_2, to *P* jest elementem przedmiotu P_2.

Dowód: załóżmy, że

(1) *P* jest elementem przedmiotu P_1, a P_1 jest elementem przedmiotu P_2.

Wypada stąd — zgodnie z twierdzeniem XII — że —

(2) *P* jest ingrediensem przedmiotu P_1,

(3) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 2 i 3 — wnosimy na podstawie twierdzenia IV, że

(4) *P* jest ingrediensem przedmiotu P_2,

z czego wypada — w myśl twierdzenia XI — iż

(5) *P* jest elementem przedmiotu P_2.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli *P* jest elementem przedmiotu P_1, a P_1 jest elementem przedmiotu P_2, to *P* jest elementem przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XVI. Jeżeli *P* jest klasą przedmiotów *m*, to każde *m* jest elementem przedmiotu *P*.

Dowód: Załóżmy, że

(1) *P* jest klasą przedmiotów *m*.

Wypada stąd — zgodnie z definicją III — iż

(2) każde *m* jest ingrediensem przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — XI i 2 — wypada, że

(3) każde *m* jest elementem przedmiotu *P*.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 3. Wypada stąd, że jeżeli *P* jest klasą przedmiotów *m*, to każde *m* jest elementem przedmiotu *P*, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XVII. Jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, to pewne *m* jest elementem przedmiotu *P*.

Dowód: załóżmy, że

(1) *P* jest mnogością przedmiotów *m*.

Wypada stąd — zgodnie z definicją II — że jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnego *m*, które jest ingrediensem przedmiotu *P*. Widzimy stąd, że i pewien ingrediens samego przedmiotu *P* jest (zgodnie z twierdzeniem II) ingrediensem pewnego *m*, które jest ingrediensem przedmiotu *P*. Tak więc — pewien ingrediens przedmiotu *P* jest ingrediensem pewnego takiego przedmiotu *X*, iż —

(2) *X* jest *m*,

(3) *X* jest ingrediensem przedmiotu *P*.

Z twierdzenia 3 wnosimy — na podstawie twierdzenia XI — że

(4) *X* jest elementem przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — 2 i 4 — wynika, iż

(5) pewne *m* jest elementem przedmiotu *P*.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, to pewne *m* jest elementem przedmiotu *P*, co właśnie należało udowodnić.

§ 8.

Twierdzenie XVIII. Jeżeli *P* jest *m*, to *P* jest mnogością przedmiotów *m*.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem *P*', że wprawdzie

(1) *P*' jest *m*,

ale

(2) *P*' nie jest mnogością przedmiotów *m*.

Z twierdzenia II wiemy, iż

(3) *P*' jest ingrediensem przedmiotu *P*'.

Zgodnie z twierdzeniem V —

(4) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*', to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*'.

Z twierdzeń — 4 i 3 — wnosimy, iż

(5) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*', to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*', który jest ingrediensem przedmiotu *P*'.

Z twierdzeń — 5 i 1 — wypada, że

(6) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*', to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnego *m*, które jest ingrediensem przedmiotu *P*'.

Z twierdzenia 6 wynika — w myśl definicji II — iż

(7) *P*' jest mnogością przedmiotów *m*.

Twierdzenie 7 jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XVIII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XVIII jest prawdą.

Twierdzenie XIX. Jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, a każde *m* jest *n*, to *P* jest mnogością przedmiotów *n*.

Dowód: Załóżmy, że:

(1) *P* jest mnogością przedmiotów *m*,

(2) każde *m* jest *n*.

Z twierdzenia 1 wnosimy — zgodnie z definicją II — że

(3) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnego *m*, które jest ingrediensem przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — 3 i 2 — wynika, iż

(4) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnego *n*, które jest ingrediensem przedmiotu *P*.

Z twierdzenia 4 wnosimy — zgodnie z definicją II — że

(5) *P* jest mnogością przedmiotów *n*.

Tak więc — zakładając twierdzenia 1 i 2, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, a każde *m* jest *n*, to *P* jest mnogością przedmiotów *n*. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XX. Jeżeli *P* jest klasą mnogości przedmiotów *m*, to *P* jest klasą przedmiotów *m*.

Dowód: załóżmy, że

(1) *P* jest klasą mnogości przedmiotów *m*.

Wypada stąd — zgodnie z definicją III — że —

(2) każda mnogość przedmiotów *m* jest ingrediensem przedmiotu *P*,

(3) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnej mnogości przedmiotów *m*.

Z twierdzenia XVIII wnosimy, iż

(4) każde *m* jest mnogością przedmiotów *m*.

Z twierdzeń — 2 i 4 — wynika, że

(5) każde *m* jest ingrediensem przedmiotu *P*.

Możemy się przekonać, iż

(6) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu *P*, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnego *m*,

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, że twierdzenie 6 jest fałszem; wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_1, że wprawdzie

(*a*) I_1 jest ingrediensem przedmiotu *P*,

ale

(*b*) żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem żadnego *m*; z twierdzeń — 3 i *a* — wnosimy, iż

(*c*) pewien ingrediens przedmiotu I_1 jest ingrediensem pewnej mnogości przedmiotów *m*,

z czego wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_2, że —

(*d*) I_2 jest mnogością przedmiotów *m*.

(*e*) pewien ingrediens przedmiotu I_1 jest ingrediensem przedmiotu I_2,
z twierdzenia *e* wynika, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_3, że —
(*f*) I_3 jest ingrediensem przedmiotu I_1,
(*g*) I_3 jest ingrediensem przedmiotu I_2;
z twierdzenia *d* wnosimy — zgodnie z definicją II — że
(*h*) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu I_2, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego *m*;
z twierdzeń — *h* i *g* — wypada, iż
(*i*) pewien ingrediens przedmiotu I_3 jest ingrediensem pewnego *m*, to znaczy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_4, że —
(*k*) I_4 jest ingrediensem przedmiotu I_3,
(*l*) I_4 jest ingrediensem pewnego *m*;
z twierdzeń — *k* i *f* — wnosimy — na podstawie twierdzenia IV — iż
(*m*) I_4 jest ingrediensem przedmiotu I_1;
z twierdzeń — *l* i *m* — wypada, że
(*n*) pewien ingrediens przedmiotu I_1 jest ingrediensem pewnego *m*;
twierdzenie *n* jest sprzeczne z twierdzeniem *b*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie 6 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 6 jest prawdą. Z twierdzeń — 5 i 6 — wynika zgodnie z definicją III, iż
(7) *P* jest klasą przedmiotów *m*.
Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 7. Wypada stąd, że jeżeli *P* jest klasą mnogości przedmiotów *m*, to *P* jest klasą przedmiotów *m*, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXI. Jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, to *P* jest ingrediensem klasy przedmiotów *m*.
Dowód: załóżmy, iż
(1) *P* jest mnogością przedmiotów *m*.
Wypada stąd — zgodnie z aksjomatem III — że pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, iż
(2) P_1 jest klasą mnogości przedmiotów *m*.
Z twierdzenia 2 wynika — zgodnie z definicją III — że
(3) każda mnogość przedmiotów *m* jest ingrediensem przedmiotu P_1.
Z twierdzeń — 3 i 1 — wnosimy, iż
(4) *P* jest ingrediensem przedmiotu P_1.
Z twierdzenia 2 wypada — w myśl twierdzenia XX — że
(5) P_1 jest klasą przedmiotów *m*.
Z twierdzeń — 4 i 5 — widzimy, iż
(6) *P* jest ingrediensem klasy przedmiotów *m*.
Tak więc — zakładając twierdzenie 1 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że jeżeli *P* jest mnogością przedmiotów *m*, to *P* jest ingrediensem klasy przedmiotów *m*, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXII. Jeżeli P jest klasą przedmiotów m, to P jest klasą mnogości przedmiotów m.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że wprawdzie

(1) P_1 jest klasą przedmiotów m,

ale

(2) P_1 nie jest klasą mnogości przedmiotów m.

Z twierdzenia 2 wnosimy — zgodnie z definicją III — że musi być fałszem przynajmniej jedno z twierdzeń następujących:

(*a*) każda mnogość przedmiotów m jest ingrediensem przedmiotu P_1,

(*b*) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_1, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnej mnogości przedmiotów m.

Rozpatrzmy kolejno możliwość fałszywości któregokolwiek z dwóch twierdzeń przed chwilą sformułowanych. Rozpatrzmy najprzód zdanie a i przypuśćmy, że zdanie to jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_2, że wprawdzie

(α) P_2 jest mnogością przedmiotów m,

ale

(β) P_2 nie jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — XXI i α — wnosimy, iż

(γ) P_2 jest ingrediensem klasy przedmiotów m.

z czego wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że —

(δ) P_3 jest klasą przedmiotów m,

(ε) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P_3.

Z twierdzenie — δ i 1 — wynika na podstawie aksjomatu IV, iż

(η) P_3 jest P_1.

Z twierdzeń — ε i η — widzimy, że

(ζ) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Twierdzenie ζ jest sprzeczne z twierdzeniem β. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie a jest fałszem. Przypuśćmy obecnie, że jest fałszem twierdzenie b. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_1, że wprawdzie

(ϑ) I_1 jest ingrediensem przedmiotu P_1,

ale

(ι) żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem żadnej mnogości przedmiotów m.

Z twierdzenia II wiemy, iż

(κ) I_1 jest ingrediensem przedmiotu I_1.

Z twierdzeń — ι i κ — wnosimy, że

(λ) I_1 nie jest ingrediensem żadnej mnogości przedmiotów m.

Z twierdzeń — ϑ i λ — wynika, iż

(μ) P_1 nie jest mnogością przedmiotów m, z czego wypada — na podstawie twierdzenia VII — że

(v) P_1 nie jest klasą przedmiotów m.

Twierdzenie v jest sprzeczne z twierdzeniem 1. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie b jest fałszem. Tak tedy —

(3) twierdzenie 2 jest fałszem,

albowiem nie jest, jak widzieliśmy, fałszem żadne z twierdzeń — a i b — z których przynajmniej jedno musiałoby być fałszem, gdyby twierdzenie 2 było prawdą. Twierdzenie 3 jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXII jest prawdą.

Twierdzenie XXIII. Jeżeli jest prawdą, iż jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_1, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem przedmiotu P, to P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż jest prawdą, że

(1) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_1, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzenia II wiemy, że

(2) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_2, że —

(3) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P_1,

(4) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 3 i 4 wynika, iż

(5) pewien przedmiot jest ingrediensem przedmiotu P_1 i zarazem ingrediensem przedmiotu P. Jasne jest, iż

(6) każdy przedmiot, który jest ingrediensem przedmiotu P_1 i zarazem ingrediensem przedmiotu P, jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Możemy się przekonać, że

(7) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_1, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego przedmiotu, który jest ingrediensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P,

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, iż twierdzenie 7 jest fałszem; wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_1, że wprawdzie

(*a*) I_1 jest ingrediensem przedmiotu P_1,

ale

(*b*) żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem żadnego przedmiotu, który jest ingrediensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P;

z twierdzeń — 1 i a — wypada, że

(*c*) pewien ingrediens przedmiotu I_1 jest ingrediensem przedmiotu P;

z twierdzenia c widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_2, że —

(*d*) I_2 jest ingrediensem przedmiotu I_1,

(*e*) I_2 jest ingrediensem przedmiotu *P*;
z twierdzeń — *d* i *a* — wnosimy, iż
(*f*) I_2 jest ingrediensem przedmiotu P_1;
z twierdzeń — *f* i *e* —wynika, że
(*g*) I_2 jest przedmiotem, który jest ingrediensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu *P*;
z twierdzenia II wiemy, iż
(*h*) I_2 jest ingrediensem przedmiotu I_2;
z twierdzeń — *d* i *h* — wypada, że
(*i*) pewien ingrediens przedmiotu I_1 jest ingrediensem przedmiotu I_1;
z twierdzeń — *i* i *g* — wnosimy, iż
(*k*) pewien ingrediens przedmiotu I_1 jest ingrediensem pewnego przedmiotu, który jest ingrediensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu P_2;
twierdzenie *k* jest sprzeczne z twierdzeniem *b*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 7 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 7 jest prawdą. Z twierdzeń — 6 i 7 — wypada na zasadzie definicji III, że
(8) P_1 jest klasą przedmiotów, będących ingrediensami przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu *P*.
Z twierdzeń — VII i 8 — wnosimy, iż
(9) P_1 jest mnogością przedmiotów, będących ingrediensami przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu *P*.
Jasne jest, że
(10) każdy przedmiot będący ingrediensem przedmiotu P_1 i zarazem przedmiotu *P*, jest ingrediensem przedmiotu *P*.
Z twierdzeń — 9 i 10 — wynika zgodnie z twierdzeniem XIX, iż
(11) P_1 jest mnogością ingrediensów przedmiotu *P*.
Z twierdzeń — XXI i 11 — wypada, że
(12) P_1 jest ingrediensem klasy ingrediensów przedmiotu *P*,
z czego wnosimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że
(13) P_3 jest klasą ingrediensów przedmiotu *P*,
(14) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_3.
Z twierdzenia VIII wiemy, iż
(15) *P* jest klasą ingrediensów przedmiotu *P*.
Z twierdzeń — 13 i 15 — wynika zgodnie z aksjomatem IV, że
(16) P_3 jest *P*.
Z twierdzeń — 14 i 16 — wypada, iż
(17) P_1 jest ingrediensem przedmiotu *P*.
Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 17. Wypada stąd, że jeżeli pewien ingrediens każdego ingrediensu przedmiotu P_1 jest ingrediensem przedmiotu *P*, to i sam przedmiot P_1 jest ingrediensem przedmiotu *P*. To właśnie należało udowodnić.

§ 9.

Twierdzenie XXIV. Każdy przedmiot P jest klasą elementów tego właśnie przedmiotu P.

Dowód: Z twierdzenia XII wiemy, iż

(1) każdy element przedmiotu P jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzenia VI wiemy, że

(2) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu P.

Z twierdzenia 2 wnosimy — zgodnie z twierdzeniem XI — iż

(3) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego elementu przedmiotu P.

Z twierdzeń — 1 i 3 — otrzymujemy zgodnie z definicją III twierdzenie żądane.

Twierdzenie XXV. Każda mnogość jest swoim własnym elementem.

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia XIV.

Twierdzenie XXVI. Żaden przedmiot nie jest klasą mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P, że

(1) P jest klasą mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Z twierdzeń — VII i 1 — wynika, iż

(2) P jest mnogością mnogości, nie będących swoimi własnymi elementami.

Z twierdzeń — XVII i 2 — wynika, że

(3) pewna mnogość, nie będąca swoim własnym elementem, jest elementem przedmiotu P.

Z twierdzenia 3 widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że

(4) P_1 jest mnogością, nie będącą swoim własnym elementem,

(5) P_1 jest elementem przedmiotu P.

Twierdzenie 4 jest sprzeczne z twierdzeniem XXV. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XXVI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVI jest prawdą.

Twierdzenie XXVII. Twierdzenie „Jeżeli P jest elementem mnogości przedmiotów m, to P jest m" jest fałszem.*

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie XXVII jest fałszem. Wnosimy stąd, iż

(1) twierdzenie „Jeżeli P jest elementem mnogości przedmiotów m, to P jest m" jest prawdą.

Z twierdzenia 1 wynika, że

(2) jeżeli P jest elementem mnogości przedmiotów m, to jest P jest m.

---

* Każde z twierdzeń — XXVI i XXVII — wskazuje na to, że w rozwijanej w pracy niniejszej teorii mnogości nie daje się wcale skonstruować tzw. antynomia Russella.

Uważajmy jakieś takie przedmioty — P_1 i P_2 — że

(3) P_1 jest częścią przedmiotu P_2.

Z twierdzenia 2 wypada, iż

(4) jeżeli P_1 jest elementem mnogości przedmiotów P_2, to P_1 jest P_2.

Z twierdzenia X wiemy, że

(5) P_2 jest klasą przedmiotów P_2.

Z twierdzeń — VII i 5 — wnosimy, iż

(6) P_2 jest mnogością przedmiotów P_2.

Z twierdzenia 3 wynika — na podstawie twierdzenia III, X — że

(7) P_1 jest elementem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 7 i 6 — wypada, iż

(8) P_1 jest elementem mnogości przedmiotów P_2.

Z twierdzeń — 4 i 8 — wnosimy, że

(9) P_1 jest P_2,

skąd wynika (zgodnie z twierdzeniem I), iż

(10) P_1 nie jest częścią przedmiotu P_2.

Twierdzenie 10 jest sprzeczne z twierdzeniem 3. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVII jest prawdą.

§ 10.

Definicja V. Wyrażenia „podmnogość przedmiotu P" używam dla oznaczenia wszelkiego takiego przedmiotu P_1, który czyni zadość następującemu warunkowi: każdy element przedmiotu P_1 jest elementem przedmiotu P.

[Przykłady: I. Odcinek AC rysunku 2 jest podmnogością odcinka AB, albowiem odcinek AC czyni zadość warunkowi definicji V: każdy element odcinka AC jest elementem odcinka AB. II. Odcinek AB rysunku 2 nie jest podmnogością odcinka AC, albowiem nie każdy element odcinka AB jest elementem odcinka AC: oto np. sam odcinek AB, który jest — zgodnie z twierdzeniem XIV — elementem odcinka AB, nie jest elementem odcinka AC.]

Definicja VI. Wyrażenia „podmnogość właściwa przedmiotu P" używam dla oznaczenia wszelkiej takiej podmnogości P_1 przedmiotu P, która nie jest P.

[Przykłady: I. Odcinek AC rysunku 2 jest podmnogością właściwą odcinka AB, albowiem odcinek AC jest taką podmnogością odcinka AB, która nie jest odcinkiem AB. II. Odcinek AB rysunku 3 nie jest podmnogością właściwą odcinka AB, albowiem odcinek AB jest odcinkiem AB, nie jest więc prawdą, iż odcinek AB jest taką podmnogością odcinka AB, która nie jest odcinkiem AB.]

§ 11.

Twierdzenie XXVIII. Jeżeli P_1 jest ingrediensem przedmiotu P, to P_1 jest podmnogością przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie, które chcę udowodnić, jest fałszem. Wypada stąd, że pewne przedmioty są takimi przedmiotami — A i B — że wprawdzie

(1) A jest ingrediensem przedmiotu B,

ale

(2) A nie jest podmnogością przedmiotu B.

Z twierdzenia 2 wnosimy na podstawie definicji V, iż

(3) pewien element przedmiotu A nie jest elementem przedmiotu B, z czego widzimy, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem C, że wprawdzie

(4) C jest elementem przedmiotu A,

ale

(5) C nie jest elementem przedmiotu B.

Z twierdzenia 5 wynika, iż

(6) C nie jest ingrediensem przedmiotu B,

gdyby bowiem C było ingrediensem przedmiotu B, to wypadłoby stąd na zasadzie twierdzenia XI, że C jest elementem przedmiotu B, co jest sprzeczne z twierdzeniem 5. Z twierdzeń — XII i 4 — widzimy, iż

(7) C jest ingrediensem przedmiotu A.

Z twierdzeń — 7 i 1 — wnosimy zgodnie z twierdzeniem IV, że

(8) C jest ingrediensem przedmiotu B.

Twierdzenie 8 jest sprzeczne z twierdzeniem 6. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, iż twierdzenie XXVIII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXVIII jest prawdą.

Twierdzenie XXIX. Jeżeli P_1 jest podmnogością przedmiotu P, to P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie XXIX jest fałszem. Wynika stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami — A i B — że wprawdzie

(1) A jest podmnogością przedmiotu B

ale

(2) A nie jest ingrediensem przedmiotu B.

Z twierdzenia 2 wypada, iż

(3) A nie jest elementem przedmiotu B,

gdyby bowiem A było elementem przedmiotu B, to wypadłoby stąd na podstawie twierdzenia XII, że A jest ingrediensem przedmiotu B, co jest sprzeczne z twierdzeniem 2. Z twierdzenia XIV wiemy, iż

(4) A jest elementem przedmiotu A.

Z twierdzeń — 4 i 3 — wnosimy, że

(5) pewien elementem przedmiotu A nie jest elementem przedmiotu B.

Z twierdzenia 5 wynika na zasadzie definicji V, iż

(6) A nie jest podmnogością przedmiotu B.

Twierdzenie 6 jest sprzeczne z twierdzeniem 1. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie XXIX jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXIX jest prawdą.

Twierdzenie XXX. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_1 jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzeń — III i 1 — wypada, że

(2) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXVIII i 2 — widzimy, iż

(3) P_1 jest podmnogością przedmiotu P.

Z twierdzeń — I i 1 — wnosimy, że

(4) P_1 nie jest P.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wynika zgodnie z definicją VI, iż

(5) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXI. Jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to P_1 jest częścią przedmiotu P.

Dowód: załóżmy, iż

(1) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji VI, że

(2) P_1 jest podmnogością przedmiotu P,

(3) P_1 nie jest P.

Z twierdzeń — XXIX i 2 — wynika, iż

(4) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 4 i 3 — wypada na zasadzie definicji I, że

(5) P_1 jest częścią przedmiotu P.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 5. Wnosimy stąd, iż jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to P_1 jest częścią przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXII. Żaden przedmiot nie jest podmnogością właściwą samego siebie.

Dowód: Gdybyśmy przypuścili, że jakiś przedmiot P jest podmnogością właściwą samego siebie, to znaczy, iż jakiś przedmiot P jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to wynikałoby stąd — zgodnie z twierdzeniem XXXI, że P jest częścią przedmiotu P, co jest sprzeczne z twierdzeniem I.

Twierdzenie XXXIII. Każdy przedmiot jest podmnogością samego siebie.

Dowód: Gdybyśmy przypuścili, iż jakiś przedmiot P nie jest podmnogością samego siebie, to znaczy, że jakiś przedmiot P nie jest podmnogością przedmiotu P, to wypadłoby stąd na podstawie twierdzenia XXVIII, iż P nie jest ingrediensem przedmiotu P, co jest sprzeczne z twierdzeniem II.

Twierdzenie XXXIV. Jeżeli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, to P_1 nie jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1.

Wnosimy stąd na zasadzie twierdzenia XXXI, iż

(2) P jest częścią przedmiotu P_1,

z czego wynika w myśl aksjomatu *I*, że

(3) P_1 nie jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXI i 3 — wypada, iż

(4) P_1 nie jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Tak więc — twierdzenie 1 doprowadziło nas do twierdzenia 4. Widzimy stąd, że jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, to P_1 nie jest podmnogością właściwą przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXV. Jeżeli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, to P nie jest podmnogością przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie XXXV jest fałszem. Wypada stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami — A i B — że wprawdzie

(1) A jest podmnogością właściwą przedmiotu B,

ale

(2) B jest podmnogością przedmiotu A.

Z twierdzenia 1 wypada — zgodnie z definicją VI — iż

(3) A nie jest B.

Z twierdzenia 3 wypada, że

(4) B nie jest A.

Z twierdzeń — 2 i 4 — wnosimy na podstawie definicji VI, iż

(5) B jest podmnogością właściwą przedmiotu A.

Z twierdzeń — XXXIV i 1 — wynika, że

(6) B nie jest podmnogością właściwą przedmiotu A.

Twierdzenie 6 jest sprzeczne z twierdzeniem 5. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie XXXV jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XXXV jest prawdą.

Twierdzenie XXXVI. Jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością przedmiotu P_2.

Dowód: Załóżmy, iż —

(1) P jest podmnogością przedmiotu P_1,

(2) P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — XXIX i 1 — wynika, że
(3) P jest ingrediensem przedmiotu P_1.
Z twierdzeń — XXIX i 2 — wypada, iż
(4) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — 3 i 4 — wnosimy zgodnie z twierdzeniem IV, że
(5) P jest ingrediensem przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — XXVIII i 5 — wynika, iż
(6) P jest podmnogością przedmiotu P_2.
Tak więc zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXVII. Jeżeli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.

Dowód: Załóżmy, iż
(1) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1,
(2) P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy na podstawie twierdzenia XXXVI, że
(3) P jest podmnogością przedmiotu P_2.
Możemy powiedzieć, iż
(4) P_2 nie jest P,
gdyby bowiem P_2 było P, to wynikłoby stąd zgodnie z twierdzeniem 2, że P_1 jest podmnogością przedmiotu P, co musi być fałszem, wiadomo bowiem z twierdzeń — XXXV i 1 — iż P_1 nie jest podmnogością przedmiotu P. Z twierdzenia 4 wypada, że
(5) P nie jest P_2.
Z twierdzeń — 3 i 5 — wnosimy na podstawie definicji VI, iż
(6) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.
Tak więc zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wypada stąd, że jeśli P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXVIII. Jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.

Dowód: załóżmy, iż —
(1) P jest podmnogością przedmiotu P_1,
(2) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — 1 i 2 — wnosimy na zasadzie twierdzenia XXXVI, że
(3) P jest podmnogością przedmiotu P_2.
Z twierdzeń — XXXV i 2 — wynika, iż
(4) P_2 nie jest podmnogością przedmiotu P_1.
Z twierdzeń — 1 i 4 — wypada, że

(5) P nie jest P_2.
Z twierdzeń — 3 i 5 — wnosimy w myśl definicji VI, iż
(6) P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2.
Tak więc zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 6. Wynika stąd, że jeżeli P jest podmnogością przedmiotu P_1, a P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2, to P jest podmnogością właściwą przedmiotu P_2. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XXXIX. Jeżeli P_1 jest elementem P, to P_1 jest podmnogością przedmiotu P.

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzeń — XXVIII i XII.

Twierdzenie XL. Jeżeli P_1 jest podmnogością przedmiotu P, to P_1 jest elementem przedmiotu P.

Twierdzenie to otrzymujemy z twierdzeń — XI i XXIX.

Twierdzenie XLI. Każdy przedmiot P jest klasą podmnogości tego właśnie przedmiotu P.

Dowód: z twierdzenia XXIX wiemy, iż
(1) każda podmnogość przedmiotu P jest ingrediensem przedmiotu P.
Z twierdzenia VI wiemy, że
(2) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu P.
Z twierdzenia 2 wnosimy — zgodnie z twierdzeniem XXVIII — iż
(3) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnej podmnogości przedmiotu P.
Z twierdzeń — 1 i 3 — otrzymujemy zgodnie z definicją III twierdzenie żądane.

Twierdzenie XLII. Jeżeli P jest mnogością przedmiotów m, [a] każde m jest n, to P jest podmnogością klasy przedmiotów n.

Dowód: załóżmy, że
(1) P jest mnogością przedmiotów m, a każde m jest n.
Z twierdzeń — XIX i 1 — wynika, iż
(2) P jest mnogością przedmiotów n.
Z twierdzeń — XXI i 2 — wypada, że
(3) P jest ingrediensem klasy przedmiotów n.
Z twierdzeń — XXVIII i 3 — wnosimy, iż
(4) P jest podmnogością klasy przedmiotów n.
Tak więc — zakładając twierdzenie 1, otrzymujemy twierdzenie 4. Wypada stąd, że jeżeli P jest mnogością przedmiotów m, a każde m jest n, to P jest podmnogością klasy przedmiotów n. To właśnie należało udowodnić.

§ 12.

Definicja VII. Używam wyrazu „wszechświat" dla oznaczenia klasy przedmiotów.

Twierdzenie XLIII. Pewien przedmiot jest klasą przedmiotów niesprzecznych.

Dowód: W myśl zasady niesprzeczności możemy powiedzieć, iż każdy przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym. Wypada stąd, że pewien przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym, skąd wynika — zgodnie z aksjomatem III — twierdzenie żądane.

Twierdzenie XLIV. Klasa przedmiotów niesprzecznych jest wszechświatem.

Dowód: Zgodne z definicją III możemy zapisać —

(1) każdy przedmiot niesprzeczny jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych,

(2) jeżeli I jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego przedmiotu niesprzecznego.

Zgodnie z zasadą niesprzeczności

(3) każdy przedmiot jest przedmiotem niesprzecznym.

Z twierdzeń — 1 i 3 — wypada, iż

(4) każdy przedmiot jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych.

Z twierdzenia 2 widzimy, że

(5) jeżeli I jest ingrediensem klasy przedmiotów niesprzecznych, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego przedmiotu. Z twierdzeń — 4 i 5 — wnosimy na podstawie definicji III, iż

(6) klasa przedmiotów niesprzecznych jest klasą przedmiotów,

skąd — na zasadzie definicji VII — otrzymujemy twierdzenie żądane.

Twierdzenie XLV. Jeżeli P jest wszechświatem i P_1 jest wszechświatem, to P jest P_1.

Dowód: Załóżmy, że —

(1) P jest wszechświatem,

(2) P_1 jest wszechświatem.

Z twierdzenia 1 otrzymujemy w myśl definicji VII:

(3) P jest klasą przedmiotów.

Z twierdzenia 2 wnosimy zgodnie z definicją VII, iż

(4) P_1 jest klasą przedmiotów.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wynika na podstawie aksjomatu IV, że

(5) P jest P_1.

Tak więc, zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 5. Wypada stąd, że jeżeli P jest wszechświatem i P_1 jest wszechświatem, to P jest P_1, co właśnie należało udowodnić.

§ 13.

Definicja VIII. Wyrażenia „przedmiot zewnętrzny względem przedmiotu P" używam dla oznaczenia każdego takiego przedmiotu P_1, który czyni zadość następującemu warunkowi: żaden ingrediens przedmiotu P nie jest ingrediensem przedmiotu P_1.

[Przykłady: I. Odcinek AC rysunku 2 jest przedmiotem zewnętrznym względem odcinka DB, albowiem żaden ingrediens odcinka DB nie jest ingrediensem odcinka AC. II. Odcinek AD rysunku 2 nie jest przedmiotem zewnętrznym względem odcinka CB, albowiem odcinek CD, będący ingrediensem odcinka CB, jest również ingrediensem odcinka AD, nie jest więc prawdą, iż żaden ingrediens odcinka CB nie jest ingrediensem odcinka AD.]

Twierdzenie XLVI. Jeżeli P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1, to P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Dowód: Załóżmy, że

(1) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P. Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji VIII, iż

(2) żaden ingrediens przedmiotu P nie jest ingrediensem przedmiotu P_1,

z czego wynika, iż

(3) żaden ingrediens przedmiotu P_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzenia 3 wypada na zasadzie definicji VIII, że

(4) P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, otrzymaliśmy twierdzenie 4. Wypada stąd, że jeżeli P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P, to P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie XLVII. Żaden przedmiot nie jest przedmiotem zewnętrznym względem samego siebie.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie XLVII jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotu P, że

(1) P jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wnosimy (zgodnie z definicją VIII), iż

(2) żaden ingrediens przedmiotu P nie jest ingrediensem przedmiotu P.

Twierdzenie 2 jest twierdzeniem sprzecznym. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, że twierdzenie XLVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie XLVII jest prawdą.

§ 14.

Definicja IX. Wyrażenia „dopełnienie przedmiotu P_1 do przedmiotu P" używam dla oznaczenia dowolnego przedmiotu P_2, jeżeli są zachowane dwa następujące warunki:

(1) P_1 jest podmnogością P,

(2) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

[Przykłady: I. Stanisław Poniatowski jest dopełnieniem klasy królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim, do klasy królów polskich, albowiem: 1) klasa królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim, jest podmnogością klasy królów polskich, 2) Stanisław Poniatowski jest klasą takich elementów klasy królów polskich, które są przedmiotami zewnętrznymi względem klasy królów polskich, nie będących Stanisławem Poniatowskim. II. Odcinek AC rysunku 2 nie jest dopełnieniem odcinka DB do odcinka AB, albowiem jest tu wprawdzie zachowany warunek 1 (odcinek DB jest podmnogością odcinka AB), ale nie jest zachowany warunek 2 (odcinek AC nie jest klasą elementów odcinka AB zewnętrznych względem odcinka DB). III. Zermelo nie jest dopełnieniem klasy matematyków, nie będących Zermelem, do klasy matematyków, nie będących Borelem, albowiem jest tu wprawdzie zachowany warunek 2 (Zermelo jest klasą takich elementów klasy matematyków, nie będących Borelem, które są przedmiotami zewnętrznymi względem klasy matematyków, nie będących Zermelem), ale nie jest zachowany warunek 1 (klasa matematyków, nie będących Zermelem, nie jest podmnogością klasy matematyków, nie będących Borelem).]

§15.

Twierdzenie XLVIII. Jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_1 jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXX i 1 — wnosimy, że

(2) P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P.

Z twierdzenia 2 wynika na podstawie definicji VI, iż

(3) P_1 jest podmnogością przedmiotu P,

na podstawie zaś twierdzenia XXXV — że

(4) P nie jest podmnogością przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 4 wypada na zasadzie twierdzenia XXVIII, iż

(5) P nie jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Możemy powiedzieć, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotu P_2, że —

(6) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P,

(7) żaden ingrediens przedmiotu P_2 nie jest ingrediensem przedmiotu P_1 — gdyby bowiem żaden przedmiot nie był przedmiotem P_2, czyniącym zadość twierdzeniom — 6 i 7 — to wypadłoby stąd, iż jest prawdą, że jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem przedmiotu P_1 — stąd zaś wynikałoby zgodnie z twierdzeniem XXIII, iż P jest ingrediensem przedmiotu P_1, co jest sprzeczne z twierdzeniem 5.

Z twierdzenia 7 wnosimy na zasadzie definicji VIII, iż

(8) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — XLVI i 8 — wynika, że

(9) P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — XI i 6 — wypada, iż

(10) P_2 jest elementem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 10 i 9 — widzimy, że

(11) P_2 jest elementem przedmiotu P, zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 11 wnosimy — w myśl aksjomatu III — iż

(12) pewien przedmiot P_3 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_3.

Z twierdzeń — 3 i 12 — wynika na podstawie definicji IX, że

(13) P_3 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, doszliśmy do twierdzenia 13. Wypada stąd, że jeżeli P_1 jest częścią przedmiotu P, to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie IL. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie IL jest fałszem. Wypada stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami — P, P_1 i P_2 — że wprawdzie

(1) P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P,

ale

(2) P_2 nie jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji IX, iż

(3) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 3 wynika na zasadzie definicji III, że

(4) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_2, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 2 wypada — w myśl definicji VIII — iż

(5) pewien ingrediens przedmiotu P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Widzimy stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że —

(6) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P_1,

(7) P_3 jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 4 i 7 — wnosimy, iż

(8) pewien ingrediens przedmiotu P_3 jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_4, że —

(9) P_4 jest ingrediensem przedmiotu P_3,

(10) P_4 jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 10 wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że —

(11) P_5 jest elementem przedmiotu P,

(12) P_5 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1,

(13) P_4 jest ingrediensem przedmiotu P_5.

Z twierdzenia 12 wnosimy na podstawie definicji VIII, iż

(14) żaden ingrediens przedmiotu P_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P_5.

Z twierdzeń — 9 i 6 — wynika na zasadzie twierdzenia IV, że

(15) P_4 jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 14 i 15 — wypada, iż

(16) P_4 nie jest ingrediensem przedmiotu P_5.

Twierdzenie 16 jest sprzeczne z twierdzeniem 13. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie IL jest fałszem. Tak więc — twierdzenie IL jest prawdą.

Twierdzenie L. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest częścią przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_2 jest dopełnieniem P_1 do przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wnosimy — w myśl definicji IX — że —

(2) P_1 jest podmnogością przedmiotu P,

(3) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 3 wynika — zgodnie z definicją III — iż

(4) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_2, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu P, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Wypada stąd, że

(5) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_2, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego elementu przedmiotu P.

Z twierdzenia 5 wnosimy na podstawie twierdzenia XII, iż

(6) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_2, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego ingrediensu przedmiotu P.

Z twierdzenia 6 wynika na zasadzie twierdzenia IV, że

(7) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_2, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — XXIII i 7 — wypada, iż

(8) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — IL i 1 — wnosimy, że

(9) P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 9 wynika w myśl definicji VIII, iż

(10) żaden ingrediens przedmiotu P_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Z twierdzenia II wiemy, że

(11) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 10 i 11 — wypada, iż

(12) P_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — XXIX i 2 — wnosimy, że

(13) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 12 i 13 — wynika, iż

(14) P_2 nie jest P.

Z twierdzeń — 8 i 14 — wypada zgodnie z definicją 1, że

(15) P_2 jest częścią przedmiotu P.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, otrzymujemy twierdzenie 15. Wnosimy stąd, że jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest częścią przedmiotu P, co właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie LI. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P_2 do przedmiotu P.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Wynika stąd na podstawie definicji IX, że

(2) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P zewnętrznych względem przedmiotu P_1, na podstawie zaś twierdzenia L, że

(3) P_2 jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzenia 3 wypada na zasadzie twierdzenia XXX, iż

(4) P_2 jest podmnogością przedmiotu P.

Z twierdzenia 2 wnosimy w myśl definicji III, że

(5) każdy element przedmiotu P, zewnętrzny względem przedmiotu P_1, jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Możemy się przekonać, iż

(6) każdy element przedmiotu P, zewnętrzny względem przedmiotu P_2, jest ingrediensem przedmiotu P_1 —

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, że twierdzenie 6 jest fałszem; wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_3, że wprawdzie —

(*a*) P_3 jest elementem przedmiotu P,

(*b*) P_3 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2,

ale

(*c*) P_3 nie jest ingrediensem przedmiotu P_1;

z twierdzenia *c* wypada, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_4, że —

(*d*) P_4 jest ingrediensem przedmiotu P_3,

(*e*) żaden ingrediens przedmiotu P_4 nie jest ingrediensem przedmiotu P_1;

gdyby bowiem żaden przedmiot nie był przedmiotem P_4, czyniącym zadość twierdzeniom — *d* i *e* — to wypadłoby stąd, iż jest prawdą, że jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P_3, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem przedmiotu P_1 — stąd zaś wynikałoby zgodnie z twierdzeniem XXIII, iż P_3 jest ingrediensem przedmiotu P_1, co jest sprzeczne z twierdzeniem *c*; z twierdzenia *e* wypada na podstawie definicji VIII, iż

(*f*) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_4;

z twierdzeń — XLVI i *f* — wnosimy, że

(*g*) P_4 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1;

z twierdzeń — XI i *d* — wynika, iż

(*h*) P_4 jest elementem przedmiotu P_3;

z twierdzeń — *h* i *a* — wypada na zasadzie twierdzenia XV, że

(*i*) P_4 jest elementem przedmiotu *P*;

z twierdzeń — *i* i *g* — widzimy, iż

(*k*) P_4 jest elementem przedmiotu *P* zewnętrznym względem przedmiotu P_1;

z twierdzeń — 5 i *k* — wnosimy, że

(*l*) P_4 jest ingrediensem przedmiotu P_2;

z twierdzenia *b* wynika w myśl definicji VIII, iż

(*m*) żaden ingrediens przedmiotu P_2 nie jest ingrediensem przedmiotu P_3;

z twierdzeń — *m* i *l* — wypada, że

(*n*) P_4 nie jest ingrediensem przedmiotu P_3;

twierdzenie *n* jest sprzeczne z twierdzeniem *d*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 6 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 6 jest prawdą. Z twierdzenia 1 wypada zgodnie z definicją IX, że

(7) P_1 jest podmnogością przedmiotu *P*,

zgodnie zaś z twierdzeniem — IL — że

(8) P_2 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — XL i 7 — widzimy, iż

(9) P_1 jest elementem przedmiotu *P*.

Z twierdzeń — XLVI i 8 — wnosimy, że

(10) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 9 i 10 — wynika, iż

(11) P_1 jest elementem przedmiotu *P* zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzenia V wiemy, że

(12) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu P_1, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 12 i 11 — wypada, że

(13) jeżeli *I* jest ingrediensem przedmiotu P_1, to pewien ingrediens przedmiotu *I* jest ingrediensem pewnego takiego elementu przedmiotu *P*, który jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 6 i 13 — wnosimy na podstawie definicji III, że

(14) P_1 jest klasą elementów przedmiotu *P*, zewnętrznych względem przedmiotu P_2.

Z twierdzeń — 4 i 14 — wynika na zasadzie definicji IX, iż

(15) P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P_2 do przedmiotu *P*.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 15. Wypada stąd, że jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P_2 do przedmiotu P. To właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie LII. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_1 jest częścią przedmiotu P.

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — L i LI.

Twierdzenie LIII. Jeżeli P_1 jest podmnogością właściwą przedmiotu P, to pewien przedmiot jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzeń — XLVIII i XXXI.

Twierdzenie LIV. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, oraz P_3 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P_2 jest P_3.

Dowód: Załóżmy, iż —

(1) P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P,

(2) P_3 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wnosimy na podstawie definicji IX, że

(3) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 2 wynika na tejże podstawie, iż

(4) P_3 jest klasą elementów przedmiotu P zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 3 i 4 — wypada na zasadzie aksjomatu IV, że

(5) P_2 jest P_3.

Tak więc, zakładając twierdzenia — 1 i 2 — dochodzimy do twierdzenia 5. Jest więc prawdą twierdzenie żądane.

Twierdzenie LV. Żaden przedmiot nie jest dopełnieniem siebie samego do jakiegoś przedmiotu.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie LV jest fałszem. Wnosimy stąd, iż pewne przedmioty są takimi przedmiotami — P i P_1 — że

(1) P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Z twierdzeń — IL i 1 — wynika, że

(2) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem XLVII. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, że twierdzenie LV jest fałszem. Tak więc — twierdzenie LV jest prawdą.

Twierdzenie LVI. Żaden przedmiot P nie jest dopełnieniem żadnego przedmiotu do przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, iż twierdzenie LVI jest fałszem. Wypada stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że

(1) P jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Z twierdzeń — L i 1 — wnosimy, iż

(2) P jest częścią przedmiotu P.

Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem I. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności założenie nasze, iż twierdzenie LVI jest fałszem. Tak więc — twierdzenie LVI jest prawdą.

Twierdzenie LVII. Żaden przedmiot nie jest dopełnieniem żadnego przedmiotu P do tego właśnie przedmiotu P.

Dowód: Przypuśćmy, że twierdzenie LVII jest fałszem. Widzimy stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem P_1, że

(1) P_1 jest dopełnieniem przedmiotu P do przedmiotu P.

Z twierdzeń — LII i 1 — wnosimy, iż

(2) P jest częścią przedmiotu P.

Twierdzenie 2 jest sprzeczne z twierdzeniem I. Musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, że twierdzenie LVII jest fałszem. Tak więc — twierdzenie LVII jest prawdą.

Twierdzenie LVIII. Jeżeli P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P, to P jest klasą przedmiotów, będących P_1 albo P_2.

Dowód: Załóżmy, iż

(1) P_2 jest dopełnieniem przedmiotu P_1 do przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wynika na podstawie twierdzenia LII, że

(2) P_1 jest częścią przedmiotu P,

na podstawie zaś twierdzenia L — że

(3) P_2 jest częścią przedmiotu P.

Z twierdzeń — III i 2 — wypada, iż

(4) P_1 jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — III i 3 — wnosimy, że

(5) P_2 jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzeń — 4 i 5 — wynika, iż

(6) każdy przedmiot, będący P_1 albo P_2, jest ingrediensem przedmiotu P.

Z twierdzenia 1 wypada na zasadzie definicji IX, że

(7) P_2 jest klasą elementów przedmiotu P, zewnętrznych względem przedmiotu P_1.

Z twierdzenia 7 wnosimy w myśl definicji III, iż

(8) każdy element przedmiotu P zewnętrzny względem przedmiotu P_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2.

Możemy się przekonać, że

(9) jeżeli I jest ingrediensem przedmiotu P, to pewien ingrediens przedmiotu I jest ingrediensem pewnego przedmiotu, będącego P_1 albo P_2 —

za pomocą następującego rozumowania: przypuśćmy, iż twierdzenie 9 jest fałszem; wynika stąd, iż pewien przedmiot jest takim przedmiotem I_1, że wprawdzie

(*a*) I_1 jest ingrediensem przedmiotu P,

ale

(*b*) żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem żadnego przedmiotu, będącego P_1 albo P_2;

Z twierdzenia *b* wypada, iż —

(*c*) żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P_1,

(*d*) żaden ingrediens przedmiotu I_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P_2,

z twierdzenia *c* wnosimy zgodnie z definicją VIII, że

(*e*) P_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu I_1;

z twierdzeń — XLVI i *e* — wynika, iż

(*f*) I_1 jest przedmiotem zewnętrznym względem przedmiotu P_1;

z twierdzeń — XI i *a* — wypada, że

(*g*) I_1 jest elementem przedmiotu *P*;

z twierdzeń — *g* i *f* — widzimy, iż

(*h*) I_1 jest elementem przedmiotu *P*, zewnętrznym względem przedmiotu P_1.

Z twierdzeń — 8 i *h* — wnosimy, że

(*i*) I_1 jest ingrediensem przedmiotu P_2;

z twierdzenia II wiemy, iż

(*k*) I_1 jest ingrediensem przedmiotu I_1;

z twierdzeń — *d* i *k* — wynika, że

(*l*) I_1 nie jest ingrediensem przedmiotu P_2;

twierdzenie *l* jest sprzeczne z twierdzeniem *i*; musi więc być fałszem prowadzące do tej sprzeczności przypuszczenie nasze, iż twierdzenie 9 jest fałszem; tak więc — twierdzenie 9 jest prawdą. Z twierdzeń — 6 i 9 — wypada na podstawie definicji III, że

(10) *P* jest klasą przedmiotów, będących P_1 albo P_2.

Tak więc — zakładając twierdzenie 1, dochodzimy do twierdzenia 10. Wynika stąd twierdzenie żądane.