Filozofia Nauki
Rok VIII, 2000, Nr 2(30)

Krzysztof Wójtowicz

Analiza antyrealizmu modalnego[1]

I. WPROWADZENIE

W ostatnich latach obserwujemy swoisty renesans filozofii matematyki. Ukazuje się coraz większa liczba publikacji — zarówno artykułów, jak i publikacji książkowych; od kilku lat ukazuje się czasopismo (*Philosophia Mathematica*) poświęcone wyłącznie filozofii matematyki. Szczególną rolę we współczesnych dyskusjach odgrywa zagadnienie istnienia i statusu ontologicznego obiektów matematycznych — zwłaszcza w kontekście zagadnienia stosowalności matematyki do opisu świata fizycznego. Pojawiają się nowe koncepcje — zarówno realistyczne, jak i antyrealistyczne.

W artykule zaprezentowana i przeanalizowana zostanie jedna z antyrealistycznych koncepcji sformułowanych w ostatnich latach, a mianowicie koncepcja Chihary przedstawiona w [Chihara 1990]. Autor odrzuca zarówno argumenty na rzecz stanowiska realistycznego sformułowane przez Gödla, jak i argumenty wysunięte przez Quine'a. W skrócie przypomnę więc również najważniejsze punkty tych stanowisk, odgrywają one bowiem istotną rolę we współczesnej filozofii matematyki; są także ważne w kontekście dyskusji nad koncepcją Chihary.[2]

---

[1] Praca napisana została w ramach grantu KBN „Realizm i antyrealizm w filozofii matematyki" (grant nr 1 H01A 006 17).

[2] Czytelnik zainteresowany szczegółowszą prezentacją znajdzie ją np. w [Wójtowicz 1996] oraz [Wójtowicz 1999].

1. Stanowiska Gödla i Quine'a

1.1 PLATONIZM GÖDLA

Według Gödla, matematyka ma charakter obiektywny, zaś jej przedmiotowym odniesieniem jest uniwersum mnogościowe. Gödel odróżnia matematykę obiektywną (dotyczącą uniwersum matematycznego) od tworzonej przez nas matematyki subiektywnej. Formułowane przez nas aksjomaty teorii mnogości opisują bowiem uniwersum matematyczne w sposób niepełny i niedoskonały. Możemy jednak opis ten uzupełniać, zaś dostęp poznawczy do pojęć teorii mnogości zapewnia nam *intuicja matematyczna*, która umożliwia nam «wgląd» w znaczenie terminów matematycznych.

1.1.1. Chihary krytyka stanowiska Gödla

Chihara krytycznie ocenia koncepcję epistemologiczną postulującą istnienie intuicji matematycznej jako pewnej formy percepcji obiektów matematycznych, uznając ją za nieprecyzyjną i nienaukową. W [Chihara 1982] proponuje, aby zgodność w intuicjach matematyków tłumaczyć w duchu naturalistycznym, poprzez odwołanie się do podobieństwa ich biologicznej struktury (na podobnej zasadzie, jak można wyjaśnić podobne działanie różnych komputerów przez odwołanie się do podobieństwa ich budowy, a nie do istnienia abstrakcyjnych obiektów matematycznych, takich jak algorytmy czy funkcje rekurencyjne).[3] Platonizm Gödla Chihara określa jako „mitologiczny" [Chihara 1973]. Chihara wpisuje się zatem w nurt krytyków koncepcji intuicji matematycznej, którzy odwołują się do kauzalnej teorii percepcji i wiedzy.[4]

---

[3] Polemika z tym argumentem Chihary odbiegałaby od głównego tematu tego artykułu. Zauważyć należy jednak, że Chihara w odniesieniu do podawanego przez siebie przykładu komputerów ignoruje element wiedzy matematycznej. Jest oczywiste, że aby komputery działały podobnie, muszą być podobnie zbudowane (choć nie jest jasne, w jakich kategoriach należy opisywać to podobieństwo). Czy jednak fakt, że dwa komputery realizujące dwa różne programy, co do których wykazaliśmy, że dla pewnych danych dają te same wyniki, r z e c z y w i ś c i e dają te same wyniki, wynika jedynie z analogii w budowie tych komputerów, a nie ma żadnego związku z odpowiednimi twierdzeniami z teorii obliczeń? A może podobieństwo ich budowy polega na tym, że realizowane przez nie programy dają te same wyniki?

[4] Nie będę tu wchodzić w szczegółową dyskusję dotyczącą koncepcji Gödla. Odnotuję tylko, że teza, iż Gödel postulował istnienie swoistego «szóstego zmysłu» odpowiedzialnego za kontakt z «matematycznymi zaświatami» (tak przedstawiają koncepcję Gödla szczególnie zajadli jego krytycy), jest coraz częściej odrzucana (por. np. [Parsons 1995], [Tieszen 1992]).

1.2 REALIZM QUINE'A

Odmienne jest ujęcie Quine'a, który wychodzi od analiz dotyczących struktury nauk przyrodniczych i odwołuje się do własnej koncepcji istnienia. Stanowisko Quine'a można skrótowo przedstawić w sposób następujący:

1. Bezpośrednio dostępne są jedynie dane zmysłowe (wrażenia). Aby uporządkować i wyjaśnić strumień wrażeń, postulujemy istnienie obiektów fizycznych, które są źródłem tych danych. Motywacją jest tu stworzenie prostej, efektywnej teorii rzeczywistości. Postulowanie istnienia obiektów makroskopowych opiera się więc na argumentacji o charakterze pragmatycznym. Standardy uzasadniania istnienia obiektów nie mają charakteru czysto empirycznego; hipotezy dotyczące istnienia obiektów fizycznych są bowiem przyjmowane po to, aby skonstruować taki obraz świata, który umożliwi skuteczne w niej funkcjonowanie.[5]

2. Podobny mechanizm ma miejsce w nauce. Rozbudowywanie ontologii w wypadku teorii naukowych motywowane jest dążeniem, aby teorię naukową uczynić bardziej efektywną i lepiej zrozumiałą. Założenie o istnieniu przedmiotów na poziomie mikroskopowym (jak cząsteczki, geny, cząstki elementarne *etc.*) przyjmowane jest np. po to, aby uprościć i uczynić bardziej operatywnymi prawa opisujące przedmioty makroskopowe. „Nauka jest kontynuacją zdrowego rozsądku i podtrzymuje zdroworozsądkową zasadę rozbudowywania ontologii dla uproszczenia teorii" [Quine 1953b, 68]. Według Quine'a „postulowania istnienia obiektów takiego czy innego rodzaju jest tylko o tyle dobre z punktu widzenia nauki, o ile pomaga nam w formułowaniu naszych praw" [Quine 1966, 237].

W szczególności Quine rozważa standardy argumentacji na rzecz istnienia np. molekuł. Twierdzi, że gdybyśmy uznali, iż nie ma powodu do uznania realności molekuł, to podobnie nie byłoby powodu do uznania realności obiektów makroskopowych, co jednak znaczy, iż nasze standardy realności są niedobre (gdyż odrzucenie realności obiektów makroskopowych jest niezadowalającym punktem widzenia) [Quine 1966]. Wskazane przez Quine'a względy pragmatyczne muszą być więc uznane za kryteria przyjęcia takiej a nie innej teorii rzeczywistości. Należy zatem uznać istnienie wszystkich obiektów, do których odwołujemy się w teorii.

3. Quine przyjmuje tylko jeden sposób istnienia, zaś wskaźnikiem ontologii jest według niego kwantyfikacja. Status ontologiczny obiektów nie jest uzależniony od ich rodzaju (czy są konkretne, teoretyczne — czy abstrakcyjne). Istnienie obiektów uznajemy bowiem tylko w zależności od tego, czy występują jako wartości zmiennych w zdaniach analizowanej teorii. Status ontologiczny wszystkich przedmiotów

---

[5] „Łącząc oddzielne doznania zmysłowe i traktując je jako percepcję jednego przedmiotu ujmujemy bogactwo naszych doznań w prostym i operatywnym schemacie pojęciowym. Przyporządkowanie danych zmysłowych przedmiotom zewnętrznym jest istotnie podyktowane zasadą prostoty: wcześniejsze i późniejsze wrażenie okrągłości łączymy z tą samą monetą lub z dwiema różnymi monetami, kierując się postulatem maksymalnej prostoty naszego całościowego obrazu świata" [Quine 1953a, 31].

będących wartościami zmiennych kwantyfikacji jest taki sam, i nie ma podstaw twierdzić, iż tylko niektóre spośród zmiennych posiadają interpretację. W szczególności, argumentacja ta dotyczy także istnienia obiektów matematycznych, do których odnoszą się zmienne w zmatematyzowanych teoriach empirycznych. Jeśli teorię naukową uznajemy za zinterpretowaną, to bezzasadny jest częściowy realizm, zakładający istnienie tylko obiektów fizycznych — należy także przyjąć istnienie obiektów matematycznych.

4. Argumentacja Quine'a związana jest z tezą, iż logika elementarna ma wyróżniony status i że teorie naukowe powinny być formułowane właśnie w ramach logiki elementarnej (Barwise używa sformułowania „teza o logice pierwszego rzędu" — *first-order thesis*, [Barwise 1985]).[6] Według Quine'a, jeśli teoria sformułowana jest w języku pierwszego rzędu, to struktura pojęciowa teorii naukowej staje się przejrzysta oraz dane jest jasne i proste kryterium zobowiązań ontologicznych tej teorii.

1.2.1. Chihary krytyka stanowiska Quine'a

Według Chihary, zdania egzystencjalne matematyki nie niosą za sobą żadnych zobowiązań ontologicznych. Chihara odrzuca zatem argumentację Quine'a. Obiera tu jednak drogę istotnie różną od Fielda (por. [Field 1980]), który nie odrzuca argumentu z niezbędności, a jedynie stara się podważyć przesłanki argumentacji Quine'a.[7]

(i) Quine twierdzi, że mamy dane dotyczące istnienia obiektów fizycznych (gdybyśmy uznali, że brak jest takich danych, to musielibyśmy uznać nierealność tych obiektów). Tymczasem, według Chihary, przekonanie o istnieniu obiektów fizycznych jest tak fundamentalne dla naszego myślenia o świecie, że mówienie o danych na rzecz istnienia obiektów fizycznych jest błędem. „Nasza wiara w obiekty fizyczne jest tak podstawową cechą naszego myślenia teoretycznego, że mówienie o dowodach na rzecz prawdziwości tego przeświadczenia jest niewłaściwe. Zbieranie danych, potwierdzanie hipotez, testowanie teorii *etc.*, ma miejsce w ramach schematu, w którym zakłada się istnienie obiektów fizycznych" [Chihara 1990, 10].[8]

---

[6] Obszerną dyskusję na temat «tezy o logice pierwszego rzędu» oraz na temat roli i statusu logiki znaleźć można w [Shapiro 1991].

[7] Zasadniczą ideą koncepcji Fielda jest teza o n i e t w ó r c z o ś c i matematyki: stosowanie technik matematycznych w naukach przyrodniczych jest oczywiście wygodne i użyteczne (tego Field nie neguje), ale w gruncie rzeczy zbędne — możliwe jest bowiem uzyskanie tej samej wiedzy na drodze rozumowań «jakościowych», w których nie odwołujemy się do technik matematycznych. Matematyka pozwala na skrócenie rozumowań, a nie na uzyskanie nowej wiedzy — pełni więc rolę użytecznej fikcji. Field stara się podać rekonstrukcję fragmentu nauki wolną od technik matematycznych — opiera się w niej na «jakościowych» predykatach opisujących relacje między punktami czasoprzestrzeni. Analizie koncepcji Fielda poświęcone są prace: [Bigaj 1994], [Wójtowicz 1994], [Wójtowicz 1999].

[8] Stanowisko Chihary przypomina tu ujęcie Reichenbacha, według którego możemy wyróżnić dwa etapy konstruowania teorii fizycznych (chodzi oczywiście o porządek logiczny, a nie chronolo-

Schemat argumentacji Chihary jest więc następujący:

(i.1) Quine podaje pragmatyczne argumenty zarówno na rzecz istnienia obiektów abstrakcyjnych, jak i fizycznych.

(i.2) Jednakże uzasadnianie istnienia obiektów fizycznych jest pozbawione sensu — założenie o ich istnieniu stanowi bowiem fundament schematu pojęciowego, w ramach którego opisujemy rzeczywistość.

(i.3) Argumentacja Quine'a jest zatem pozbawiona podstaw; tym samym upada również argument na rzecz istnienia obiektów abstrakcyjnych.

Chihara jednak nie wyjaśnia, j a k i e są te obiekty fizyczne — co jest takim obiektem, i jakie są te «wbudowane w nas» standardy uznawania czegoś za «pierwotny obiekt», którego istnienie nie podlega weryfikacji. Jeśli jednak takiego kryterium nie ma, to argumentacja Chihary staje się niekonstruktywna i niedookreślona: wierzymy w istnienie obiektów fizycznych i opierając się na tej wierze konstruujemy teorie, ale nie jesteśmy w stanie zidentyfikować tych obiektów, które uznajemy za fundament naszej ontologii. Czy mają to być średniej wielkości obiekty fizyczne, tj. desygnaty terminów obserwacyjnych? W jaki sposób w strumieniu wrażeń mamy wyróżnić te, które pochodzą od obiektów fizycznych, i te, które od nich nie pochodzą? Czy np. przejazd samochodu albo spadanie kamienia (które dostarczają nam wrażeń) są obiektami fizycznymi? Chihara nie podaje kryteriów, dlaczego za obiekt fizyczny uznajemy kamień czy samochód, a nie lot kamienia czy jazdę samochodu (albo całą czasoprzestrzenną historię kamienia lub samochodu). Dlaczego ma być oczywiste, iż zakładamy istnienie obiektów, a nie zdarzeń czy procesów? Tymczasem, jeśli kryteria uznania pewnych składowych naszej rzeczywistości za obiekty fizyczne, stanowiące fundament naszej ontologii, mają charakter pragmatyczny (wygodniej uznać samochód za obiekt, a jego jazdę za proces, w którym ten obiekt bierze udział, niż uznać przejazd samochodu za obiekt, a samochód za pewien konstrukt logiczny z obiektów takich, jak: przejazd samochodu, postój samochodu, pobyt samochodu w warsztacie *etc.*), to taki tok argumentacji nie różni się w istocie od argumentacji Quine'a na rzecz fizykalistycznego aparatu pojęciowego i krytyka Chihary chybia celu. Chihara jednak nie podejmuje tego wątku, traktując swoje stanowisko w tym punkcie jako oczywiste.[9]

(ii) Chihara odrzuca «tezę o logice pierwszego rzędu», związaną z koncepcją Quine'a. Wskazuje na fakt, że teorie naukowe nie są zazwyczaj formułowane w ra-

---

giczny). W pierwszym podajemy aksjomaty koordynacji, wyznaczające system pojęciowy, w ramach którego będziemy postrzegali i opisywali rzeczywistość. W drugim formułujemy aksjomaty pomostowe — wypełniamy teorię treścią empiryczną (por. np. [Reichenbach 1960]).

[9] Chihara nie porusza też zagadnienia, jak w naszej ontologii zadane są kryteria bycia przedmiotem teoretycznym. Czy status ontologiczny takich przedmiotów jest taki sam, jak przedmiotów obserwacyjnych? Czy są one również fundamentalnymi składnikami naszej ontologii, a ich istnienie przyjmujemy bez zastrzeżeń?

chunku predykatów pierwszego rzędu i że Quine także nie podaje sformułowania żadnej teorii w kanonicznej notacji tego rzędu. Nakładanie na teorie naukowe ograniczeń dotyczących wykorzystywanych w tych teoriach narzędzi logicznych jest pozbawione podstaw — teorie naukowe są bowiem formułowane w „naturalnym języku naukowym" i żądanie Quine'a, aby podawać je w wybranej przez niego postaci, jest bezzasadne. Dodatkowo Chihara przytacza przykład prawa Coulomba (dotyczącego istnienia sferyczno-symetrycznego pola elektromagnetycznego wokół ładunku elektrycznego), twierdząc, że może się okazać, że przetłumaczenie tego prawa na język ekstensjonalnej logiki pierwszego rzędu nie jest możliwe, gdyż przy obecności silnych pól grawitacyjnych pole to nie jest sferyczno-symetryczne. To — według Chihary — stanowi dodatkowy argument przeciwko «tezie o logice pierwszego rzędu».

Argument ten opiera się na przekonaniu, że w rachunku predykatów nie jest możliwe opisanie zjawisk niesymetrycznych. Chihara jednak nie podaje powodu, dlaczego tak miałoby być; nie wyjaśnia nawet dokładnie, co znaczy, iż można opisać zjawisko, które jest sferycznie-symetryczne.[10]

Należy też zauważyć, że akceptacja «tezy o logice pierwszego rzędu» nie jest warunkiem *sine qua non* zaakceptowania stanowiska Quine'a w sprawie zobowiązań ontologicznych i jego kwantyfikatorowej koncepcji istnienia. Sam fakt, że nie jest możliwe podanie tłumaczenia pewnej teorii na język logiki pierwszego rzędu, i że konieczne jest odwołanie się do silniejszej logiki, nie uniemożliwia rozważania problemu zobowiązań ontologicznych. Wprawdzie oryginalne ujęcie Quine'a dotyczy logiki elementarnej, można jednak podać przeformułowane kryterium istnienia Quine'a dla znacznie obszerniejszej klasy logik.[11] Tym samym argumentacja dotycząca zobowiązań ontologicznych okazuje się w dużym stopniu niezależna od przyjęcia tezy o logice pierwszego rzędu. Zarzuty Chihary wobec «tezy o logice pierwszego rzędu» nie dostarczają więc argumentów przeciwko samej teorii zobowiązań ontologicznych (choć wymuszają jej modyfikację).

(iii) Chihara twierdzi, iż matematycy nieufnie podeszliby do koncepcji, w myśl której o prawdziwości teorii matematycznej decydowałyby względy empiryczne [Chihara 1990, 15]. Stąd Chihara wysnuwa wniosek, że argument z niezbędności Quine'a jest pozbawiony podstaw z punktu widzenia praktyki matematycznej.

Ten argument ma jednak charakter wyłącznie psychologiczno-socjologiczny. Chihara odwołuje się do faktu, że „matematycy nie uważaliby pewnego stanu rzeczy za pociągający". To jednak ma związek jedynie z komfortem psychicznym matematy-

---

[10] Czy równanie elipsy ($x^2a^2+y^2b^2=a^2b^2$), albo paraboli ($y=ax^2$) nie opisuje zjawiska, które nie jest sferycznie symetryczne? Tymczasem jest ono przecież sformułowane w rachunku predykatów pierwszego rzędu. Nie jest więc jasne, o co chodzi w argumencie Chihary.

[11] W pracy [Wójtowicz 2000] sformułowałem uogólnione kryterium istnienia Quine'a dla tzw. abstrakcyjnych logik, zadanych w sposób semantyczny, w duchu abstrakcyjnej teorii modeli (por. [Barwise, Feferman 1985]). Jest to obszerna klasa logik, obejmująca logikę elementarną, logiki z dodatkowymi kwantyfikatorami, logiki z formułami nieskończonymi i logikę drugiego rzędu.

ków, z ich (pozamerytoryczną) motywacją do pracy *etc.* Nie dotyczy on natomiast problemów filozoficznych związanych z interpretacją matematyki i zagadnieniem jej stosowalności. Dlatego argument Chihary trafia w próżnię.[12]

(iv) Chihara twierdzi, że sam fakt, że jakaś teoria naukowa *T* nie implikuje (nie zobowiązuje się do) istnienia obiektów pewnego typu *O*, nie znaczy wcale, że obiekty typu *O* nie istnieją. Według niego „[naukowiec formułujący badaną teorię *T*] może żywić jeszcze inne przekonania dotyczące świata, które implikują istnienie obiektów typu *O*" [Chihara 1990, 53].

Argument ten nie jest do końca jasny. Co Chihara ma na myśli mówiąc o „przekonaniach dotyczących świata"? O jaką klasę przekonań chodzi? Czy chodzi tylko o przekonania formułowane w ramach teorii naukowych? Czy o wszystkie możliwe przekonania o świecie? Gdyby konsekwentnie stosować argument Chihary, to należałoby zakwestionować zasadność wszelkich pytań o interpretację (o istnienie semantycznych korelatów) teorii naukowych. Każdą odpowiedź na pytanie tego typu można byłoby bowiem podważyć odmawiając jej znaczenia — gdyż naukowiec może również żywić inne przekonania, nie objęte analizowaną teorią. Jakakolwiek metateoretyczna analiza byłaby — na mocy argumentu Chihary — pozbawiona sensu już w punkcie wyjścia.

Argumentację Chihary można też zmodyfikować w następujący sposób: nie możemy odrzucić istnienia obiektów matematycznych, gdyż pewni naukowcy mogą żywić przekonania dotyczące ich istnienia. Oczywiście taki argument byłby niepoważny. Jednakże Chihara nie podaje argumentów na rzecz tego, że przekonania naukowców dotyczące obiektów matematycznych nie powinny być traktowane serio — w przeciwieństwie do przekonań dotyczących innych klas obiektów.

II. KONCEPCJA CHIHARY

2. Podstawowe idee

Chihara odrzuca zarówno stanowisko realistyczne Gödla, jak i Quine'a. Jednakże jego praca oprócz argumentacji negatywnej zawiera także prezentację własnej koncepcji.

---

[12] Podobny argument formułuje Maddy w [Maddy 1992] i [Maddy 1996]. Twierdzi ona, że motywacja matematyka do rozważania takich a nie innych zagadnień matematycznych nie ma związku z ich przydatnością, ale z kryteriami wewnątrzmatematycznymi, takimi jak: oczywistość, spójność aparatury pojęciowej *etc.* (tu można dodać jeszcze motywacje natury estetycznej: czy problem jest «ładny», czy jego rozwiązanie jest «eleganckie»). Argument z niezbędności — według Maddy — nie wyjaśnia praktyki matematycznej. Maddy zatem — podobnie jak Chihara — przesuwa dyskusję ontologiczną na poziom psychologiczno-socjologiczny. Konsekwetnie należałoby zadać pytanie o kryterium procentowe: Jaki procent matematyków powinien odczuć dyskomfort w związku z argumentem z niezbędności, aby argument ten uznać za bezzasadny?

Celem Chihary jest wyeliminowanie założenia o istnieniu obiektów matematycznych, a jednocześnie wyjaśnienie faktu, w jaki sposób matematyka pozbawiona przedmiotowego odniesienia może stosować się do opisu rzeczywistości.[13] Swoją koncepcję opiera on na pojęciach modalnych. „Podstawową ideą w moim podejściu jest stworzenie systemu matematycznego, w którym twierdzenia egzystencjalne tradycyjnej matematyki zostaną zastąpione twierdzeniami dotyczącymi konstruowalności: tam, gdzie w tradycyjnej matematyce twierdzi się, że taki-to-a-taki obiekt istnieje, w tym systemie pojawią się twierdzenia dotyczące konstruowalności" [Chihara 1990,25]. Pojęcie konstruowalności Chihary jest jednak silniejsze niż pojęcie konstruowalności u intuicjonistów, a jego system nie jest wersją matematyki intuicjonistycznej. Celem Chihary jest bowiem «imitacja» klasycznej matematyki. W zastosowaniach posługujemy się bowiem przede wszystkim instrumentarium matematycznym wypracowanym w ramach matematyki klasycznej. Antyrealistyczna rekonstrukcja matematyki musi więc uwzględniać ten fakt.

Chihara konstruuje system, który ma pozwolić na eliminację założenia o istnieniu obiektów matematycznych. Odrzuca jednak stanowisko formalistyczne, w myśl którego matematyka to pozbawiona interpretacji gra symboli. Odrzuca także fikcjonalistyczną teorię Fielda, w myśl którego zdania matematyczne odnoszą się jedynie do pewnych fikcji (przypominają więc zdania o zwyczajach Sherlocka Holmesa), a zatem są po prostu fałszywe. Twierdzenia matematyki są według Chihary prawdziwe. Odnoszą się one jednak nie do obiektów abstrakcyjnych, istniejących niezależnie od matematyków i języka matematycznego, ale do możliwości wykonania konstrukcji językowych w możliwych językach. Chihara stara się więc nadać zdaniom matematycznym taką interpretację, przy której zdania te możemy uznać za prawdziwe, ale uznanie ich prawdziwości nie powoduje konieczności uznania istnienia obiektów matematycznych, do których (w myśl stanowiska realistycznego) odnoszą się te zdania. Chce zatem zaproponować «semantykę bez ontologii».[14] Twierdzenia egzystencjalne (typu: „Istnieje taka liczba, że...") zostają zastąpione twierdzeniami dotyczącymi konstruowalności („Możliwe jest skonstruowanie takiego zdania, że..."). Matematyka uzyskuje więc interpretację, zaś zdania matematyczne wartość logiczną, dzięki odwołaniu się do pojęć modalnych.

Rachunek logiczny zaproponowany przez Chiharę, opiera się na ω-sortowym rachunku predykatów (stanowiącym pochodną teorii typów Russella) z dodatkowym operatorem, nazwanym przez Chiharę „kwantyfikatorem konstruowalności" (*constructibility quantifier*). Podstawowym pojęciem, którym posługuje się Chihara w swojej teorii, jest pojęcie *zdania otwartego* (*open-sentence-token*). Teoria Chihary doty-

---

[13] Problem stosowalności matematyki jest jednym z zasadniczych problemów filozofii matematyki i każda formułowana koncepcja filozoficzna winna zdać z niego sprawę. Chihara docenia wagę tego problemu.

[14] Shapiro określa stanowisko Chihary jako „realizm co do wartości logicznej", ale „antyrealizm co do ontologii" [Shapiro 1993].

czy konstruowalności odpowiednich zdań otwartych. Chihara — jak już wspomniano — rozumie jednak konstruowalność w znacznie szerszym sensie niż konstruktywiści. Nie żąda bowiem podania konstrukcji *explicite*. Według Chihary stwierdzenie, że jakaś konstrukcja jest możliwa do przeprowadzenia, nie znaczy wcale, że ktoś tę konstrukcję faktycznie przeprowadził, ani nawet, że wiemy, jaki jest algorytm przeprowadzenia tej konstrukcji. Znaczy jedynie tyle, że „w logicznej przestrzeni zdań otwartych jest dostatecznie dużo miejsca, aby skonstruować dane zdanie otwarte" [Chihara 1990, 48].

Zasadniczą ideę, jaka kryje się za wszystkimi proponowanymi przez Chiharę systemami, ilustruje przykład pewnej chińskiej gry. Rozważmy kwadrat pocięty na siedem kawałków: pięć trójkątów, jeden kwadrat i jeden romb. Można z nich układać najrozmaitsze figury (tzw. tangramy). Możliwe jest skontruowanie tangramu w kształcie trójkąta, prostokąta, litery W, L, T i wielu innych.

Rozważmy teraz (hipotetyczną) teorię dotyczącą tangramów. Niektóre z twierdzeń takiej teorii dotyczyłyby oczywiście możliwości skonstruowania tangramów określonego rodzaju. W teorii tej występowałyby zatem wyrażenia postaci „Możliwe jest skonstruowanie tangramu takiego, że...". Według Chihary, takie wyrażenie ma podobny charakter jak kwantyfikator egzystencjalny, i *vice versa*: klasyczny kwantyfikator egzystencjalny można interpretować w duchu twierdzeń o konstruowalności. „Podstawowa idea tego ujęcia jest następująca: istnienie w matematyce będzie zawsze wyrażane za pomocą kwantyfikatorów konstruowalności" [Chihara 1990, 39]. Oczywiście stwierdzenie, że możliwa jest konstrukcja pewnego tangramu, nie znaczy wcale, iż taki tangram istnieje ani że ktoś taki tangram faktycznie skonstruował. Teza dotycząca konstruowalności tangramu nie pociąga tezy o jego istnieniu.

Chihara prezentuje trzy systemy, oznaczone jako L, L^* i Lt. Dwa pierwsze mają charakter ilustracji i przygotowania do wprowadzenia właściwego systemu: Lt.

2.1. SYSTEM *L*

2.1.1. Składnia *L*

W skład słownika wchodzą zmienne, stałe i predykaty. Stałe logiczne to spójniki oraz kwantyfikatory C, A.

Formuły atomowe tworzone są standardowo. Formuły złożone tworzone są standardowo za pomocą spójników oraz za pomocą kwantyfikatorów C,A: jeśli φ jest formułą, zaś α zmienną, to $A\alpha\varphi$ oraz $C\alpha\varphi$ są formułami.

2.1.2. Semantyka *L*

K-interpretacją nazywamy czwórkę $\mathbf{M} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{a}, \mathbf{U}, \mathbf{I} \rangle$, gdzie:
$\mathbf{W}$ jest niepustym zbiorem;
$\mathbf{a} \in \mathbf{W}$;

U jest funkcją, która każdemu elementowi **W** przypisuje pewien niepusty zbiór;

I jest funkcją, która spełnia następujące warunki:

i) każdej stałej przypisuje element zbioru $Z = \cup\{\mathbf{U}(\mathbf{w}): \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$;

ii) jeśli P jest predykatem n-argumentowym, to **I** przypisuje predykatowi P pewien podzbiór Z^n.

Intuicyjnie **W** to zbiór możliwych światów, **a** to świat aktualny, **U**(**w**) to zbiór przedmiotów istniejących w świecie **w**. **I** jest funkcją interpretującą, która każdej stałej przypisuje pewien obiekt (z dowolnego z możliwych światów), a każdemu predykatowi pewną relację, określoną na obiektach z możliwych światów. Denotacja stałych indywidualnych oraz predykatów jest więc «sztywna» (*rigid* — w duchu semantyki Kripkego). W systemie L można więc mówić o własnościach przedmiotów nie należących do rzeczywistego świata; można także mówić o relacjach pomiędzy obiektami z rzeczywistego świata i innych światów możliwych oraz o relacjach między obiektami ze światów możliwych.

Prawdziwość zdań w K-interpretacji zdefiniowana jest w następujący sposób:

Niech **M** będzie K-interpretacją, zaś φ będzie zdaniem:

a) jeśli φ jest zdaniem atomowym postaci $P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, gdzie $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ są stałymi, to φ jest prawdziwe w **M** zawsze i tylko wtedy, gdy $\langle \mathbf{I}(\alpha_1),\ldots,\mathbf{I}(\alpha_n)\rangle \in \mathbf{I}(P)$;

b) dla spójników logicznych warunek indukcyjny zadany jest standardowo;

c) dla zdefiniowania spełniania zdań zawierających kwantyfikatory A oraz C, Chihara wprowadza pojęcie β-wariantu:

Niech $\mathbf{M} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{a}, \mathbf{U}, \mathbf{I}\rangle$ oraz $\mathbf{M'} = \langle \mathbf{W'}, \mathbf{a'}, \mathbf{U'}, \mathbf{I'}\rangle$ będą K-interpretacjami, zaś β — stałą indywiduową. Jeśli **M** różni się od **M'** tylko interpretacją stałej β, to interpretację **M'** nazwiemy β-wariantem interpretacji **M**. Jeśli α jest zmienną, a β stałą, to przez $\varphi(\alpha/\beta)$ oznaczamy formułę powstającą z φ poprzez zastąpienie wszystkich wolnych wystąpień zmiennej α stałą β.

Można teraz zdefiniować prawdziwość zdań zawierających kwantyfikatory A i C:

(i) Jeśli $\varphi = (A\alpha)\psi$, to φ jest prawdziwe w K-interpretacji **M** zawsze i tylko wtedy, gdy $\psi(\alpha/\beta)$ jest prawdziwe w k a ż d y m β-wariancie K-interpretacji **M**.

(ii) Jeśli $\varphi = (C\alpha)\psi$, to φ jest prawdziwe w K-interpretacji **M** zawsze i tylko wtedy, gdy $\psi(\alpha/\beta)$ jest prawdziwe w p e w n y m β-wariancie K-interpretacji **M**.

2.1.3. Komentarz

System L został wprowadzony dla celów dydaktycznych i ilustracyjnych — stanowi niejako «wstęp» do całej koncepcji. Chodzi o wprowadzenie kwantyfikatorów konstruowalności A i C.

System L nie różni się jednak pod względem semantycznym od logiki pierwszego rzędu. Kwantyfikator C można zastąpić kwantyfikatorem $\vee$, zaś A przez $\wedge$. Zamiast mówić o β-wariantach możemy mówić o wartościowaniach; uniwersum modelu stanowić będzie po prostu zbiór Z. Rzeczywisty świat **a** nie odgrywa roli wewnątrzjęzykowej — nie mamy możliwości wyrażenia w języku Chihary faktu, że jakiś przedmiot jest rzeczywisty. Jest to dopiero widoczne «z zewnątrz» (tj. w metateorii). Metateoretyczny fakt, że jakiś przedmiot jest rzeczywisty (czyli, że należy do dziedziny świata **a**) znaczy jedynie, że w uniwersum modelu wyróżniony jest pewien zbiór, który (w metateorii, czyli «z zewnątrz») interpretowany jest jako zbiór przedmiotów rzeczywistych.

System *L* jest więc jedynie wariantem notacyjnym logiki pierwszego rzędu, wprowadzonym w charakterze ilustracji.

2.2. SYSTEM *L**

Jest to drugi system podany przez Chiharę. Wprowadzony jest po to, aby pokazać „w jaki sposób kwantyfikatory konstruowalności «współpracują» ze standardowymi kwantyfikatorami" [Chihara 1990, 32].

Posługując się ilustracją tangramów, można powiedzieć, że w ramach systemu *L** można mówić zarówno o poszczególnych kawałkach służących do stworzenia tangramu, jak i o możliwych do skonstruowania tangramach. Tangramy są tymi obiektami, do których odnosić się będą kwantyfikatory konstruowalności; ponieważ zaś interesuje nas tylko ich konstruowalność, a nie ich istnienie, nie będą się do nich odnosić zwykłe kwantyfikatory. Zwykłe kwantyfikatory będą stosowane jedynie do wyrażenia istnienia (w rzeczywistym świecie) odpowiednich kawałków służących do skonstruowania tangramu. W *L** będziemy zatem mówić o konstruowalności tangramów, lecz nie o istnieniu tangramów, oraz o istnieniu kawałków tangramu, ale nie o konstruowalności kawałków tangramów. To znajdzie swoje formalne odbicie w składni i semantyce systemu *L**.

2.2.1. Składnia *L**

Do języka *L* dodajemy kwantyfikator egzystencjalny $\bigvee$ i ogólny $\bigwedge$, zmienne z gwiazdką (mamy zatem dwa typy zmiennych: zmienne i zmienne*) oraz stałe z gwiazdką (są zatem stałe i stałe*). Dla uproszczenia, Chihara rozważa tylko jeden predykat dwuargumentowy *R* (przy bogatszym słowniku składnia i semantyka zdefiniowane są analogicznie).

Formuły atomowe mają postać $R\alpha^*\beta$. Warunek indukcyjny dla spójników logicznych jest standardowy, zaś warunek dla kwantyfikatorów (kwantyfikatorów klasycznych i kwantyfikatorów konstruowalności) ma postać:

jeśli φ jest formułą, to formułami są

$\bigvee\alpha^*\varphi$, $\bigwedge\alpha^*\varphi$

$C\alpha\varphi$, $A\alpha\varphi$

($\bigvee$ i $\bigwedge$ wiążą zatem zmienne*, zaś *C* i *A* — zmienne).

2.2.2. Semantyka L^*

K*-interpretacją nazwiemy czwórkę ⟨**W***, **a***, **U***, **I***⟩, gdzie:

1. **U*** jest funkcją dwuargumentową, która każdej parze (i,**w**) (gdzie $i \in \{0,1\}$, a $\mathbf{w} \in \mathbf{W}^*$) przypisuje pewien niepusty zbiór. **U***(0,**w**) wchodzi w skład zakresu zmienności zmiennych*, zaś **U***(1,**w**) — w skład zakresu zmienności zmiennych.

2. **I*** przypisuje każdej stałej element zbioru $Z = \cup\{\mathbf{U}^*(1,\mathbf{w}): \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*\}$ (czyli jakąś z 1-rzeczy z któregokolwiek ze światów), każdej stałej* pewien element **U***(0,**a***) (czyli pewną 0-rzecz ze świata rzeczywistego), zaś predykatowi R pewien podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\mathbf{U}^*(0,\mathbf{a}^*) \times Z$.[15]

Prawdziwość zdań w K*-interpretacji zdefiniowana jest w następujący sposób:

$R\alpha^*\beta$ (gdzie α^* jest stałą*, zaś β — stałą) jest prawdziwe w K*-interpretacji **M***, zawsze i tylko wtedy, gdy $\langle \mathbf{I}^*(\alpha^*), \mathbf{I}^*(\beta)\rangle \in \mathbf{I}^*(R)$.

β-wariant definiujemy tak, jak w wypadku L (dodawszy oczywisty warunek dotyczący tego, że zamieniane symbole są tego samego typu, tj. oba są z gwiazdką lub oba bez).

$\vee\alpha^*\varphi$ jest prawdziwe w K*-interpretacji **M*** zawsze i tylko wtedy, gdy $\varphi(\alpha^*/\beta^*)$ jest prawdziwe przy p e w n y m β-wariancie **M***.

$\wedge\alpha^*\varphi$ jest prawdziwe w K*-interpretacji **M*** zawsze i tylko wtedy, gdy $\varphi(\alpha^*/\beta^*)$ jest prawdziwe przy k a ż d y m β-wariancie **M***.

Warunki dla kwantyfikatorów A oraz C są identyczne jak w wypadku systemu L.

2.2.3. Komentarz[16]

System L^* semantycznie nie różni się od zwykłej dwusortowej logiki pierwszego rzędu, gdzie jeden sort to kawałki tangramów, a drugi — tangramy. Fakt, że mamy różne światy, nie ma znaczenia, gdyż nie interesuje nas informacja, w którym z możliwych światów daje się skonstruować dany tangram. Fakt, w którym ze światów można skonstruować dany tangram nie jest wyrażalny w L^*; można tu jedynie stwierdzić konstruowalność. Dlatego z punktu widzenia semantyki istotna jest tylko suma zbiorów 1-rzeczy po wszystkich światach (tj. zbiór $Z=\cup\{\mathbf{U}^*(1,\mathbf{w}): \mathbf{w} \in \mathbf{W}^*\}$) oraz zbiór aktualnych 0-rzeczy (tj. **U***(0,**a***)). Dzieje się tak dlatego, że warunki prawdziwości dla zdań z kwantyfikatorami $\vee$ i $\wedge$ są sformułowane w języku β-wariantów, zaś β-warianty zdefiniowane są tak, że stałe* są interpretowane t y l k o w **U***(0,**a***). Zdanie $\vee x^*\varphi$ jest więc prawdziwe, jeśli istnieje obiekt $c \in \mathbf{U}^*(0,\mathbf{a}^*)$ taki, że prawdziwe jest $\varphi(c)$.

Odpowiednikiem systemu L^* będzie więc dwusortowy język rachunku predykatów pierwszego rzędu. Nieformalnie przedmioty 0-sortu (odpowiednik zbioru U*(0,a*)),

---

[15] Posługując się ilustracją tangramów powiemy, że: **U***(0,**w**) to kawałki tangramów w świecie **w**, zaś **U***(1,**w**) to tangramy konstruowalne w świecie **w**. Stałe* to rzeczywiste kawałki tangramów, zaś stałe to konstruowalne (w dowolnym z możliwych światów) tangramy. Predykat R jest interpretowany jako relacja między rzeczywistymi kawałkami tangramów a tangramami.

[16] Dla czytelności w komentarzu posłużono się analogią tangramów.

interpretować można jako istniejące, zaś przedmioty 1-sortu (odpowiednik zbioru Z) jako możliwe do skonstruowania. Zmienne i stałe z poszczególnych sortów będą pełnić funkcję zmiennych i zmiennych* oraz stałych i stałych* z systemu L^*. W tej sytuacji nie jest konieczne wprowadzanie nowych kwantyfikatorów — zwykła kwantyfikacja (gdzie zakresem zmienności zmiennych* są przedmioty 0-sortu) będzie pełnić taką rolę, jak zwykła kwantyfikacja w systemie L^*, zaś zwykła kwantyfikacja (gdzie zakresem zmienności zmiennych są przedmioty 1-sortu) rolę taką, jak «konstruowalna kwantyfikacja» w systemie L^*. Podobnie jak w wypadku systemu L (który można utożsamić z odpowiednim systemem pierwszego rzędu), system L^* stanowi po prostu pewien wariant notacyjny logiki dwusortowej pierwszego rzędu, i podobnie jak w wypadku systemu L, jego wprowadzenie jest — z punktu widzenia uzasadniania zasadniczej tezy Chihary — bezcelowe. Z faktu, że pewna dwusortowa teoria pierwszego rzędu może być wysłowiona inaczej, nie wynika, iż semantyka dla tej teorii powinna być zdefiniowana inaczej (czy że teoria ta powinna być uznana za teorię niezinterpretowaną). Możliwość przyjęcia possybilistycznej semantyki nie wynika bynajmniej z możliwości notacyjnego przeformułowania klasycznych rachunków logicznych.

3. System *Lt*

Pojęcie konstruowalności w systemie Chihary dotyczy tzw. zdań otwartych (*open sentences* — przy czym chodzi nie o typy takich zdań, ale poszczególne ich egzemplarze — *tokens*). Kiedy mówimy o konstruowalności wypowiedzi, mamy na myśli możliwość wykonania ciągu pewnych czynności przez użytkowników języka. Nie jest istotne, czy komunikat ten wyrażony jest w postaci napisu, ciągu gestów czy wypowiedzi [Chihara 1990, 40]. Status ontologiczny ciągu czynności nie jest istotny, zaś mówienie o istnieniu takiej wypowiedzi jest jedynie *façon de parler*.

Chihara nie ma więc na myśli konstruowania obiektów matematycznych, ale konstruowanie wypowiedzi: „W sensie, w jakim używam kwantyfikatorów konstruowalności, nie wiem, co by to miało znaczyć, iż możliwe jest skonstruowanie liczby czy zbioru" [Chihara 1990, 41]. Chihara nie stawia warunków ograniczających klasę zdań — w szczególności nie żąda, aby były one przez nas rozumiane, abyśmy byli w stanie podać dla nich warunki prawdziwości czy definicję spełniania dla możliwych języków, ani nawet, byśmy znali warunki bycia zdaniem [Chihara 1990, 47]. Spełnianie jest bowiem pojęciem pierwotnym jego teorii; pojęcie to zadane będzie aksjomatycznie (podobnie jak należenie jest pojęciem pierwotnym teorii mnogości [Chihara 1990, 46]). Chihara dopuszcza zatem silne — jak sam przyznaje — pojęcie spełniania. W tym sensie jego system nie jest „ideologicznie nominalistyczny".[17] Chihara jest natomiast nominalistą ontologicznym — według niego jest bowiem błędem sądzić, iż

[17] Chihara odróżnia nominalizm „ideologiczny" od „ontologicznego". Nominalista ideologiczny odrzuca użycie p o j ę ć matematycznych, podczas gdy nominalista ontologiczny dopuszcza używanie pojęć matematycznych, odrzucając istnienie o b i e k t ó w matematycznych [Chihara 1990, 47].

posługiwanie się pewnymi pojęciami (np. pojęciem spełniania) wymusza przyjęcie platonistycznej ontologii.[18]

Kwantyfikatory konstruowalności Chihary dotyczą zdań otwartych, a wypowiedzi z ich użyciem mają postać: „Możliwe jest skonstruowanie zdania otwartego takiego, że...". Zdania otwarte konstruowane są w „logicznej przestrzeni zdań otwartych" (*logical space of open sentences*). Nie znaczy to jednak, że postulowane będzie istnienie takiego obiektu, jak przestrzeń logiczna. Przestrzeń logiczna pełni jedynie rolę heurystycznego narzędzia, które ułatwia formułowanie twierdzeń.

Przy prezentacji swojej tezy Chihara posługuje się analogią geometrii euklidesowej. Według niego, stwierdzenie, iż możliwa jest konstrukcja prostej o określonych cechach, jest w gruncie rzeczy stwierdzeniem, że „natura przestrzeni geometrycznej nie wyklucza takiej konstrukcji — czyli, innymi słowy, że w przestrzeni geometrycznej jest miejsce na taką prostą" [Chihara 1990, 49]. Dalej Chihara twierdzi, że skoro o istnieniu prostej wnioskujemy na podstawie faktu jej konstruowalności, to możemy wykonać krok w stronę przeciwną — zamiast o istnieniu prostej będziemy mówić jedynie o jej konstruowalności.

Analogia z geometrią euklidesową jest wątpliwa. Wykonanie kroku „w stronę przeciwną", wymaga przyjęcia zasady konstruowalności: „Każdy obiekt jest konstruowalny; nie istnieje nic, co by nie było konstruowalne". Nie da się przeprowadzić trysekcji kąta — ale czy to znaczy, że „w przestrzeni geometrycznej" nie istnieją proste, które dzielą kąt na trzy części? Jeśli uznamy, że takie proste nie istnieją, to *de facto* opieramy się na zasadzie konstruowalności. Wtedy jednak płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ nie może stanowić modelu dla geometrii euklidesowej — gdyż przy założeniu zasady konstruowalności dopuszczalne są tylko obiekty konstruowalne. Fakt ten jest jednak faktem metateoretycznym, odwołującym się do kryteriów semantycznych (zasada konstruowalności jest metateoretyczną zasadą semantyczną). Takie ujęcie jednak od początku rozstrzyga spór ontologiczny na korzyść konstruktywizmu. Między teorią Chihary a geometrią euklidesową zachodzi podobieństwo tylko przy założeniu zasady konstruowalności (czyli przy utożsamieniu istnienia z konstruowalnością).

Rozważania na temat systemu *Ct* Chihara rozpoczyna krótką prezentacją koncepcji Fregego. W systemie Fregego występują m.in. obiekty i pojęcia, przy czym pojęcia tworzą hierarchię: pojęcia (n+1)-szego rzędu odnoszą się do pojęć n-tego rzędu. Chihara czerpie inspirację z tej koncepcji, jednak zamiast monadycznych pojęć Fregego — Chihara wprowadza zdania otwarte (spełniane przez obiekty podpadające pod dane pojęcie). Swój system formułuje on w ω-sortowym rachunku predykatów pierwszego rzędu. Nieskończenie wiele typów symboli indywiduowych odpowiada nieskończenie wielu poziomom systemu Fregego.

---

[18] W tym punkcie stanowisko Chihary przypomina stanowisko Carnapa, według którego z wprowadzenia do języka nowych terminów nie wynikają żadne wnioski dotyczące istnienia desygnatów tych terminów. W szczególności stosowanie języka, w którym mowa o obiektach abstrakcyjnych, nie niesie za sobą konieczności przyjęcia ontologii platonistycznej [Carnap 1950].

3.1. SKŁADNIA *Lt*

Zmienne to litery u,w,z; mogą mieć one indeksy liczbowe górne i dolne

Stałe to litery od a do t; mogą mieć one indeksy liczbowe górne i dolne. Indeksy górne oznaczają rząd danego symbolu indywiduowego.[19]

Są dwa rodzaje predykatów dwuargumentowych: $S(,)$ i $I(,)$; indeksy liczbowe górne oznaczają rząd danego predykatu. Formuły atomowe zdefiniowane są w sposób następujący:

Jeśli S jest predykatem rzędu n, α symbolem rzędu n, β symbolem rzędu $(n+1)$, to $S^n\alpha\beta$ jest formułą atomową.

Jeśli I,α,β są rzędu n, to $I^n\alpha\beta$ jest formułą atomową.

Warunek dla spójników logicznych ma standardową postać, zaś dla kwantyfikatorów postać następującą:

Jeśli φ jest formułą, zaś α zmienną rzędu $n>0$, to $C\alpha\varphi$ oraz $A\alpha\varphi$ są formułami.

Jeśli α jest zmienną rzędu 0, to $\bigvee\alpha\varphi$ oraz $\bigwedge\alpha\varphi$ są formułami.

3.2. SEMANTYKA *Lt*

Kt-interpretacją nazywamy czwórkę uporządkowaną $\langle \mathbf{W}, \mathbf{a}, \mathbf{U}, \mathbf{I}\rangle$ taką, że:

W jest niepustym zbiorem;

$\mathbf{a} \in \mathbf{W}$.

U jest funkcją, która każdej parze $(n,\mathbf{w})$ przypisuje niepusty zbiór, gdzie n jest liczbą naturalną, zaś $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ ($\mathbf{U}(n,\mathbf{w})$ to zbiór rzeczy z poziomu n w świecie **w**).

I jest funkcją interpretującą, która spełnia następujące warunki:

a) każdej stałej poziomu 0 przypisuje pewien element zbioru $\mathbf{U}(0, \mathbf{a})$;

b) predykatowi S^0 przypisuje pewien podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\mathbf{U}(0,\mathbf{a}) \times Z[1]$ (gdzie $Z[1]=\cup\{\mathbf{U}(1,\mathbf{w}):\mathbf{w}\in \mathbf{W}\}$);

c) predykatowi I^0 przypisuje pewien podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\mathbf{U}(0,\mathbf{a}) \times \mathbf{U}(0,\mathbf{a})$;

d) każdej stałej poziomu $n>0$ przypisuje pewien element $Z[n]$ (gdzie $Z[n]= \cup \{\mathbf{U}(n,\mathbf{w}):\mathbf{w}\in \mathbf{W}\}$);

e) predykatom S^n (dla $n>0$) przypisuje pewien podzbiór iloczynu kartezjańskiego $Z[n] \times Z[n+1]$;

f) predykatom I^n (dla $n>0$) przypisuje pewien podzbiór iloczynu kartezjańskiego $Z[n] \times Z[n]$.

3.3. TEORIA *Ct*

Chihara formułuje „konstruowalną teorię typów" (*Constructibility Theory of Types*). Podstawowe w niej są dwa pojęcia: spełniania (interpretacja predykatów S^n)

[19] Przyjmujemy konwencję, iż symbol bez indeksu górnego jest symbolem zerowego rzędu.

i identyczności (I^n; dla $n>0$ jest to identyczność ekstensjonalna). Aby uniknąć trudności związanych z tym, że to samo zdanie może się pojawiać w różnych światach i mieć różne własności, Chihara przyjmuje założenie, iż dziedziny poszczególnych światów są rozłączne. W każdym z możliwych światów **w** mamy zatem zdania pewnego języka, przy czym języki z dwóch różnych światów $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ są rozłączne. Żadne zdanie otwarte (w teorii *Ct* mówimy o zdaniach otwartych) nie może się więc pojawić w dwóch światach.

Spełnianie także jest „sztywne" (*rigid*). Ważne jest tylko to, dla jakich r z e c z y w i s t y c h obiektów (czyli ze świata **a**) spełnione są zdania pierwszego rzędu (co jest zagwarantowane przez warunek, iż interpretacją predykatu S^0 jest podzbiór $U(0,\mathbf{a}) \times Z[1]$). To, jak «zachowują się» one na obiektach z możliwych światów, nie jest istotne. Natomiast zdania wyższych rzędów nie mają już tej własności — dla ich prawdziwości znaczenie mają obiekty ze wszystkich możliwych światów.[20]

Aksjomaty teorii *Ct* obejmują:

1. Aksjomat(y) ekstensjonalności.

Idea jest prosta: zdania, które są prawdziwe na dokładnie tych samych obiektach, są identyczne. Formalnie zapisujemy to jako:

$A\alpha A\beta\wedge\gamma[(S^0\gamma\alpha\Leftrightarrow S^0\gamma\beta)\Rightarrow I^1\alpha\beta]$ (aksjomat dla poziomu 0);
$A\alpha A\beta A\gamma[(S^n\gamma\alpha\Leftrightarrow S^n\gamma\beta)\Rightarrow I^{n+1}\alpha\beta]$[21] (aksjomaty dla poziomu n>0).

2. Aksjomaty identyczności.

2a. Jeśli α jest zmienną poziomu 0, to $\wedge\alpha I\alpha\alpha$.

2b. Jeśli α jest zmienną poziomu $n>0$, to $A\alpha I^n\alpha\alpha$.

2c. Niech α i β będą zmiennymi rzędu n, zaś φ i ψ formułami, w których ani α, ani β nie jest związana. Niech φ różni się od ψ co najwyżej tym, że zmienne α i β występują w nich zamiennie. Wówczas uniwersalne domknięcie formuły:

$I^n\alpha\beta \Rightarrow (\varphi\Leftrightarrow\psi)$

jest aksjomatem identyczności.[22]

---

[20] Jest to zrozumiałe: (możliwe) zdania rzędu (n+1) odnoszą się do (możliwych) zdań rzędu n. Ważne jest zatem to, co o wszystkich możliwych zdaniach rzędu n można powiedzieć we wszystkich możliwych językach (za pomocą zdań wyższych rzędów). Wyróżnione jest zatem jedynie przejście z poziomu obiektów na poziom zdań pierwszego rzędu.

[21] W aksjomacie dla poziomu 0, α i β to zmienne poziomu 1, zaś γ — zmienna poziomu 0 (reprezentują one zdania), przy czym zmienna γ jest reprezentowana w r z e c z y w i s t y m świecie zmienne α i β — w możliwych. Identyczność zdań α i β polegać ma zatem na tym, że są one spełnione przez dokładnie te same zdania poziomu 0 (reprezentowane przez γ). W aksjomacie dla poziomu $n > 0$ sytuacja jest analogiczna. Zmienne α, β są z poziomu n+1, zmienna γ — z poziomu n.

[22] Idea jest prosta: można zastąpić zmienną identyczną zmienną, otrzymując w efekcie formułę równoważną wyjściowej.

3. Aksjomaty abstrakcji.

Jeśli α i β są zmiennymi poziomu n i $n+1$ ($n>0$), zaś φ zawiera α jako zmienną wolną, ale nie zawiera β, to uniwersalne domknięcie formuły

$C\beta A\alpha(S^{n}\alpha\beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha))$

jest aksjomatem abstrakcji.[23]

4. Hipoteza nieskończoności.

$$\neg(C\alpha^{2})[Nn(\alpha^{2}) \wedge (C\beta^{1})(S^{l}\beta^{1}\alpha^{2} \wedge \Lambda\gamma S\gamma\beta^{1})],$$

gdzie *Nn* jest skrótem dla formuły definiującej własność trzeciego rzędu „bycia liczbą naturalną (czyli pewną własnością drugiego rzędu)". Hipoteza ta stwierdza, że jest nieskończenie wiele obiektów poziomu 0.[24]

Ct jest metateorią dla możliwych języków. W ramach *Ct* aksjomatycznie zadane są pewne strukturalne warunki nakładane na relację spełniania (w ten sposób relacja spełniania staje się pojęciem pierwotnym teorii *Ct*). Jednakże — co podkreśla Chihara — *Ct* można również zastosować bezpośrednio, jako narzędzie. Rzeczywiście, Chihara dokonuje w ramach swojej teorii odpowiedniej rekonstrukcji pewnych fragmentów matematyki. W ten sposób stara się uzasadnić tezę, iż jego teoria jest wystarczająca do zrekonstruowania instrumentarium matematycznego niezbędnego z punktu widzenia zastosowań. Podając stosowną rekonstrukcję, Chihara stara się w ten sposób odeprzeć argument Putnama, w myśl którego cechą wszystkich teorii fizycznych jest odwoływanie się do obiektów matematycznych [Chihara 1990, 117—119].

Na czym ma polegać «ontologiczny zysk»? Chihara — porównując swój system z systemem Fregego — wskazuje następujące różnice:

(a) Prawdziwość tez dotyczących mocy nie wymaga założenia istnienia obiektów (typu: zbiór czy pojęcie w sensie Fregego), którym przypisujemy cechy kombinatoryczne.

(b) W ujęciu Fregego zdanie typu „Na stole jest 5 jabłek" należy interpretować jako: „Pojęciu *bycia jabłkiem na stole* przysługuje własność (drugiego rzędu) posiadania 5-elementowej ekstensji". W ujęciu Chihary natomiast znaczy ono tylko tyle, że można skonstruować odpowiedni «atrybut liczności» stosujący się do odpowiednich zdań otwartych [Chihara 1990, 92]. Dzięki temu nie trzeba zakładać istnienia takich

---

[23] Idea jest następująca: jeśli φ jest formułą (z języka *Lt*), to można skonstruować takie zdanie β_0, które jest prawdziwe d o k ł a d n i e o tych zdaniach n-tego rzędu, o których jest prawdziwe φ (czyli: metajęzykowym formułom φ odpowiadają obiekty językowe). Ten aksjomat abstrakcji jest analogonem teoriomnogościowego aksjomatu wyróżniania (istnienia zbiorów): dla dowolnej formuły φ prawdą jest: $\Lambda x \vee y \Lambda z(z \in y \Leftrightarrow \varphi(z) \wedge z \in x)$. Oczywiście twierdzenie o tym, że można skonstruować zdanie β_0 o odpowiednich własnościach, należy rozumieć w «niekonstruktywny» sposób.

[24] Chihara zaznacza, że jest to jedynie hipoteza — przy pewnych zastosowaniach może być istotna, przy innych nie [Chihara 1990, 71].

obiektów, jak pojęcia; wystarczy założenie o możliwości skonstruowania odpowiedniego zdania otwartego.

(c) Teoria przestrzeni logicznej zdań otwartych zastępuje zatem teorię obiektów abstrakcyjnych [Chihara 1990, 94]. W teorii tej można zrekonstruować techniki potrzebne w zastosowaniach, nie postulując jednocześnie istnienia abstrakcyjnych obiektów.

3.3.1. Teoria liczb i kombinatoryka skończona

Zasadnicza idea jest taka, aby zamiast o obiektach, pojęciach (zbiorach), pojęciach (zbiorach) wyższych rzędów *etc.*, mówić o konstruowalnych zdaniach otwartych. Jest to zatem rekonstrukcja arytmetyki, ale bez obiektów takich, jak liczby naturalne. Zamiast nich są „skończone atrybuty liczności" (*finite cardinality attributes*). Nie ma potrzeby, aby postulować dodatkowo istnienie obiektów będących semantycznymi korelatami tych atrybutów [Chihara 1990, 84]. Chihara konstruuje zatem zdania, które mają imitować podstawowe pojęcia takie, jak:

— para,
— para uporządkowana,
— relacja,
— relacja 1—1,
— równoliczność,
— „atrybuty liczności" (*cardinality attributes*),
— poprzednik,
— następnik,
— moc skończona,
— dodawanie *etc.*

Następnie podaje przykłady, w jaki sposób w jego teorii *explicite* wyrazić (i udowodnić) proste fakty arytmetyczne. Nie jest to jednak — według Chihary — typowa sytuacja. W myśl jego koncepcji — jak pamiętamy — nie jest bowiem istotne, czy zdania, wyrażające pewne pojęcia (fakty, treści *etc.*), dają się f a k t y c z n i e skonstruować, ani nawet, czy znana jest jakaś reguła tworzenia takich napisów. Chihara przyznaje, że nie jest w stanie napisać zdania stwierdzającego równoliczność zbioru potęgowego liczb naturalnych i zbioru liczb rzeczywistych — z podanej przez niego metody konstrukcji wynika bowiem, że dla wyrażenia tego faktu konieczne jest skonstruowanie nieprzeliczalnej liczby odpowiednich zdań. Jednakże Chihara wyjaśnia to w ten sposób, że dopuszcza po prostu istnienie nieprzeliczalnie wielu możliwych światów — nie jest bowiem konieczne, aby wszystkie potrzebne tu zdania otwarte były sformułowane w j e d n y m możliwym świecie. Wówczas każdy z tych możliwych światów zawierać może tylko skończenie wiele zdań. Pojęcie *możliwego języka* u Chihary jest zatem znacznie silniejsze niż pojęcie *potencjalnej nieskończoności*.

3.3.2. Teoria wielkości mierzalnych

Chihara podaje także rekonstrukcję fragmentu analizy rzeczywistej — aby „zastąpić mówienie o liczbach mówieniem o zdaniach otwartych" [Chihara 1990, 95]. Opisana rekonstrukcja par, relacji *etc.* wystarcza do odtworzenia „dowolnej teorii matematycznej, jaka może być potrzebna w naukach empirycznych — lata matematycznych i logicznych badań po publikacji *Principia Mathematica* dostarczają przekonywających dowodów tego faktu" [Chihara 1990, 95].

Bezpośrednia rekonstrukcja fragmentu analizy rzeczywistej „ma wyjaśnić, w jaki sposób matematyczne reprezentacje zjawisk fizycznych są związane z rzeczami, z jakimi mamy do czynienia w świecie fizycznym" [Chihara 1990, 95]. W szczególności, rekonstrukcja Chihary ma umożliwić sformułowanie zadowalającej teorii pomiaru. Celem jest pokazanie, że „nie jest konieczna wiara w istnienie długości, aby móc mówić o długościach i konstruować teorie, w których mówimy o długościach w zasadzie w zwykły sposób. Idea polega na tym, aby pokazać, w jaki sposób mówienie o długościach obiektów można traktować jako mówienie o obiektach, którym przypisuje się długość" [Chihara 1990, 106].

System Chihary opiera się na kilku predykatach pierwotnych: G, E, P („dłuższy-niż", „tej-samej-długości-co" oraz „jest-częścią"). Znaczenie tych predykatów opisane jest za pomocą intuicyjnie oczywistych aksjomatów.[25] Następnie Chihara definiuje kolejne predykaty — takie, jak „bycie rozłącznym" czy „bycie sumą mereologiczną" — i dowodzi podstawowych twierdzeń dotyczących tych predykatów. Dzięki temu fakty dotyczące wielkości mierzalnych można wyrazić bez odwołań do obiektów abstrakcyjnych: na przykład w realistycznym ujęciu fakt, iż długość przedmiotu *a* wynosi 0,576 długości przedmiotu *b*, wyraża się faktem, że istnieje funkcja *DŁUGOŚĆ*: obiekty $\rightarrow$ liczby rzeczywiste, i że *DŁUGOŚĆ*(*a*) = 0,576 *DŁUGOŚĆ*(*b*).

[25] Są to następujące aksjomaty (zachowuję tu numerację Chihary) [Chihara 1990, 99—100]:

A1. Niezwrotność *G*: $\bigwedge x \neg xGx$.

A2. Przechodniość *G*: $\bigwedge x,y,z\ (xGy \wedge yGz \Rightarrow xGz)$.

A3. Zwrotność *E*: $\bigwedge x\ xEx$.

A4. Symetryczność *E*: $\bigwedge x,y\ (xEy \Rightarrow yEx)$.

A5. Przechodniość *E*: $\bigwedge x,y,z\ (xEy \wedge yEz \Rightarrow xEz)$.

A6. Zastępowanie: $\bigwedge x,y,z\ (xGy \wedge yEz \Rightarrow xGz)$.

A7. Zastępowanie: $\bigwedge x,y,z\ (xGy \wedge xEz \Rightarrow zGy)$.

A8. Porównywalność: $\bigwedge x,y\ (xGy \vee xEy \vee yGx)$.

B1. Zwrotność *P*: $\bigwedge x\ xPx$.

B2. Antysymetryczność *P*: $\bigwedge x,y\ (xPy \wedge yPx \Rightarrow x=y)$.

B3. Przechodność *P*: $\bigwedge x,y,z\ (xPy \wedge yPz \Rightarrow xPz)$.

C1. $\bigwedge x,y,x,w\ \{[xEy \wedge zEw \wedge xDz \wedge yDw] \Rightarrow (x+z)E(y+w)\}$, gdzie xDy znaczy, iż x jest mereologicznie rozłączne z y, zaś $x+y$ oznacza mereologiczną sumę x oraz y.

C2. $\bigwedge x,y\ \{xGy \Leftrightarrow \bigvee z,w[zDw \wedge x=(z+w) \wedge z \in y]\}$.

D1. Aksjomat równego podziału (*Equi-Partition Axiom*), który głosi, że dla dowolnego obiektu *x* i dowolnego skończonego atrybutu liczności *N*, istnieje własność *F*, taka, że obiekt *x* można podzielić na *N* części, które mają własność *F*.

W ujęciu Chihary mamy zdanie otwarte E[0,576] i wyżej wymieniony fakt wyrażony jest jako *a*E[0,576]*b*. Oczywiście predykat E[0,576] odnosi się nie do liczb, funkcji czy długości (ich istnienie Chihara odrzuca), lecz do obiektów, o których mówimy w kategoriach posiadania długości.

W swej rekonstrukcji Chihara opiera się na „aksjomacie równego podziału" (*equi-partition axiom*), który wyraża fakt, iż każdy obiekt jest podzielny na *n* części (dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$). To umożliwia mówienie o całkowitych wielokrotnościach długości. Następnie — imitując standardową konstrukcję liczb wymiernych — wprowadzone są zdania otwarte, które wyrażają fakt, iż stosunek długości między dwoma obiektami jest liczbą wymierną (nazwiemy je zdaniami typu *długość-jest-liczbą-wymierną*).

Zdania wyrażające fakt, iż stosunki długości wyrażają się liczbami rzeczywistymi, konstruowane są przez analogię do konstrukcji liczb rzeczywistych metodą przekrojów Dedekinda i zdefiniowane są w sposób następujący [Chihara 1990, 112]:

Zdanie *R* jest zdaniem typu *długość-jest-liczbą-rzeczywistą* (*real-length open sentence*), zawsze i tylko wtedy, gdy:

(a) dla każdych dwóch zdań *H* i *F* typu *długość-jest-liczbą-wymierną*, jeśli *F* spełnia *R* i *F* jest większe od *H* (w sensie zdefiniowanej uprzednio relacji większości), to *H* spełnia *R*;

(b) nie jest możliwe skonstruowanie zdania typu *długość-jest-liczbą-wymierną F*, które spełniałoby *R*, oraz które miałoby taką własność, iż wszystkie zdania typu *długość-jest-liczbą-wymierną* spełniające *R* są nie większe niż *F*;

(c) jest możliwe skonstruowanie zdania *F* typu *długość-jest-liczbą-wymierną*, które spełnia *R*, oraz zdania *H* typu *długość-jest-liczbą-wymierną*, które nie spełnia *R*.

Ogół zdań typu *długość-jest-liczbą-rzeczywistą* dzieli się na klasy abstrakcji relacji koekstensjonalności (w sensie relacji *I*). Można następnie udowodnić ciągłość zbioru tych klas abstrakcji (tj. każdy zbiór zdań, który ma ograniczenie górne ma *supremum*) — podobnie jak to się dzieje w wypadku standardowej konstrukcji Dedekinda.

Zdań typu *długość-jest-liczbą-rzeczywistą* jest tyle, ile jest liczb rzeczywistych — każdej liczbie rzeczywistej odpowiada bowiem takie zdanie. Jest to ilustracją faktu, że teoria Chihary nie jest teorią konstruktywną. Nie da się bowiem *explicite* skonstruować zdania *długość-wynosi-r* dla każdej liczby rzeczywistej $r \in \mathbb{R}$. Chihara jednak twierdzi, iż takie zdanie jest możliwe do skonstruowania. Co znaczy więc, iż jest ono możliwe do skonstruowania? Znaczy tylko tyle, że „w logicznej przestrzeni zdań jest dostatecznie dużo miejsca, aby takie zdanie skonstruować". Zamiast mówić o abstrakcyjnym *continuum*, Chihara mówi o *continuum* możliwych zdań.

Procedurę Chihary można kontynuować. Nazwijmy zdaniem typu *jest-podzbiorem-*$\mathbb{R}$ dowolne zdanie α, które jest spełnione przez pewną ilość zdań typu *długość-jest-liczbą-rzeczywistą*. Oczywiście klas abstrakcji (relacji koekstensjonalności) takich zdań jest tyle, ile jest podzbiorów $\mathbb{R}$. Dalej można wprowadzać zdania imitujące wszelkie dalsze konstrukcje matematyczne (zdanie typu *jest-funkcją-zmiennej-rze-*

czywistej, zdanie typu *jest-funkcją-gładką, jest-przestrzenią-funkcyjną etc.*). Zamiast obiektu matematycznego będziemy mieć «w miejsce» tego obiektu możliwe zdanie. Nie znamy sposobu jego konstrukcji, mamy jedynie niekonstruktywny dowód możliwości konstrukcji, przy czym dowód ten jest faktycznie przeformułowaniem klasycznego dowodu matematycznego (z dodaniem zastrzeżenia, że nie dowodzimy istnienia obiektu, tylko możliwości skonstruowania odpowiedniego zdania).

W tym momencie staje się widoczne, iż zabieg Chihary jest nadużyciem. Według Chihary mówienie o istnieniu wypowiedzi jest jedynie *façon de parler*. Jednakże równie uprawnione jest stwierdzenie odwrotne, a mianowicie, że mówienie o możliwości skonstruowania tych zdań (zamiast o istnieniu obiektów matematycznych) jest tylko *façon de parler*. Mówienie o całej hierarchii możliwych zdań jest jedynie innym wysłowieniem wypowiedzi o hierarchii obiektów matematycznych.[26]

4. Zarzuty dotyczące teorii Chihary

(4.1) Chihara twierdzi, że jego teoria jest teorią czysto logiczną. Obiekty matematyczne w ujęciu Chihary zastępowane są konstruktami logicznymi. Teoria Chihary opiera się jednak na pewnych założeniach, których nie można uznać za czysto logiczne. Przyjmuje bowiem aksjomaty wyróżniania, ekstensjonalności i nieskończoności, a są one przecież motywowane teoriomnogościowo.[27] Aksjomat wyróżniania to przeformułowany aksjomat istnienia zbiorów. Aksjomat ekstensjonalności jest w wypadku własności co najmniej dyskusyjny — a przecież obiekty językowe miałyby odpowiadać raczej własnościom (atrybutom) niż zbiorom. Również aksjomat identyczności jest w wypadku własności nieoczywisty, uzależniony jest bowiem od przyjętych kryteriów identyczności dla własności.

Podkreślić należy, że aksjomaty te są niezbędne dla sformułowania teorii Chihary. Brak jest bowiem preteoretycznej intuicji, która umożliwiłaby nam wniknięcie w metalogiczną strukturę teorii Chihary bez odwoływania się do technik matematycznych (opinię taką wyraża np. McCarty w [McCarty 1993, 260]). Aby wyeliminować zobowiązania ontologiczne matematyki klasycznej Chihara formułuje pewną teorię, w której jednak *de facto* odwołuje się do matematyki klasycznej — wiedza metalogiczna (dotycząca modeli, czy interpretacji dla teorii) jest bowiem w istocie fragmentem wiedzy matematycznej. Własności metalogiczne wielu logik jawnie zależą od założeń teoriomnogościowych.[28] Tak jest też w wypadku teorii Chihary, dla sformułowania której niezbędne są założenia natury pozalogicznej.

---

[26] Rozwinięcie tego zagadnienia wykracza poza ramy niniejszego artykułu.

[27] Nasuwa się tu analogia z teorią Russella, który nie był w stanie całkowicie wyeliminować aksjomatów pozalogicznych — aksjomatu ekstensjonalności, abstrakcji i nieskończoności — w swej próbie logicystycznej rekonstrukcji matematyki.

[28] Oczywistym przykładem jest zwartość logiki pierwszego rzędu, która zależy od przyjęcia w metateorii pewnika wyboru; tautologiczność pewnych formuł w logice drugiego rzędu zależy od

Chihara na dwa sposoby odpiera zarzuty dotyczące odwołania się w jego koncepcji do wiedzy matematycznej.

(4.1.1) Kwantyfikator konstruowalności można uważać za termin pierwotny systemu, zaś semantykę możliwych światów — za chwyt heurystyczno-dydaktyczny (zob. [Chihara 1990, 25 i 38]). Mówienie o możliwych światach nie jest mówieniem o obiektach. Chihara eliminuje zatem ontologię swej teorii, ale nie pozbawia jej semantyki. Pojęcie prawdziwości zdań zadane jest jednak nie w języku relacji zdań z pozajęzykową rzeczywistością, ale poprzez pojęcia modalne, odnoszące się do logicznej możliwości wykonania pewnych konstrukcji językowych, pozbawionych przedmiotowego odniesienia.

„Akt modalnego zniknięcia" (tak zabieg Chihary określa McCarty w [McCarty 1993]) odbywa się zatem na poziomie języka. Według Chihary przedmiotem badań matematyki są możliwe wypowiedzi, zaś warunki prawdziwości zdań matematycznych można sformułować właśnie w języku możliwych wypowiedzi. Czy jednak — po przyjęciu tego założenia — dalsza analiza nie będzie wyważaniem otwartych drzwi? Przyjęcie tezy, że badania nad prawdziwością zdań matematyki można prowadzić wyłącznie na poziomie języka, opiera się na uprzednim odrzuceniu tezy realizmu.

Argument, iż semantyka pełni jedynie rolę chwytu heurystycznego, można zastosować do każdej semantyki. Chihara nie wskazuje żadnej specyficznej własności semantyki możliwych światów, która powodowałaby, iż tę właśnie semantykę — w odróżnieniu od innych semantyk — można uznać za chwyt heurystyczny. Gdyby więc zaakceptować sposób rozumowania Chihary, to zasadne byłoby uznanie za słuszny następującego argumentu na rzecz wszelkiego rodzaju antyrealizmu: wszelkie pojęcia dowolnego języka J uznajemy za pierwotne, «heurystycznie wyjaśnialne» w ramach pewnej semantyki, traktowanej jednak jedynie jako chwyt dydaktyczno-heurystyczny. Tym samym wypowiedzi języka J można uznać za pozbawione semantycznych korelatów. Teoria konstruowalności Chihary nie jest tu wyróżniona, tym samym argument Chihary należy uznać za argument ogólny, co z kolei prowadzi do zbyt daleko idących wniosków.

Konsekwentnie, stosując argumentację Chihary należałoby też stwierdzić, że teoria mnogości ZFC dotyczy jedynie liczb naturalnych: składnię ZFC można zakodować w liczbach naturalnych i opisać to kodowanie w arytmetyce Peana (albo w teorii zbiorów dziedzicznie skończonych — wtedy stwierdzilibyśmy, że ZFC dotyczy jedynie zbiorów dziedzicznie skończonych). W tym ujęciu, twierdzenia teorii mnogości (np.: „Istnieje liczba kardynalna — taka, że....") interpretowalibyśmy jako twierdzenia o numerach Gödlowskich zdań i dowodów ZFC („Liczba n jest numerem

---

przyjęcia ich odpowiedników w metateorii (pewnik wyboru, hipoteza *continuum etc.*). Można podać także bardziej «egzotyczne» przykłady dotyczące semantycznych własności logik nieelementarnych (por. [Ebbinghaus 1985]).

Gödlowskim dowodu zdania o numerze *m*").[29] Mówienie o modelach dla ZFC należałoby traktować jako zabieg heurystyczny — ułatwiający mówienie o twierdzeniach, o niezależności *etc.* Nie byłoby nawet konieczne zakładanie istnienia liczb — odpowiednie numery Gödlowskie traktowalibyśmy jako możliwe do skonstruowania wypowiedzi w języku arytmetyki (*resp.* w ramach teorii zbiorów dziedzicznie skończonych). Ale skoro tak, to czy nie moglibyśmy wyeliminować po prostu semantyki w matematyce klasycznej, argumentując, że odwołania do obiektów matematycznych stanowią jedynie chwyt heurystyczny? Niepotrzebne staje się wówczas formułowanie teorii dotyczących konstruowalności zdań.

(4.1.2) Chihara wskazuje na fakt, że w jego teorii konstruowalności można rozwijać teorię modeli dla niej samej (zob. [Chihara 1990, 78—79]). Nie niesie to za sobą — według niego — konieczności uznania istnienia modeli; można bowiem traktować teorię modeli czysto syntaktycznie, nie postulując dla niej semantyki. Według Chihary, taka sama sytuacja występuje w wypadku teorii mnogości — badacz rozwija teorię modeli dla teorii mnogości wewnątrz teorii mnogości. Wiedzę metateoretyczną na temat swojej teorii zdobywa zatem wewnątrz swojej teorii. W ten sposób Chihara odpiera zarzut, iż w metateorii odwołuje się do obiektów takich, jak zbiory. Skoro bowiem badania semantyczne teorii T mogą być rozwijane w niej samej, to Chihara wysuwa stąd wniosek, że nie musi zatem zakładać istnienia obiektów, o których mowa w zastosowanej metateorii, aby korzystać z wyników analizy semantycznej.

Chihara nie precyzuje tego argumentu, jednak rozumowanie na nim oparte ma faktycznie następującą strukturę:

(i) Mamy teorię T, chcemy udowodnić φ.

(ii) W ramach metateorii T_m dowodzimy — odwołując się do istnienia modeli dla T — iż zachodzi pewien metateoretyczny fakt τ o charakterze semantycznym (jako przykład rozważmy twierdzenie o pełności dla teorii T).

(iii) W T_m dowodzimy, że T implikuje semantycznie φ.

(iv) Z (ii) oraz (iii) wnioskujemy, że T dowodzi φ (tu wykorzystujemy twierdzenie o pełności).

(v) A zatem φ.

Pojawia się pytanie: Do jakich faktów odwołaliśmy się, aby udowodnić φ?

Odpowiedź realisty:

(vi) Odwołaliśmy się do faktu, że teoria T posiada modele. Albowiem aby udowodnić φ, wykorzystaliśmy fakty dotyczące wynikania semantycznego. Zatem aby udowodnić φ, założyliśmy istnienie obiektów, o których mowa w metateorii T_m.

Odpowiedź antyrealisty:

(vi)' Jeśli teorię T_m można interpretować wewnątrz T, to tym samym istnieje wewnętrzny odpowiednik twierdzenia o pełności (jeśli τ jest twierdzeniem o pełności

[29] Podobny argument przytacza McCarty w [McCarty 1993].

w T_m, to [τ] będzie jego odpowiednikiem w T). Mamy więc sytuację, w której T_m dowodzi τ, oraz T dowodzi [τ]. Skoro jednak [τ] jest twierdzeniem T, to znaczy, że odwołując się do twierdzenia o pełności, nie zakładamy istnienia modeli dla T — po prostu dla udowodnienia φ wykorzystujemy [τ], które da się udowodnić w e w n ą t r z T. Ostatecznie więc dla udowodnienia φ nie jest konieczne założenie istnienia interpretacji dla T.

Widoczne są następujące trudności takiego argumentu antyrealistycznego:

(4.1.2.1) Nie jest wcale jasne, czy [τ] jest tym samym, co τ: [τ] jest odpowiednikiem τ wewnątrz T, ale nie wynika stąd, iż ma tę samą treść, co τ. Widoczne jest to np. w wypadku interpretowania pewnych zdań metateoretycznych dotyczących PA wewnątrz PA. Wewnątrz PA można zakodować (w sposób efektywny) zdania dotyczące składni PA. Wiadomo, że zdanie Con(PA) (arytmetyka jest niesprzeczna) nie da się udowodnić w PA. A więc istnieje (niestandardowy) model **M** dla PA+¬Con(PA). W tym modelu dla arytmetyki PA prawdziwe jest zdanie „Arytmetyka PA jest sprzeczna". Czy znaczy to jednak, że arytmetyka r z e c z y w i ś c i e jest sprzeczna? Oczywiście nie — znaczy jedynie, że «z punktu widzenia modelu **M**» istnieją pewne obiekty, które model **M** «postrzega» jako dowód sprzeczności dla pewnego zdania, «postrzeganego» przez **M** jako zdanie „Arytmetyka jest sprzeczna" (oczywiście dowody te będą niestandardowe). Zdanie [Con(PA)] ma więc inną treść niż zdanie Con(PA). Wewnętrzne twierdzenie o pełności nie głosi zatem, że w ramach T dowodliwe są dokładnie te formuły, które są prawdziwe we wszystkich modelach dla T, ale jedynie, że „dowolny model **M** dla T, który «patrzy» na interpretację T wewnątrz T, widzi, że dokładnie te **M**-zdania języka J są **M**-dowodliwe, które są **M**-prawdziwe we wszystkich **M**-modelach".

Wewnątrz PA można udowodnić arytmetyczne twierdzenie o pełności.[30] Głosi ono, swobodnie mówiąc, iż mieszkaniec modelu **M** dla arytmetyki PA, w którym prawdziwe jest zdanie Con(T), «widzi» wewnątrz swojego modelu **M** model **U** dla teorii T. Czy fakt ten jest identyczny z faktem, że istnieje model dla T? Innymi słowy, czy arytmetyczne twierdzenie o pełności (czyli twierdzenie o pełności z arytmetyką PA «w tle») jest identyczne treściowo ze zwykłym twierdzeniem o pełności? Podobne pytanie można postawić w wypadku teorii Chihary. Jednak taką identyczność trzeba założyć, aby utrzymać jego argument.[31]

---

[30] Twierdzenie to głosi, że dla każdej pierwotnie rekurencyjnej teorii T, sformułowanej w skończonym języku, istnieje układ formuł arytmetycznych, które w każdym modelu **M** dla arytmetyki PA, w którym prawdziwe jest zdanie Con(T) (czyli „T jest niesprzeczna"), definiują model **U** dla T (por. [Adamowicz, Zbierski 1991]).

[31] Nie twierdzę tutaj, że są to dwa różne twierdzenia. Samo pojęcie „treści twierdzenia" nie jest pojęciem formalnym, tym samym argument ten nie jest do końca precyzyjny. Chodzi jednak o zasygnalizowanie faktu, że wewnątrzteoretyczne odpowiedniki metateoretycznych twierdzeń mogą mieć inny charakter niż wyjściowe metateoretyczne twierdzenia. Chihara ignoruje to zagadnienie.

(4.1.2.2) Wewnątrz PA można syntaktycznie zdefiniować składnię ZFC (oraz udowodnić pewne twierdzenia, np. arytmetyczną wersję twierdzenia o pełności). Czy takie «arytmetyczne ZFC» jest tym samym co ZFC? Czy — wobec faktu, iż ZFC można zdefiniować wewnątrz PA — należy uznać, iż ZFC jest teorią niezintepretowaną i jedynie PA posiada interpretacje (a niektóre z modeli **M** dla PA mają taką strukturę, że wewnątrz **M** są obiekty, które «z punktu widzenia **M**» są modelami dla ZFC)?

(4.1.2.3) Rozważmy pewną modyfikację argumentu Chihary. Przypuśćmy, że daną teorię T_0 można wzmocnić, dodając dodatkowe aksjomaty (być może w odpowiednio wbogaconym języku) i otrzymać teorię T_1 o tej własności, że wewnątrz T_1 daje się interpretować metateoria dla T_1. Wówczas — zgodnie z argumentem Chihary — T_1 można uznać za teorię niezintepretowaną. Albowiem aby opisać T_1 (i wykorzystać metateoretyczne wyniki), nie jest konieczne zakładanie ontologii dla metateorii T_m, gdyż T_m (zgodnie z założeniem) daje się interpretować wewnątrz T_1 i metateoretyczne fakty mają swoje odpowiedniki w T_1. Jednakże metateoria dla T_1 jest też metateorią dla T_0. Tym samym należy uznać, że dla d o w o l n e j teorii T_0 dopuszczalne jest posługiwanie się wynikami semantycznymi, bez konieczności uznania, iż posługiwanie się tymi wynikami zobowiązuje nas do uznania istnienia modeli dla T_0. Te wyniki bowiem są wynikami dowodzonymi w T_m, którą — na mocy cytowanego argumentu — uznaliśmy za teorię niezintepretowaną.[32]

(**4.2**) Chihara opiera swoją teorię na pojęciach modalnych. Według niego stosowanie pojęć modalnych nie niesie ze sobą żadnych trudności dotyczących ontologii. Possybilia nie istnieją, ale można o nich mówić i je analizować, na nich opierać wyjaśnienia statusu ontologicznego obiektów, o których mowa jest w matematyce, i roli matematyki w nauce i poznawaniu rzeczywistości.

Argumentacja Chihary na rzecz takiej tezy opiera się jedynie na pewnych analogiach. Według niego fakt, iż możliwe jest skonstruowanie zdania otwartego, nie niesie ze sobą zobowiązań egzystencjalnych dotyczących istnienia obiektu, o którym to zdanie mówi, podobnie jak zdanie, że można zbudować dom o danych parametrach, nie znaczy wcale, że taki dom istnieje (zob. [1990, 39]).

Chihara, odwołując się do tej analogii, przypisuje realiście następującą argumentację na rzecz realizmu: można opisać obiekt matematyczny, a więc obiekt ten istnieje. Chihara zakłada więc, iż kryterium istnienia domu i kryterium istnienia obiektu matematycznego powinno być takie samo. Przy tym założeniu formułuje swoją analogię i dochodzi do wniosku, że — podobnie jak w wypadku domu, gdzie z istnienia opisu domu nie wynika istnienie domu — z istnienia opisu obiektu matematycznego nie wynika istnienie tego obiektu.

---

[32] Argument ten, w nieco żartobliwej postaci można podsumować następująco: „Po przekroczeniu masy krytycznej ontologia teorii znika".

Argumentacja Chihary może być jednak skuteczna co najwyżej w kontekście dyskusji na temat tego konkretnego argumentu na rzecz realizmu (czyli argumentu opierającego się na uznaniu możliwości opisania obiektu matematycznego za wystarczający warunek istnienia tego obiektu). Nie dotyczy natomiast argumentu na rzecz realizmu, w którym odwołujemy się do roli matematyki w naukowym opisie świata, ani argumentacji opartej na kwantyfikatorowym kryterium istnienia.

Co więcej, o ile jest dość jasne, co znaczy, że można sformułować opis domu, o tyle nie jest równie oczywiste, jak należy interpretować wypowiedź „Możliwe jest opisanie obiektu matematycznego typu φ". Czy znaczy to, że potrafimy podać efektywną konstrukcję? Czy znaczy to, że zdanie „$\bigvee x\varphi(x)$" jest niesprzeczne z daną teorią T? Ale co wtedy znaczy, że istnieje obiekt typu φ? Jaki jest związek pomiędzy możliwością opisania obiektu a jego istnieniem? Wszak w wypadku teorii matematycznych mamy do czynienia z interpretacjami (modelami); dopiero relatywnie do danego modelu dla T można mówić o tym, że istnieje tam obiekt typu φ — obiekt taki nie może być przecież «zawieszony» poza modelami dla T. Jeśli zatem uznamy istnienie modeli dla T, to jest to równoznaczne z tym, że (w niektórych) modelach **M** jest obiekt a taki, że **M** spełnia $\varphi(a)$. Konsekwentnie, nieistnienie takiego obiektu jest równoznaczne z nieistnieniem modelu **M** dla T. Twierdzenie „Możliwość opisania obiektu typu φ nie pociąga za sobą jego istnienia" jest więc uzasadniane *de facto* przez przyjęcie założenia, że teorie matematyczne są pozbawione interpretacji. Ale wtedy powoływanie się na rzekomą analogię z domem jest zbędne.[33]

(4.3) Argumentację Chihary dotyczącą obiektów abstrakcyjnych oraz możliwych światów, o których myślimy wyłącznie w kategoriach narzędzi heurystycznych, można rozszerzyć także na obszerniejszą klasę obiektów. W podobny sposób można myśleć także o obiektach teoretycznych, traktując je wyłącznie jako użyteczne narzędzie heurystyczne. Argumentacja Chihary faktycznie przebiega w sposób następujący. Załóżmy, że nie ma obiektów abstrakcyjnych. Mimo to można uprawiać naukę i bez założenia o istnieniu abstraktów tworzyć narzędzia matematyczne potrzebne w naukach przyrodniczych. Podobną procedurę można oczywiście powtórzyć w wypadku obiektów teoretycznych — a mówienie o obiektach teoretycznych potraktować w instrumentalistycznym duchu (mamy wówczas «za darmo» argument na rzecz instrumentalizmu). Idąc krok dalej, można podobny manewr wykonać w wypadku przedmiotów obserwowalnych, redukując wypowiedzi o nich do możliwych zdań o wiązkach wrażeń. Gdzie należy przerwać ten ciąg eliminacji? Sam fakt, iż możliwe jest przeformułowanie teorii w odpowiedni sposób, nie implikuje nieistnienia obiektów

[33] Rozumowanie ma analogiczną postać także wtedy, gdybyśmy uznali, że twierdzenie „Możliwe jest na gruncie T opisanie obiektu typu φ" znaczy to samo, co „T dowodzi „$\bigvee x\varphi(x)$"". Także w takim wypadku teza o nieistnieniu obiektu typu φ jest równoznaczna z tezą o nieistnieniu interpretacji dla T.

takiego czy innego typu — tymczasem taka teza *implicite* wynika z argumentacji Chihary.[34]

(4.4) Jak wyjaśnić stosowalność matematyki, jeśli matematyka odnosi się jedynie do możliwych konstrukcji językowych? Sam fakt, że w teorii konstruowalności Chihary można sformułować i udowodnić odpowiedniki wielu klasycznych twierdzeń matematycznych dotyczących np. analizy rzeczywistej, nie stanowi wyjaśnienia. Filozoficznie istotne w kontekście tego zagadnienia nie jest to, jakie twierdzenia są dowodliwe w jakich formalizmach (jest to pewien problem z zakresu teorii dowodu, czyli syntaktycznego fragmentu metateorii), ale jaką tym faktom nadajemy interpretację. Wszak formalista dowodzi tych samych twierdzeń teoriomnogościowych co platonik. Nie potrafi jednak wyjaśnić, dlaczego własności pewnych niezinterpretowanych układów znaczków pozwalają nam na zdobycie wiedzy o świecie (np. analiza funkcjonalna lepiej nadaje się do opisu zjawisk kwantowych niż zapisy partii brydża).[35] Chihara jest świadomy tej trudności, dlatego twierdzi, że zdania matematyki są prawdziwe, choć nie odnoszą się do obiektów abstrakcyjnych, ale do pewnych (możliwych) obiektów językowych. Tym samym stara się uniknąć trudności stanowiska skrajnego formalizmu, czy kapitulacji przed problemem w stylu Wignera.[36] Chihara mówi więc, iż zdania matematyki odnoszą się do możliwych układów znaków (przy czym jest to pojęcie szeroko rozumiane), a więc zdania matematyczne można rozpatrywać w kategorii prawdziwości, co umożliwia wyjaśnienie stosowalności matematyki.

Dlaczego jednak fakt, że w języku możemy przeprowadzić pewne konstrukcje językowe, miałby mieć implikacje dla naszej wiedzy dotyczącej rzeczywistości fizycznej? Jeśli negujemy fakt, że język ten posiada pozajęzykowe odniesienie przedmiotowe, to trudności, jakie się tu pojawiają, są nie mniejsze niż trudności klasycznego platonizmu (w stylu Gödla) czy innych form realizmu (strukturalizmu lub realizmu Quine'a). Wspólne dla tych stanowisk jest przekonanie, że matematyka posiada pozajęzykowe odniesienie przedmiotowe, zaś pojęcie prawdziwości zdań jest pochodne w stosunku do pewnych relacji między obiektami językowymi a pozajęzykowymi. Istnienie tego pozajęzykowego odniesienia pozwala na wyjaśnienie, w jaki sposób

[34] Syntaktyczną metodę eliminacji zbędnych terminów podał Craig (por. [Craig 1956]). Jednakże z samego faktu, że pewne terminy można wyeliminować, nie wynika, iż można pozbyć się wszelkich zobowiązań ontologicznych teorii.

[35] Chihara przytacza tu argument Kitchera przeciwko nominalizmowi: stanowisko to nie wyjaśnia, dlaczego fizyczne własności układów znaczków miałyby mieć znaczenie dla opisania świata. Chihara odpowiada na to, iż jego teoria konstruowalności nie dotyczy fizycznych własności układów znaczków — zaś sposób, w jaki matematyka stosuje się do opisu rzeczywistości fizycznej, zostaje pokazany wprost, przez konstruowanie odpowiednich narzędzi matematycznych [Chihara 1990, 77—78].

[36] „Cud stosowalności języka matematyki dla formułowania praw fizyki jest niezwykłym darem, którego nie rozumiemy, ani na który nie zasługujemy" [Wigner 1960, 14].

matematyka wkracza w opis rzeczywistości fizycznej.[37] Chihara nie wyjaśnia natomiast związku pomiędzy możliwymi zdaniami a rzeczywistością. Teza, że wiedza na temat możliwych wypowiedzi w pewnych (całkowicie nieokreślonych) językach może stosować się do opisu rzeczywistości, jest nie mniej tajemnicza, niż teza o tym, że matematyka posiada odniesienie w postaci abstrakcyjnych obiektów, których struktura w pewien sposób reprezentuje strukturę świata.

(4.5) Teoria Chihary jest słabsza od teorii mnogości. Dzięki temu pozbywamy się trudności związanych z «egzotycznymi» tworami teoriomnogościowymi, pewnikiem wyboru *etc.* Jednakże sam ten fakt nie rozwiązuje filozoficznych problemów związanych z samą stosowalnością matematyki. Zamiast pytania, dlaczego ZFC stosuje się do opisu świata, powstaje pytanie, dlaczego *Ct* stosuje się do opisu świata. Natomiast w związku ze zubożeniem systemu pojawia się następujący problem: nie jest mianowicie wcale pewne (wbrew temu, co twierdzi Chihara), iż cała potrzebna w zastosowaniach matematyka daje się w ten sposób zrekonstruować.[38] Teza ta nie może być uznana za bezwarunkowo słuszną. Istnieją zdania matematyczne niezależne od teorii mnogości, które pojawiają się w naturalnych kontekstach matematycznych — dotyczą bowiem nie obiektów teoriomnogościowych, takich jak duże liczby kardynalne (które rzeczywiście pojawiają się rzadko w «zwykłych» kontekstach matematycznych), ale np. liczb rzeczywistych.[39] Co więcej, istnieją zdania, którym można przypisać sens

[37] W ramach tych stanowisk stosowalność matematyki wyjaśnia się zazwyczaj w sposób następujący:

(i) Mówiąc ogólnie, platonik powie, że matematyka stosuje się do opisu rzeczywistości dlatego, że między światem fizycznym a światem matematycznym istnieje pewna odpowiedniość.

(ii) Realista argumentujący «w duchu Quine'a» powie, że postulowanie obiektów matematycznych jest sensowne z punktu widzenia konstruowania teorii umożliwiających wyjaśniania świata — będzie to zatem argument pragmatyczny.

(iii) Strukturalista będzie wyjaśniał stosowalność w języku „egzemplifikowania struktur matematycznych w świecie" (por. np. [Shapiro 1983]).

[38] Chihara powołuje się tu na argument, iż „lata matematycznych i logicznych badań po publikacji *Principia Mathematica* dostarczają przekonywających dowodów [faktu, iż w ramach zaprezentowanej tam teorii można zrekonstruować całe instrumentarium matematyczne, jakie może być potrzebne w naukach empirycznych]" [Chihara 1990, 95].

[39] Standardowym przykładem jest oczywiście hipoteza *continuum*. Inne przykłady tego typu:

1. Niech $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Czy dla każdego zbioru Borelowskiego B, zbiór $f(\mathbb{R}\setminus g(B))$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a?

2. Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Czy każda norma na algebrze $C(X,\mathbb{C})$ jest równoważna normie supremum? (por. [Dales, Woodin 1987]).

Jeszcze inne przykłady można znaleźć np. w [Roitman 1992].

Pojęcie *konkretnego zdania matematycznego* jest oczywiście nieostre. W pracy tej nie dokonuję analizy tego pojęcia; chodzi nam jedynie o roboczą klasyfikację i zasygnalizowanie problemu. Niezależnie jednak od tego, jak będziemy rozumieć pojęcie *naturalnego kontekstu matematycznego* wydaje się oczywiste, że zdanie dotyczące borelowskiego podzbioru $\mathbb{R}$ jest bardziej «konkretne» niż np. zdanie dotyczące istnienia ultrafiltrów na dużych liczbach kardynalnych.

fizyczny, a które wymagają technik teoriomnogościowych wykraczających nawet poza ZFC.[40]

Należy wspomnieć także o wynikach Friedmana, który pokazał, że pewne naturalne zdania dotyczące «prawdziwej matematyki» są niezależne od ZFC (zob. [Friedman 1981, 1986]). Zdania podane przez Friedmana w [Friedman 1981] dotyczą własności funkcji borelowskich z kostki Hilberta w odcinek jednostkowy.[41] Z kolei w [Friedman 1986] zawarte są przykłady zdań, dotyczących własności kombinatorycznych pewnych obiektów skończonych, które są niezależne od ZFC. Nie są one nawet dowodliwe w ZF+V=L. Ich udowodnienie wymaga przyjęcia założenia, że $\bigwedge n \bigvee \kappa$ (κ jest n-Mahlo); nie wystarcza nawet założenie istnienia liczby n-Mahlo dla pewnego ustalonego n.[42] Znaczy to, według ich autora, że „stanowią one przykłady interesujących twierdzeń, których udowodnienie w konieczny sposób wymaga wyjścia poza ogólnie akceptowane zasady rozumowań matematycznych" [Friedman 1981, 209]. W opinii Friedmana, istnienie takich zdań niezależnych stanowi przekonywający argument na rzecz tego, że abstrakcyjna teoria mnogości może okazać się istotna także w kontekście zagadnień związanych z obiektami skończonymi. Zdania te bowiem „niemal dotyczą liczb naturalnych" [Friedman 1986, 93] i — inaczej niż w wpadku hipotezy *continuum* — nie da się «obejść» tego problemu poprzez ograniczenie się do zbiorów konstruowalnych (czyli zawężenie pojęcia zbioru).[43] Uzasadnienie prawdziwości takich zdań wymaga wyjścia poza teorię mnogości ZFC. Tymczasem w systemie Chihary nie ma nawet możliwości zrekonstruowania wszystkich pojęć teoriomnogościowych, a więc tym bardziej rozstrzygnięcia prawdziwości tych zdań. Jego system zatem może się okazać zbyt słaby z punktu widzenia rozstrzygania problemów, które mogą pojawić się w naturalnych kontekstach.[44]

---

[40] W pracy [Da Costa, Doria 1996] znajdziemy (m.in) następujące przykłady tego typu zdań:

i) Istnieje wyrażenie opisujące ruch $m(t)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ takie, że zdanie „$m(t)$ jest ergodyczny na $\mathbb{R}^2$" jest niezależne od ZFC.

ii) Istnieje wyrażenie opisujące układ dynamiczny v takie, że zdanie „v ma podkowę Smale'a" jest niezależne od ZFC.

[41] Oznaczmy przez Q kostkę Hilberta (tj. $I^{\mathbb{N}}$ z topologią produktową, gdzie $I=[0,1]$; $\mathbb{N}$ to zbiór liczb naturalnych). Rozważmy grupę H takich permutacji $\mathbb{N}$, które są stałe na prawie wszystkich n (tj. dla $g \in H$, $g(n)=n$ dla wszystkich n, poza być może skończoną liczbą). Grupa H działa na Q^n: $g \bullet (x_1, \ldots, x_n) = (g \bullet x_1, \ldots, g \bullet x_n)$. Niech $\approx$ będzie następującą relacją równoważności na Q^n : $x \approx y$ gdy x, y należą do tej samej orbity za względu na działanie H na Q^n. Zdanie niezależne, o którym mowa, to:

Niech $F: Q^{n+1} \to I$ będzie funkcją borelowską taką, że dla $x \in Q$, $y, z \in Q^n$ takich, że $y \approx z$, zachodzi $F(x,z)=F(x,y)$. Wówczas istnieje ciąg $\{x_k\}$ elementów Q, o długości skończonej, lub co najwyżej przeliczalnej α taki, że dla wszystkich indeksów $s<t_1<\ldots<t_n \leq \alpha$, $f(x_s, x_{t_1}, \ldots, x_{t_n})$ jest równe pierwszej współrzędnej x_{s+1}.

[42] Liczby 0-Mahlo to liczby nieosiągalne. Liczby n+1-Mahlo to takie liczby, że każdy ich domknięty i nieograniczony podzbiór zawiera liczbę n-Mahlo.

[43] Dołączenie aksjomatu konstruowalności do aksjomatów ZF pozwala na udowodnienie AC (pewnika wyboru), CH (hipotezy *continuum*) i GCH (uogólnionej hipotezy *continuum*).

[44] Pod tym względem argumentacja Chihary wykazuje podobną słabość co argumentacja Fielda

(4.6) Nie jest jasne, jaki jest status kombinatorycznych zdań niezależnych od PA, które są prawdziwe w standardowym modelu dla PA (prawdziwość tych zdań w modelu standardowym ℕ dowodzimy w ZFC). Czy Chihara, który rekonstruuje arytmetykę, ma na myśli zdania prawdziwe w modelu standardowym, czy zdania dowodliwe w pewnym systemie formalnym (odpowiadającym arytmetyce Peana)? Konsekwentne byłoby odrzucenie pojęcia modelu i ograniczenie się do pojęcia zdań dowodliwych w systemie. To jednak jest sprzeczne z praktyką matematyczną. Matematyk zajmujący się teorią liczb interesuje się tym, jakie są liczby naturalne, a nie faktem, iż w pewnych słabych systemach pewne fakty dotyczące ℕ nie są dowodliwe. Wyniki teorioliczbowe, jakie stosuje się w innych gałęziach matematyki (także tych bliższych zastosowaniom, chociażby kryptografii), nie pochodzą wyłącznie z PA, ale są uzyskiwane w ramach wszelkich dostępnych w matematyce środków. System Chihary jest tu więc zbyt słaby. Aby uniknąć trudności tego typu, należałoby przyjąć przynajmniej tak silny system, aby móc w nim dowodzić prawdziwości w ℕ zdań kombinatorycznych. Nie wiadomo jednak, jak silny musiałby być ten system (czy byłby słabszy niż ZFC), gdyż nie wiadomo, jak silnych założeń teoriomnogościowych wymaga rozstrzygnięcie zdań typu hipotezy Goldbacha.

(4.7) Omawiając sposób, w jaki jego teoria wielkości mierzalnych stosuje się do opisu rzeczywistości, Chihara odwołuje się do pojęcia „izomorfizmu" między swoim systemem, a standardową teorią funkcji zmiennej rzeczywistej ([Chihara 1990, 120]). Istnienie takiego izomorfizmu ma pozwalać na «przechodzenie» od systemu klasycznego do systemu Chihary. Jednakże Chihara nie wyjaśnia, jaki jest status takiego izomorfizmu. Nie jest to pojęcie wewnętrzne systemu Chihary; chodzi tu raczej o jakąś formę twierdzenia o reprezentacji. Takie twierdzenie może być dowodzone tylko w klasycznej matematyce z użyciem środków teoriomnogościowych (samo pojęcie *izomorfizmu* jest pojęciem teoriomnogościowym[45]). Sytuacja ta przypomina nieco sytuację teorii Fielda, który rówież odwołuje się do tego typu twierdzeń (por. [Field 1980]). Chihara zatem, aby wyjaśnić stosowalność swojej teorii, odwołuje się do pojęć matematyki klasycznej, którą jednak uważa za system niezintepretowany. Nie jest to konsekwentne.

Problem ten stanowi przykład pewnego problemu ogólniejszego. Czy antyrealista ma prawo odwoływać się do realistycznej metateorii T_m, aby uzasadniać fakt, że jego

---

([Field 1980]). Obaj autorzy nie tyle argumentują, co agitują na rzecz tezy, że ich system jest wystarczający z punktu widzenia zastosowań.

Należy jednak przyznać, że znaczną część «prawdziwej», nie-teoriomnogościowej matematyki można zrekonstruować w ramach arytmetyki drugiego rzędu Z_2 i jej podsystemów (por. [Simpson 1999]). Nie wiadomo jednak, jak duża jest ta część, i czy faktycznie wystarcza ona do zrekonstruowania wszelkich narzędzi potrzebnych w naukach empirycznych. Gdyby tak było, to przedstawione w tym punkcie zarzuty wobec koncepcji Chihary traciłyby moc.

[45] Pojęcie *izomorfizmu* jest także podstawowym pojęciem teorii kategorii, jednak tutaj chodzi o teoriomnogościowe pojęcie izomorfizmu jako funkcji o pewnych własnościach.

teoria T_a jest — relatywnie do ustanowionych przez niego kryteriów K — równie dobra co realistyczna teoria T_r (na przykład, że ma taką samę siłę wyrażeniową albo że da się w niej udowodnić te same twierdzenia z klasy twierdzeń Φ) ? Argumentacja antyrealisty miałaby postać:

(i) W ramach T_m, odwołując się do dowodzonych w T_m twierdzeń teoriomodelowych dotyczących T_a i T_r, pokazujemy, że teorie T_a i T_r są równie dobre (ze względu na kryteria K).

(ii) Uznajemy zatem za uzasadnioną tezę, że teorie T_a i T_r są równie dobre.

(iii) Twierdzimy następnie, że nie istnieją modele dla T_a i T_r; to, że T_a i T_r są równie dobre jest jednak prawdą niezależnie od istnienia tych modeli. Odwołanie do T_m miało jedynie charakter heurystycznego chwytu.

Takie postawienie sprawy przypomina argumentację, w której — dla udowodnienia pewnej tezy o świecie — odwołujemy się do działań skrzatów i sił magicznych, traktując jednak te odwołania jako heurystyczne narzędzia. Z punktu widzenia antyrealisty modele dla teorii T_a i T_r mają podobny status jak — owe skrzaty.

5. Podsumowanie

Teoria Chihary ma następujące słabości:

(5.1) Argument przeciwko teorii zobowiązań ontologicznych Quine'a, opierający się na krytyce tezy o logice pierwszego rzędu, nie jest skuteczny — można bowiem podać takie przeformułowanie kryterium zobowiązań ontologicznych, aby objęło ono obszerną klasę logik.

(5.2) Argument dotyczący „fundamentalności systemu pojęciowego, w ramach którego zakładamy istnienie obiektów fizycznych jako fakt pierwotny, nie podlegający dalszemu uzasadnieniu" *de facto* stanowi tylko mało precyzyjne wyartykułowanie pewnego stanowiska bez argumentacji na jego rzecz.

(5.3) Argument «z nieufności matematyków» jest argumentem psychologiczno-socjologicznym, a nie merytorycznym.

(5.4) Argument Chihary przeciwko analizie zobowiązań ontologicznych teorii, opierający się na obserwacji, iż „naukowiec może żywić także inne przekonania, nie ujęte w danej teorii naukowej T", jest chybiony. Gdyby zaakceptować ten sposób argumentacji, należałoby konsekwentnie uznać, że żadna semantyczna analiza metanaukowa nie ma sensu, gdyż zawsze można wobec niej podnieść zarzut, że dana teoria naukowa T nie obejmuje całości przekonań naukowca o świecie. Z drugiej zaś strony można argument ten obrócić przeciwko Chiharze, powołując się na fakt, iż naukowcy mogą żywić przekonania dotyczące istnienia obiektów matematycznych.

(5.5) Proponowane przez Chiharę formalizmy L i L^* stanowią jedynie warianty notacyjne logiki klasycznej (*resp.* jedno- i dwusortowej) z klasyczną semantyką. Jest to zatem zabieg bezcelowy z punktu widzenia uzasadnienia głównej tezy Chihary.

(5.6) W swojej teorii *Ct* Chihara odwołuje się do założeń pozalogicznych (aksjomatów: ekstensjonalności, abstrakcji i nieskończoności), będących odpowiednikami aksjomatów teoriomnogościowych.

(5.7) Argument Chihary, iż jego kwantyfikator konstruowalności jest pojęciem pierwotnym systemu, a semantyka możliwych światów stanowi jedynie chwyt heurystyczny, można uogólnić na wszelką semantykę. Chihara bowiem nie pokazuje, na czym polega specyfika semantyki możliwych światów, która powoduje, iż to właśnie tę semantykę można traktować w taki sposób. W ten sposób dany byłby prosty argument na rzecz «totalnego antyrealizmu» (po prostu zawsze system uznajemy za niezintepretowany, a analizy semantyczne zaliczamy do czystej heurystyki), co jest wnioskiem zbyt daleko idącym.

(5.8) Argument, że skoro teorię modeli dla teorii *T* można rozwijać w ramach teorii *T*, więc teoria *T* jest pozbawiona odniesienia przedmiotowego, nie jest uzasadniony — można wskazać szereg słabości tego argumentu oraz jego naturalnych uogólnień, które prowadzą do bezzasadnych wniosków.

(5.9) Argumentacja Chihary na rzecz dopuszczalności pojęć modalnych opiera się na wątpliwych analogiach, które (gdyby nawet uznać je za trafne) mogą stosować się co najwyżej do pewnych prostych form argumentacji na rzecz realizmu, natomiast nie mają zastosowania do argumentacji Quine'a. Trudności filozoficzne związane z pojęciami modalnymi Chihara bagatelizuje, twierdząc, iż wszelkie ważne pojęcia są obarczone trudnościami (w domyśle: „Cel uświęca środki" — nie należy się tymi trudnościami przejmować, skoro dzięki zastosowaniu tych pojęć można uzasadnić tezę o nieistnieniu obiektów abstrakcyjnych).

(5.10) Chihara nie podejmuje problemu stosowalności — nie wyjaśnia, dlaczego pewne możliwe języki znajdują zastosowanie, a inne nie. W tym względzie pojawiające się trudności odpowiadają trudnościom formalizmu. Jedyna odpowiedź, jakiej można tu udzielić (w wypadku teorii Chihary i w wypadku formalizmu), musiałaby mieć postać: „Po prostu tak już jest, jest to pewien fakt pierwotny, którego nie będziemy dalej analizować".

(5.11) Nie jest wcale oczywiste, że w systemie Chihary da się zrekonstruować całą matematykę potrzebną w zastosowaniach (por. przytoczone przykłady zdań niezależnych, problem zdań niezależnych od PA, a prawdziwych w modelu standardowym, oraz wyniki da Costy i Friedmana.)[46]

(5.12) Chihara wyjaśniając, jak jego system stosuje się do opisu świata, odwołuje się do pojęcia izomorfimu. Jest to jednak pojęcie klasycznej, teoriomnogościowej matematyki. Chihara argumentuje więc na rzecz tezy, iż jego system jest dobry z punktu widzenia zastosowań, odwołując się do pojęć, które odrzuca. Jednakże antyrealistyczna argumentacja nie może opierać się na pojęciach (i wynikach) realistycznej metateorii.

---

[46] Na fakt, że w ramach koncepcji Chihary nic nie mówi się o teoriomnogościowych rozszerzeniach systemu zwraca uwagę Woleński w [Woleński 1992].

(5.13) Pojęcie spełniania jest u Chihary traktowane jako pojęcie pierwotne, scharakteryzowane jedynie przez pewne aksjomaty strukturalne. Jest całkowicie niejasne, skąd pochodzi takie pierwotne pojęcie spełniania odnoszące się do — całkowicie nieokreślonych — możliwych języków.

6. Konkluzja

Przedstawiona przez Chiharę argumentacja nie może być uznana za konkluzywną. Jego system opiera się na nieuzasadnionych założeniach, zaś trudności filozoficzne, jakie napotyka, nie są w dostatecznym stopniu przedyskutowane.

BIBLIOGRAFIA

Adamowicz Z., Zbierski P.
[1991] *Logika matematyczna*. PWN, Warszawa.
Barwise J.
[1985] „Model-theoretic logics: background and aims", w: [Barwise, Feferman 1985], 3—23.
Barwise J., Feferman S.
[1985] *Model-theoretic logics*, Springer-Verlag, Berlin.
Bigaj T.
[1994] „Kilka uwag w sprawie niezbędności matematyki w nauce", *Filozofia Nauki*, 3—4, 161—174.
Carnap R.
[1950] „Empiricism, Semantics and Ontology", w: *Revue Internationale de Philosophie*, 4, 20—40. Przedrukowane w: Benacerraf P., Putnam H., *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, 1964, s. 233—248.
Chihara C.
[1973] *Ontology and the Vicious Circle Principle*, Cornell University Press, Ithaca, New York.
[1982] „A Gödelian Thesis Regarding Mathematical Objects: Do They Exist? And Can We Perceive Them?", *Philosophical Review*, 91, 211—217.
[1990] *Constructibility and Mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford.
Craig W.
[1956] „Replacement of Auxiliary Expressions", *Philosophical Review*, 65, 38—55.
Da Costa N.C.A., Doria F.A.
[1996] „Structures, Suppes Predicates, and Boolean-Valued Models in Physics", w: Bystrov P.I., Sadovsky V.N. (red.), *Philosophical Logic and Logical Philosophy*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 91—118.
Dales H.G, Woodin W.H.
[1987] *An Introduction to Independence for Analyst*, Cambridge University Press, Cambridge.
Ebbinghaus H.-D.
[1985] „Extended Logics: The General Framework", w: [Barwise, Feferman 1985], 25—76.

Field H.

[1980] *Science Without Numbers*, Basil Blackwell, Oxford.

Friedman H.

[1981] „On the Necessary Use of Abstract Set Theory", *Advances in Mathematics*, 41, 209—280.

[1986] „Necessary Uses of Abstract Set Theory in Finite Mathematics", *Advances in Mathematics*, 60, 92—122.

Maddy P.

[1992] „Indispensability and Practice", *Journal of Philosophy*, 89, 275—289.

[1996] „Set Theoretic Naturalism", *Journal of Symbolic Logic*, 61, 490—514.

McCarty D.C.

[1993] „Review Essay: On the Failure of Mathematics' Philosophy", *Synthese*, 96, 255—291.

Parsons C.

[1995] „Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought", *Bulletin of Symbolic Logic*, 1, 44—74.

Quine W.v.O.

[1953a] „On What There Is", w: *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, s. 1—19. Przekład polski: „O tym, co istnieje", w: *Z punktu widzenia logiki*, PWN, Warszawa, 1969, s. 9—34.

[1953b] „Two Dogmas of Empiricism", w: *From a Logical Point of View*, Harvard University Press, Cambridge, s. 20—46. Przekład polski: „Dwa dogmaty empiryzmu", w: *Z punktu widzenia logiki*, PWN, Warszawa, 1969, s. 35—70.

[1966] „Posits and Reality", w: *The Ways of Paradox and Other Essays*, Random House, New York, 1966, s. 233—241.

Reichenbach H.

[1960] *The Theory of Relativity and a priori Knowledge*, University of California Press, Berkeley, California.

Roitman J.

[1992] „The Uses of Set Theory", *The Mathematical Intelligencer*, 14 (1), 63—69.

Shapiro S.

[1983] „Mathematics and Reality", *Philosophy of Science*, 50, 523—548.

[1991] *Foundations without Foundationalism*, Clarendon Press, Oxford.

[1993] „Modality and Ontology", *Mind*, 102, 455—481.

Simpson S.G.

[1999] *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin.

Tieszen R.

[1992] „Kurt Gödel and Phenomenology", *Philosophy of Science*, 59, 176—194.

Wigner E.P.

[1960] „The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 13, 1—14.

Woleński J.

[1992] Recenzja z [Chihara 1990], *History and Philosophy of Logic*, 13, 222—234.

Wójtowicz K.

[1994] „Czy matematyka jest niezbędna w nauce?", *Filozofia Nauki*, 1, 141—160.

[1996] „Filozofia Kurta Gödla", *Edukacja Filozoficzna*, 21, 149—159.

[1999] *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Wydawnictwa WFiS UW, Warszawa, s. 212.

[2000] „On a Certain Generalisation of Quine's Existence Criterion", w: Tałasiewicz M. (red.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science at Warsaw University* (w druku).