Filozofia Nauki
Rok VIII, 2000, Nr 3–4(31–32)

Bożena Czernecka

Zasada wyłączonego środka a logika intuicjonistyczna

Rola zasady wyłączonego środka uwidacznia się najlepiej w sporze między klasycznym a intuicjonistycznym (*scil.* konstruktywistycznym) stanowiskiem w filozofii matematyki. Znane jest także jej znaczenie dla rozwiązania fundamentalnej kontrowersji filozoficznej między realizmem a idealizmem.[1] Zdaniem K. Ajdukiewicza, odrzucenie metalogicznej zasady wyłączonego środka prowadzi do rezygnacji z klasycznego pojęcia *prawdy*, utożsamienia pojęcia *zdania prawdziwego* z pojęciem *tezy*, a w konsekwencji do idealizmu. W pracy tej nie będę się jednak zajmować zagadnieniem stosunku tej zasady do sporu o realizm, lecz jej związkiem z intuicjonizmem.

Jak wiadomo, funkcjonuje logiczna (ontologiczna) i metalogiczna (semantyczna) wersja zasady wyłączonego środka. Pierwsza głosi, że z dwóch sprzecznych stanów rzeczy jeden istnieje (zapis formalny: $p \vee \sim p$). Druga brzmi: z dwóch zdań sprzecznych zawsze jedno jest prawdziwe (każde zdanie jest prawdziwe lub fałszywe). Zapytajmy, którą z nich miał na myśli twórca intuicjonizmu, L.E.J. Brouwer,[2] gdy

---

[1] Zagadnienie to omawiają prace K. Ajdukiewicza: „Problemat transcendentalnego idealizmu w sformułowaniu semantycznym", [w:] tenże, *Język i poznanie*, t. I, Warszawa 1985, s. 264—277, oraz „Epistemologia i semiotyka", [w:] tenże, *Język i poznanie*, t. II, Warszawa 1985, s. 107—126, a także artykuł M. Przełęckiego „Zasada wyłączonego środka a zagadnienie idealizmu", *Studia Filozoficzne* 7—8 (1982), s. 89—99. Z drugiej strony szereg prac na ten temat opublikowali współcześni antyrealiści (w nowej, semantycznej wersji): M. Dummett, D. Prawitz, P. Martin-Löf, N. Tennant. Uwagi porządkujące w sprawie sporu realizm-idealizm (antyrealizm) zawiera książka J. Woleńskiego, *Metamatematyka i epistemologia*, Warszawa 1993, s. 285—294, natomiast w sprawie sporu realizm—antyrealizm semantyczny — praca T. Szubki „Nowy kształt sporu o realizm", *Roczniki Filozoficzne KUL* 42 (1994), z. 1, s. 161—194.

[2] „The Unreliability of the Logical Principles", [w:] tenże, A. Heyting (red.), *Collected Works*, vol. I. *Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam — Oxford — New York 1975, s. 107—111.

w 1908 r. napisał, że zasadę wyłączonego środka trzeba odrzucić z racji jej niepoprawności, a w późniejszej pracy[3] dodał, że mimo iż obowiązuje ona w odniesieniu do codziennych zjawisk zewnętrznego świata, wiara w jej ogólną obowiązywalność jest podobna do wiary w wymierność liczby π lub w ruch firmamentu wokół Ziemi.

Otóż w matematyce istnieją kontrprzykłady dla omawianej zasady.[4] Kontrprzykład Brouwera — w postaci uogólnionej — jest następujący. Zdefiniujmy własność F, taką że:

(a) Dla każdej liczby naturalnej można wykazać, że posiada ona własność F, lub można wykazać, że nie posiada ona własności F.

Lecz:

(b) Nie jest znana żadna metoda skonstruowania liczby posiadającej własność F,

a ponadto:

(c) Nie udowodniono, że założenie, iż konstrukcja takiej liczby została wykonana, prowadzi do sprzeczności.

Wobec tego, wedle Brouwera, wyrażenia:

(d) liczba naturalna posiadająca własność F istnieje lub liczba naturalna posiadająca F nie istnieje

nie można uznać. Co więcej, nie mielibyśmy prawa uznać wyrażenia (d), nawet gdyby z założenia, że liczba posiadająca własność F nie może zostać skonstruowana,[5] została wyprowadzona sprzeczność. Przywołajmy jeszcze inny kontrprzykład dla zasady wyłączonego środka podany przez ucznia Brouwera, A. Heytinga.[6] Wychodzi on od porównania dwóch definicji liczb naturalnych:

(I) Liczba k jest największą liczbą pierwszą taką, że $k-1$ jest także liczbą pierwszą lub $k=1$, jeżeli taka liczba nie istnieje.

(II) Liczba l jest największą liczbą pierwszą taką, że $l-2$ jest także liczbą pierwszą lub $l=1$, jeżeli taka liczba nie istnieje.

Na gruncie matematyki klasycznej nie ma różnicy między tymi definicjami, natomiast dla intuicjonistów ważne jest to, że k może być wyliczona ($k=3$), podczas gdy nie mamy żadnej metody wyliczenia l. Nie wiadomo bowiem, czy ciąg liczb pierwszych bliźniaczych p, $p+2$ jest skończony — czy nie. W związku z tym intuicjoniści odrzucają (II) jako definicję liczby naturalnej, gdyż uważają, że liczba naturalna jest dobrze zdefiniowana tylko wtedy, gdy dana jest metoda jej wyliczenia. W ten sposób dochodzi do odrzucenia zasady wyłączonego środka.

---

[3] „Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", [w:] tenże, *Collected Works...*, s. 508—515.

[4] Tamże, s. 510.

[5] Widać więc, iż odrzucenie zasady wyłączonego środka w logice intuicjonistycznej jest związane z odrzuceniem mocnej zasady podwójnej negacji: $\neg\neg p \rightarrow p$ (znak „$\neg$" jest tu symbolem intuicjonistycznej negacji).

[6] *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam 1966, s. 1—2.

Heyting mówi także o stałej Eulera, którą oznacza przez „C". Stałą Eulera definiuje się jako $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \log n)$. Nie wiadomo, czy C jest wymierna, czy nie. Zatem nie jest możliwe określenie jej pozycji w stosunku do każdej liczby wymiernej — czyli istnieją liczby wymierne, które mogą być tak skonstruowane, że nie wiemy, czy są one mniejsze od C, czy nie. Heyting proponuje rozważenie formuły, za pomocą której definiuje się C. C jest granicą ciągu

$$(\frac{1}{1} - \log 1), (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \log 2), (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \log 3), \ldots.$$

Problem polega na tym, że ciąg ten jest nieskończony – chociaż wiemy, jak konstruować kolejne wyrazy tego ciągu, o żadnym z nich nie potrafimy powiedzieć, że jest on ostatni. A więc nie jest możliwe obliczenie wszystkich jego wyrazów. W szczególności nie wiadomo, czy istnieje liczba naturalna *N* taka, że po *N* wyrazach ciągu można zdecydować, że pewna liczba wymierna W jest mniejsza od C lub że C jest mniejsza od W — czy też nie istnieje żadna taka liczba naturalna *N*, w którym to wypadku W równa się C. Heyting rozumuje następująco:

> Istnienie *N* nie oznacza nic innego, jak tylko możliwość faktycznego skonstruowania liczby o wymaganej własności, zaś nie-istnienie *N* oznacza możliwość wyprowadzenia sprzeczności z tej własności. Ponieważ nie wiemy, czy któraś z tych możliwości zachodzi, czy nie — nie możemy twierdzić, że *N* istnieje lub że *N* nie istnieje. W tym sensie można powiedzieć, że prawo wyłączonego środka tutaj nie obowiązuje.[7]

Współcześni autorzy w celu wykazania nieobowiązywalności zasady wyłączonego środka często posługują się przykładem dotyczącym własności Goldbacha.[8] Argumentem przeciwko tej zasadzie ma być to, iż (jak dotychczas) ani nie udowodniono, że każda liczba parzysta większa niż 2 posiada własność Goldbacha, ani nie udowodniono, że istnieje liczba parzysta większa niż 2, która nie posiada własności Goldbacha.

Dokonajmy teraz analizy kontrprzykładów intuicjonistycznych, aby odpowiedzieć na pytanie, co (i dlaczego) właściwie intuicjoniści starają się obalić: czy metalogiczną zasadę wyłączonego środka, czy zasadę logiczną, czy też — skoro na gruncie klasycznej definicji prawdy zasady te są równoważne[9] — jedną i drugą, albo samo klasyczne pojęcie prawdy, czy może jeszcze coś innego. Oczywiście te sprawy są powiązane ze sobą, tak że np. odrzucenie metalogicznej zasady wyłączonego środka prowadzi do odrzucenia klasycznej definicji prawdy, a także do odrzucenia zasady

---

[7] A. Heyting, „The Intuitionist Foundations of Mathematics", [w:] P. Benacerraf, H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics*, Oxford 1964, s. 43.

[8] S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam—Groningen 1952, s. 47—48; S. Körner, *What is Philosophy? One Philosopher's Answer*, London 1969, s. 54.

[9] K. Ajdukiewicz, „Problemat...", s. 275.

dwuwartościowości (będącej koniunkcją metalogicznej zasady wyłączonego środka i metalogicznej zasady niesprzeczności).

Wracając do przykładu Heytinga: z intuicjonistycznego punktu widzenia definicja (II) stałaby się poprawna, gdyby został rozwiązany problem liczb pierwszych bliźniaczych. Tymczasem, jak dotąd, nie udowodniono ani twierdzenia głoszącego, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych bliźniaczych, ani twierdzenia głoszącego, że ich liczba jest skończona. Wobec tego należy odrzucić formułę, która — w opinii intuicjonistów — jest poprawnym podstawieniem zasady wyłączonego środka: można wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych bliźniaczych lub można wykazać, że ich liczba jest skończona. Podobnie jest z pozostałymi przykładami podanymi przez intuicjonistów. Rozważmy przykład dotyczący własności Goldbacha. Intuicjoniści odrzucają formułę: Można wykazać, że każda liczba parzysta większa niż 2 posiada własność Goldbacha lub można wykazać, że istnieje liczba parzysta większa niż 2, która nie posiada własności Goldbacha. Trzeba przy tym dodać, że zwrot „można wykazać" intuicjoniści identyfikują ze zwrotem „można udowodnić" lub lepiej ze zwrotem „można konstruktywistycznie (intuicjonistycznie) udowodnić".

Tymczasem logiczną zasadę wyłączonego środka (a taką zdają się tu intuicjoniści rozważać) można ogólnie odczytać jako: „Jest tak, że ..., lub nie jest tak, że ...". Poprawne jej podstawieniem wyglądałoby tu: „Jest tak, że każda liczba parzysta większa niż 2 posiada własność Goldbacha, lub nie jest tak, że każda liczba parzysta większa niż 2 posiada własność Goldbacha (czyli jest tak, że istnieje liczba parzysta większa niż 2, która nie posiada własności Goldbacha)". Powtórzmy więc, że intuicjonistyczne „Można udowodnić, że *p* lub można udowodnić, że nie-*p*" nie jest poprawnym podstawieniem zasady wyłączonego środka przyjmowanej w logice klasycznej.

Dlaczego intuicjoniści w taki sposób interpretują omawianą zasadę? Wedle W.v.O. Quine'a, jeśli jakiś logik odrzuca formułę „*p* lub nie-*p*", to czyni tak dlatego, że odrzuca klasyczną negację lub alternatywę. Intuicjonista faktycznie „przyznaje, że przypisuje terminom matematycznym [a więc m.in. funktorom logicznym — B.Cz.] znaczenia inne niż te, jakie nadaje im matematyk klasyczny, ale utrzymuje też, iż znaczenia klasyczne są niespójne i wyrastają z niezrozumienia przez jego oponenta tego, jak funkcjonuje język matematyczny. Tak więc odpowiedź na pytanie, jak można kwestionować podstawowe prawo logiczne, brzmi, że u podstaw sporu o logikę leży bardziej fundamentalny spór o poprawny model znaczenia, czyli o to, co powinniśmy uważać za konstytuujące rozumienie zdania."[10] Nie będę się tu wdawać w dyskusję,

---

[10] M. Dummett, *Logiczna podstawa metafizyki*, Warszawa 1998, s. 32—33. Z faktu, że każdy spór dotyczący poprawności jakiegoś prawa logiki odzwierciedla rozbieżność znaczeń przypisywanych stałym logicznym w tym prawie występującym, nie wynika, zdaniem Dummetta, że jest to spór czysto werbalny. Wyróżnia on dwojakiego rodzaju spory o znaczenia: (1) pojęciowo banalne — gdy dałoby się go rozstrzygnąć przez wprowadzenie dwóch nowych słów, pierwszego o znaczeniu przypisywanym spornemu słowu przez proponenta, drugiego o znaczeniu przypisywanym temu słowu przez oponenta; (2) koncepcyjnie głębokie — przynajmniej jedna ze stron sporu twierdzi, że zna-

czy i ewentualnie dlaczego znaczenia funktorów występujących np. w klasycznym rachunku zdań są niespójne i co by to miało znaczyć.

Heyting, jak wiadomo, podał tzw. teoriodowodową interpretację stałych logicznych logiki intuicjonistycznej; u jej podstaw leży idea, że przyjąć jakąś formułę jako twierdzenie matematyczne — to tyle, co mieć dowód tej formuły.[11] Zbliżoną do niej propozycję przedstawił E.J. Lemmon.[12] Ten ostatni uważa, iż intuicjoniści używają odmiennego klucza interpretacyjnego (czyli sposobu przyporządkowania symbolom formalnym słów języka naturalnego) od klucza używanego przez logików klasycznych. Oto przedstawiony przezeń klucz interpretacyjny dla funktorów rachunku Heytinga:

(1) „... $\wedge$ ...” – „Jest tak, że ... i ...”,

(2) „... $\vee$ ...” – „Można wykazać, że jest tak, że ... lub można wykazać, że jest tak, że ...”,

(3) „... $\rightarrow$ ...” – „Można wykazać, że jeśli można wykazać, że jest tak, że ..., to można wykazać, że jest tak, że ...”,

(4) „$\neg$ ...” – „Można wykazać, że założenie, że ..., prowadzi do sprzeczności” lub „Można wykazać, że nie jest tak, że można wykazać, że ...”,

przy czym zwrot „można wykazać, że ...” należy rozumieć jako „istnieje efektywna procedura wykazania, że ...”.

Ostatecznie więc logiczna zasada wyłączonego środka wychodzi nietknięta z krytyki intuicjonistycznej. Co więcej, intuicjoniści zdają się w ogóle nie być nią zainteresowani.[13] Wobec powyższego, wydaje się dość zaskakującym fakt, że intuicjoniści deklarują odrzucenie logicznej zasady wyłączonego środka (tak nazywają wzór $p \vee \neg p$), która nie da się wyprowadzić w logice Heytinga przedstawionej w postaci aksjomatycznego systemu dedukcyjnego. (Tezą tego systemu jest natomiast formuła $\neg\neg(p \vee \neg p)$, zwana „zasadą absurdalności absurdalności wyłączonego środka”.)

Intuicjoniści w szczególności nie zaprzeczają ogólnej ważności podstawienia klasycznej zasady $p \vee \sim p$:

$+p \vee \sim+p$ (gdzie „+” oznacza funkcję dowodliwości),

które można odczytać jako: (Jest tak, że) konstrukcja dowodząca zdania p została wykonana lub (nie jest tak, że) konstrukcja dowodząca zdania p została wykonana. Nie jest ono jednak zdaniem matematycznym[14] i dlatego nie interesuje intuicjonisty.

---

czenia przypisywane przez tę drugą stronę nie są spójne. Różnice poglądów dotyczące znaczeń stałych logicznych rzadko bywają, wedle Dummetta, pojęciowo banalne.

[11] A. Heyting, *Intuitionism...*, s. 98—99.

[12] E.J. Lemmon, G.P. Henderson, „Is There Only One Correct System of Modal Logic?”, *Aristotelian Society Supplement* 33 (1959), s. 25—34.

[13] M. Przełęcki uważa, że logiczna zasada wyłączonego środka jest nienaruszalna — należy do prawdziwych zdań języka przedmiotowego („Zasada...”, s. 93). Wedle J. Jadackiego niezwykle rzadko można spotkać się z poglądem, że świat jest zbudowany niezgodnie z tą zasadą (*Spór o granice poznania. Prolegomena do epistemologii*, Warszawa 1985, s. 125).

[14] Jest tak dlatego, że występuje tu negacja, którą Heyting nazywa „negacją faktualną”, podczas

Natomiast intuicjonistyczną zasadę wyłączonego środka (a więc co najwyżej analogon zasady klasycznej) można by zapisać w postaci:

$+p \vee \neg p$[15]

i odczytać: Można udowodnić, że (jest tak, że) p lub można wyprowadzić sprzeczność z założenia, że konstrukcja dowodząca (że jest tak, że) p została wykonana. Innymi słowy, mamy rację, aby przyjąć zdanie p, lub mamy rację, aby przyjąć jego negację. Używając terminologii Lemmona: istnieje efektywna procedura wykazania, że p, lub istnieje efektywna procedura wykazania, że nie-p.[16] Tak zinterpretowana formuła jest oczywiście fałszywa i słusznie ją intuicjoniści odrzucają.

Jak z kolei wygląda sprawa z metalogiczną zasadą wyłączonego środka? Innymi słowy, czy każde zdanie na gruncie intuicjonizmu jest prawdziwe lub fałszywe? Ażeby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba wcześniej zająć się samym pojęciem *prawdy*. W rozumieniu intuicjonistów prawda i dowód są bardzo ściśle powiązane. W przeciwieństwie do klasycznego podejścia, przy którym zdania mają obiektywnie określoną wartość logiczną (zależnie od rzeczywistości, a niezależnie od naszych zdolności rozpoznania tej wartości — w szczególności od możliwości podania dowodu), przy podejściu intuicjonistycznym nie można mówić o zdaniach prawdziwych, których prawdziwość nie może zostać rozpoznana.[17] Intuicjoniści zdają się kwestionować naszą zdolność do posługiwania się pojęciem *prawdy dotyczącej zdań matematycznych* w sposób niezależny od pojęcia *dowodu*. M. Dummett pisze: „Do pojęcia prawdy docieramy przez kwantyfikację egzystencjalną — zdanie jest prawdziwe, jeśli istnieje konstrukcja, która go dowodzi".[18] Z kolei zdanie jest fałszywe, jeśli istnieje konstruktywny dowód negacji tego zdania. Mówiąc językiem Ajdukiewicza, intuicjoniści posługują się pojęciem *prawdy* w taki sposób, iż przez „zdanie prawdziwe" rozumieją „zdanie czyniące zadość kryterium prawdy".[19]

Na terenie intuicjonizmu mamy więc do czynienia z utożsamieniem prawdziwości i dowodliwości. Tym samym można tu postawić znak równości między pojęciem *prawdy* i pojęciem *tezy*. Z tego punktu widzenia nie może istnieć żadna gwarancja, że każde zdanie matematyczne jest prawdziwe (intuicjonistycznie) lub fałszywe (intuicjonistycznie). Co więcej, można podać przykłady zdań, które nie są w tym sensie prawdziwe, choć ich negacje też prawdziwe nie są.

---

gdy w matematyce i logice intuicjonistycznej dopuszczona jest jedynie mocna negacja *de iure*.

[15] Tak sformułowane prawo N. Cooper nazywa „udawanym prawem wyłączonego środka" (*bogus law of excluded middle*). Zob. N. Cooper, „The Law of Excluded Middle", *Mind* 87 (1978), s. 170.

[16] E.J. Lemmon, G.P. Henderson, „Is There Only One...", s. 27.

[17] P. Martin-Löf, „Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof", *Synthese* 73 (1987), s. 413—414. Pisze on wprost, że prawda jest zależna od wiedzy (truth is knowledge dependent).

[18] M. Dummett, *Logiczna podstawa...*, s. 60.

[19] „Epistemologia...", s. 114.

Intuicjonista musi zatem zmierzyć się z twierdzeniami limitacyjnymi, przede wszystkim z twierdzeniem A. Tarskiego o niedefiniowalności prawdy w językach formalnych oraz z twierdzeniami K. Gödla o niezupełności. Jeśli chodzi o pierwsze, to intuicjoniści odpowiadają prosto. Mianowicie uważają, że dowód podany przez Tarskiego jest intuicjonistycznie nieakceptowalny z racji swej niekonstruktywności.[20] Wobec tego czują się zwolnieni z obowiązku respektowania jego twierdzenia.

Intuicjoniści nie przykładają też zbyt wielkiej wagi do twierdzeń Gödla. W pracach twórców intuicjonizmu nie ma nawet o nich wzmianki. Osobną pracę poświęconą znaczeniu wyników Gödla dla teorii intuicjonistycznej napisał Dummett.[21] Wykazuje w niej, że znaczenie nazwy „liczba naturalna" redukuje się do jej użycia, mimo że żaden system formalny nie aksjomatyzuje rekurencyjnie tego pojęcia. Jednak, jak zauważa J. Woleński, główny problem dotyczy prawdziwości (lub znaczenia) nie nazw — lecz zdań. Znaczenie zdania, wedle Dummetta jest identyczne z warunkami jego stwierdzalności — nie zaś prawdziwości. Jak wobec tego uporać się z problemem konstruktywnych warunków stwierdzalności zdań gödlowskich — np. zdania o niesprzeczności arytmetyki? Czy należy uznać je za zdania niezrozumiałe, gdyż nie można znać ich znaczenia? Odpowiedź Dummetta (a także P. Martina-Löfa[22]) zdaje się iść w następującym kierunku. Nie można utożsamiać pojęcia *dowodu wewnątrz określonego systemu formalnego* z intuicyjną ideą *poprawnego dowodu matematycznego*, gdyż może się zdarzyć, że żaden system formalny nie będzie w stanie objąć wszystkich zasad dowodowych akceptowalnych z intuicyjnego punktu widzenia. Twierdzenie Gödla pokazało, że tak jest właśnie w wypadku teorii liczb. Ostatecznie więc znaczenie zdania matematycznego powinno być określone za pomocą „nieusuwalnie nieokreślonego pojęcia intuicyjnie akceptowalnego dowodu",[23] nie zaś za pomocą dowodu w ramach jakiegoś systemu formalnego.

To rozwiązanie jest zgodne z poglądami Brouwera i Heytinga dotyczącymi formalizacji. Wedle tych ostatnich, na gruncie intuicjonizmu nie można mówić o konstrukcji zdania matematycznego absolutnie nierozstrzygalnego. Istnieją tylko problemy nierozstrzygalne za pomocą środków konstrukcji, którymi aktualnie posługuje się «myśl matematyczna». Nie można jednak dowieść, że istnieją takie problemy, których nigdy żadnymi konstruktywnymi środkami się nie rozstrzygnie. Aby podać przykład takiego problemu, należałoby uprzednio zdefiniować samą intuicję konstrukcji — tj. podać dla niej matematyczną konstrukcję — a taki postulat zawiera w sobie, ich zdaniem, błędne koło. Logika intuicjonistyczna może bowiem wprawdzie kodyfikować

---

[20] A. Tarski, „Prawda i dowód", *Studia Filozoficzne* 2 (1984), s. 9—30; tamże: J. Woleński, *Alfred Tarski (1901—1983)*, s. 3—8.

[21] „The Philosophical Significance of Gödel Theorem", [w:] M. Dummett, *Truth and Other Enigmas*, Duckworth 1978, s. 186—201.

[22] „Verificationism Then and Now", [w:] W. DePauli-Schimanovich, E. Köhler, F. Stadler (red.), *The Foundational Debate: Complexity and Constructivity in Mathematics and Physics*, Dordrecht 1995, s. 187—196.

[23] M. Dummett, „The Philosophical...", s. 201.

konstrukcje już przez «myśl matematyczną» używane, nie może jednak nigdy w pełni wyczerpać logicznie niekodyfikowalnej intuicji matematycznej. Jest zasadniczo niemożliwe wyczerpanie kiedykolwiek ogółu wszystkich procesów myślowych, które mogą być traktowane jako uprawnione. Stąd rachunek intuicjonistyczny Heytinga mógł co najwyżej pretendować do statusu poprawnej kodyfikacji zasad logicznych stosowanych obecnie w matematyce intuicjonistycznej.[24]

Jest teraz sprawą oczywistą, iż intuicjoniści odrzucają metalogiczną zasadę wyłączonego środka. Fakt ten jest sprzężony z odrzuceniem przez nich klasycznej definicji prawdy i zastąpienia jej definicją «epistemiczną», która istotę prawdziwości upatruje w stosunku zdania do rezultatu określonych zabiegów poznawczych. W sformułowaniu intuicjonistycznym zasada ta miałaby postać: Każde zdanie jest (konstruktywistycznie) dowodliwe lub (konstruktywistycznie) dowodliwa jest jego negacja — czyli każde zdanie jest dowodliwe lub obalalne.

Tymczasem metalogiczna zasada wyłączonego środka stwierdza, jak wiadomo, że każde zdanie jest prawdziwe lub prawdziwe jest jego zaprzeczenie. Nie można natomiast stąd wywnioskować, że każde zdanie jest dowodliwe lub że można dowieść jego negację. Alternatywa dowolnego zdania i jego negacji, przy podejściu klasycznym, jest zawsze prawdziwa, mimo że nie zawsze potrafimy wskazać, który jej składnik jest prawdziwy, a tym bardziej podać jego dowód. Inaczej mówiąc, między zdaniami o strukturze „*p* — nie jest tak, że *p*" zachodzi związek niewspółfałszywości.[25] Inaczej jest przy podejściu intuicjonistycznym. Może być bowiem tak, że nie udowodniono (nie wykazano) że *p*, ani nie udowodniono (nie wykazano), że nie jest tak, że *p* – zachodziłby wówczas związek współfałszywości.

Zauważmy także, iż niektóre inne zasady pozostają przy intuicjonistycznej interpretacji nieproblematyczne. Dla przykładu zasada niesprzeczności (metalogiczna — choć logiczna również) jest ogólnie ważna, gdyż zawsze można dowieść, że dane zdanie nie jest równocześnie dowodliwe i obalalne. Nie jest nigdy tak, że można wykonać konstrukcję dowodzącą zdanie *p* i jednocześnie nie można wykonać takiej konstrukcji.

Odpowiednio do pojęcia *prawdy*, przy podejściu intuicjonistycznym, zmienia się pojęcie *uznawania*. Według A. Grzegorczyka, „w klasycznej koncepcji zdania uznanego zdania uznane utożsamia się ze zdaniami prawdziwymi, a stąd odróżnia się tylko zdania uznane (za prawdziwe) i odrzucone (jako fałszywe)",[26] natomiast dla logiki intuicjonistycznej właściwe jest uznawanie relatywistyczne: zdanie jest uznane, jeśli

---

[24] A. Heyting, *Intuitionism*..., s. 102. Poglądy Brouwera były jeszcze bardziej radykalne: sprzeciwiał się on wszelkiej formalizacji logiki intuicjonistycznej, w szczególności aksjomatyzacji dokonanej przez Heytinga, nie uważając jej za ortodoksyjnie intuicjonistyczną.

[25] Oczywiście zachodzi także związek niewspółprawdziwości (wyraża go zasada niesprzeczności).

[26] A. Grzegorczyk, „Klasyczne, relatywistyczne i konstruktywistyczne sposoby uznawania twierdzeń", *Studia Logica* 27 (1971), s. 154.

jest prawdziwe, a ponadto spełnione są dodatkowe (podmiotowe) warunki.[27] W tej ostatniej koncepcji uznawanie jest czymś «mocniejszym» niż prawdziwość.

Na zakończenie — dwie uwagi ogólne na temat logiki intuicjonistycznej. Po pierwsze, czy logikę intuicjonistyczną można traktować jako konkurentkę logiki klasycznej? Analizy związane z zasadą wyłączonego środka zdają się przemawiać za tym, że logiki te nie są konkurencyjne w sposób prosty. Przez prostą konkurencyjność dwóch (lub więcej) systemów logicznych rozumiem taką sytuację, że równokształtne formuły każdej z nich posiadają takie samo znaczenie (interpretację) — i zarazem logiki te są niezgodne co do zbioru tez (istnieją formuły będące tezami w jednej logice, a nie będące tezami w drugiej). Zewnętrznie takie same formuły w rachunku klasycznym i intuicjonistycznym, np. (logiczna) zasada wyłączonego środka, otrzymują odmienną interpretację. O konkurencyjności między logiką klasyczną i logiką intuicjonistyczną można by mówić co najwyżej w tym sensie, że chodzi tu o konkurencję między «logiką prawdy» a «logiką kryteriów prawdy». Intuicjoniści utrzymują bowiem, że zdanie jest prawdziwe jeśli spełnia kryterium prawdy, którym jest (konstruktywistyczna) dowodliwość (lub szerzej: weryfikacja).

Po drugie, prawa logiki intuicjonistycznej są mocniejsze niż odpowiednie prawa logiki klasycznej. O ile w tej ostatniej — zasady logiczne (o postaci implikacyjnej) są podstawą reguł prowadzących od zdań prawdziwych do zdania prawdziwego, o tyle w intuicjonizmie reguły inferencji mają prowadzić od zdań udowodnionych do zdania udowodnionego.[28] W konsekwencji więc zasady logiczne, na podstawie których takie reguły inferencji są tworzone, muszą być mocniejsze w logice intuicjonistycznej niż klasycznej. Reguła opuszczania podwójnej negacji (obowiązująca w logice klasycznej), oparta na mocnej zasadzie podwójnego przeczenia, nie spełnia intuicjonistycznych wymogów, gdyż to, że nie jest do udowodnienia to, iż p nie jest dowodliwe, niczego nie implikuje o p (jeśli nie można udowodnić, że nie jest do udowodnienia, iż p, to nie zawsze można udowodnić, iż p).[29] Odrzucenie mocnej zasady podwójnej negacji w logice intuicjonistycznej prowadzi do odrzucenia (intuicjonistycznej) zasady wyłączonego środka będącej jedynie konsekwencją tej pierwszej (wystarczy w formule $\neg\neg p \rightarrow p$ podstawić za zmienną p wyrażenie $p \vee \neg p$, aby otrzymać formułę $\neg\neg(p \vee \neg p) \rightarrow p \vee \neg p$; ponieważ poprzednik tej implikacji jest tezą, więc za pomocą *modus ponens* otrzymujemy omawianą zasadę). W tym sensie (mocna) zasada podwójnego przeczenia byłaby ważniejsza niż zasada wyłączonego środka, w której zwalczanie intuicjoniści są bardziej zaangażowani.

---

[27] Tamże, s. 156—157.

[28] L.E.J. Brouwer, „Mathematik, Wissenschaft und Sprache", [w:] tenże, *Collected Works...*, s. 422—423; zob. także T. Placek, *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity*, Dordrecht 1999, s. 72.

[29] Intuicjoniści uznają słabą zasadę podwójnej negacji ($p \rightarrow \neg\neg p$), którą mogliby odczytać następująco: Jeśli p jest do udowodnienia, to nie jest dowodliwe, że p nie jest do udowodnienia.