Filozofia Nauki
Rok IX, 2001, Nr 1(33)

Roman Murawski

O dojrzewaniu świadomości różnicy między prawdziwością a dowodliwością w matematyce

1. Przyjmuje się powszechnie, że dowód jest ostatecznym gwarantem prawdy w matematyce — że dowód jest źródłem prawdy. Można powiedzieć, że zdanie jest prawdziwe, jeśli może być udowodnione. Ale co to jest dowód? I co to jest prawda?

Od czasów Platona, Arystotelesa i Euklidesa za najlepszą metodę uzasadniania i organizacji wiedzy matematycznej uznawana jest metoda aksjomatyczna. Pierwszym dojrzałym i najbardziej reprezentatywnym przykładem jej użycia w matematyce są *Elementy* Euklidesa. Ustanowiły one wzorzec teorii naukowej i w szczególności paradygmat w matematyce. Od czasów Euklidesa do końca XIX wieku matematyka była rozwijana jako teoria aksjomatyczna (czy raczej: quasi-aksjomatyczna) oparta na aksjomatach i postulatach. Dowody twierdzeń zawierały liczne luki — w istocie listy aksjomatów nie były pełne, swobodnie używano w dowodach «oczywistych» prawd i odwoływano się do intuicji. Dowody były więc nieformalne i intuicyjne, były raczej argumentacją (*demonstration*), a samo pojęcie dowodu miało charakter psychologiczny (a nie logiczny). Zauważmy, że nie zwracano prawie w ogóle uwagi na sprecyzowanie czy dokładniejsze określenie języka teorii — w istocie językiem teorii matematycznych był po prostu (nieprecyzyjny) język potoczny. Trzeba też zauważyć, że aż do końca XIX wieku matematycy byli przekonani, że aksjomaty i postulaty powinny być twierdzeniami prawdziwymi, a zatem powinny opisywać rzeczywisty stan rzeczy (tj. mający miejsce w rzeczywistości matematycznej). Ma to, jak się wydaje, związek z poglądem Arystotelesa, iż zdanie jest udowodnione (udowodniono, że jest prawdziwe), gdy wykazano, że jest ono logiczną konsekwencją zdań uznanych już za prawdziwe. To wykazywanie pojmowano jako dedukcję, której przesłankami są zdania, o których wiadomo, że są prawdziwe, a samą dedukcję rozumiano jako łańcuch bezpośrednich inferencji.

Warto dodać, że — związane z idealizmem Platona — podejście Euklidesa do problemu rozwijania matematyki i uzasadniania jej stwierdzeń, tj. podejście polegające na uzasadnianiu przez dedukcję na podstawie przyjętych aksjomatów i postulatów, nie było jedynym podejściem i jedyną metodą stosowaną przez starożytnych Greków (i później). Inne podejście (nazwijmy je „heurystycznym") było związane z Demokrytem i jego materializmem. Stosował je na przykład Archimedes, który używał nie tylko dedukcji, ale właściwie dowolnych metod, takich jak intuicja czy nawet eksperyment (nie tylko myślowy!) do rozwiązywania problemów. Choć podejście Euklidesowe zwyciężyło i dominowało w historii, stanowiło raczej ideał, do którego dążono, a nie było rzeczywistą praktyką badawczą matematyków. W istocie matematyka dedukcyjna była raczej rzadkim zjawiskiem. Przeciwnie, intuicja i rozumowania heurystyczne stanowiły siłę napędową matematyki. Ożywiona, lecz nie zawsze wystarczająco ścisła aktywność badawcza prowadziła jednak do «kryzysów» — por. na przykład odkrycie przez Pitagorejczyków wielkości niespółmiernych, kłopoty Leibniza i Newtona z wyjaśnieniem natury wielkości infinitezymalnych, «dowód» Fouriera tego, że każda funkcja może być przedstawiona w postaci szeregu Fouriera, antynomie teorii mnogości.

Podstawowe pojęcia leżące u podstaw paradygmatu Euklidesa zostały wyjaśnione na przełomie XIX i XX wieku. W szczególności intuicyjne (i, jak powiedzieliśmy, psychologiczne w swej naturze) pojęcie dowodu (*demonstration*) zostało zastąpione przez precyzyjne pojęcie dowodu formalnego i pojęcie konsekwencji logicznej. Rozmaite wydarzenia w historii matematyki i osiągnięcia matematyki przyczyniły się do rewizji paradygmatu Euklidesa; w szczególności wspomnieć trzeba o powstaniu i rozwoju teorii mnogości (G. Cantor), arytmetyzacji analizy (A. Cauchy, K. Weierstrass, R. Dedekind), aksjomatyzacji arytmetyki liczb naturalnych (G. Peano), powstaniu geometrii nieeuklidesowych (N.I. Łobaczewski, J. Bolyai, C.F. Gauss), aksjomatyzacji geometrii (M. Pasch, D. Hilbert), rozwoju logiki matematycznej (G. Boole, A. de Morgan, G. Frege, B. Russell). Poza tymi «pozytywnymi» czynnikami były jednak także czynniki «negatywne», a mianowicie odkrycie paradoksów w teorii mnogości (C. Burali-Forti, G. Cantor, B. Russell) oraz antynomii semantycznych (G.D. Berry, K. Grelling). Wymuszały one rewizję pewnych podstawowych idei i stymulowały w szczególności badania nad podstawami matematyki. Jednym z kierunków, w których rozwijały się te badania, był program Hilberta i jego teoria dowodu (*Beweistheorie*). Powiedzmy od razu, że „celem tego programu nie było nigdy stworzenie pełnej filozofii matematyki; jego celem było usankcjonowanie korpusu wiedzy matematycznej" (por. Rowe, 1989, s. 200). Dodajmy też, że poglądy samego Hilberta zmieniały się w czasie, zawsze jednak związane były z formalizmem.

2. Hilbert chciał usprawiedliwić i ugruntować teorie matematyczne za pomocą systemów sformalizowanych, tj. właśnie za pomocą metody aksjomatycznej. Tę ostatnią traktował on jako klucz do systematycznej organizacji wszelkiej wiedzy naukowej (odpowiednio rozwiniętej). Myśl ta została dobrze wyrażona już w jego liście z 29 grudnia 1899 roku do Fregego, w którym Hilbert wyjaśniał swoje motywy aksjomatyzacji geometrii i pisał (por. Frege, 1976, s. 67):

> Zostałem zmuszony do konstrukcji swoich aksjomatyk przez pewną konieczność: chciałem mianowicie mieć możliwość zrozumienia tych twierdzeń geometrycznych, które są według mnie najważniejszymi rezultatami badań geometrycznych: tego, że zarówno postulat o równoległych, jak i postulat Archimedesa *etc.*, nie są konsekwencją pozostałych aksjomatów.[1]

W „Axiomatisches Denken" (1918, s. 405) Hilbert pisał:

> Kiedy zestawiamy fakty danej mniej lub bardziej rozwiniętej dziedziny naszej wiedzy, to zauważamy natychmiast, że fakty te mogą być uporządkowane. Porządek taki wprowadza się zawsze przy pomocy pewnej siatki pojęć (*Fachwerk von Begriffen*) w taki sposób, że każdemu obiektowi danej dziedziny odpowiada pewne pojęcie tej siatki, a każdemu faktowi w tej dziedzinie odpowiada pewna relacja logiczna pomiędzy pojęciami. Ta siatka pojęć to nic innego jak *teoria* danej dziedziny wiedzy.[2]

U Hilberta za ramami formalnymi stała zawsze pewna motywacja treściowa. Rozważał on mianowicie teorie wraz z odpowiednimi dziedzinami niepustymi (*Bereiche*), które wskazywały na zakres zmienności zmiennych teorii i interpretację symboli pozalogicznych. Hilbert jednak — jako matematyk — nie interesował się kwestią precyzyjnego ustalenia statusu ontologicznego obiektów matematyki. Co więcej, można powiedzieć, że jego program wzywał właściwie do odwrócenia uwagi (w zakresie pytań matematycznych i filozoficznych) od problemu przedmiotu teorii matematycznych i zwrócenia jej raczej na krytyczne badanie metod i twierdzeń teorii. Z drugiej strony był on świadom, że teorie sformalizowane mogą mieć rozmaite interpretacje. Przywołajmy tutaj jego słynne zdanie ze wspomnianego już wyżej listu do Fregego:

> Tak, jest oczywiste, że można traktować każdą taką teorię jedynie jako siatkę czy schemat pojęć powiązanych koniecznymi relacjami wzajemnymi, i myśleć o podstawowych obiektach teorii jako będących jakimikolwiek obiektami. Kiedy więc traktuję moje punkty jako system dowolnych przedmiotów, na przykład jako układ złożony z miłości, prawa i kominiarza..., i gdy traktuję moje aksjomaty jako [wyrażające] wzajemne relacje pomiędzy tymi obiektami, to wtedy moje twierdzenia, dla przykładu twierdzenie Pitagorasa, zachodzą także dla tych przedmio-

---

[1] Ich bin zu der Aufstellung meines Systems von Axiomen durch die Not gezwungen: ich wollte die Möglichkeit zum Verständnis derjenigen geometrischen Sätze geben, die ich für die wichtigsten Ergebnisse der geometrischen Forschungen halte: dass das Parallelenaxiom keine Folge der übrigen Axiome ist, ebenso das Archimedische etc.

[2] Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten mehr oder minder umfassenden Wissensgebiete zusammenstellen, so bemerken wir bald, daß diese Tatsachen einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt jedesmal mit Hilfe eines gewissen *Fachwerkes von Begriffen* in der Weise, daß dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nicht Anderes als die *Theorie* des Wissensgebietes.

tów. Innymi słowy: każda taka teoria może być zastosowana do nieskończenie wielu układów elementów podstawowych.[3]

Istota aksjomatycznego badania prawd matematycznych sprowadzała się dla Hilberta do wyjaśniania pozycji danego twierdzenia (danej prawdy) w ramach badanego systemu aksjomatycznego oraz wzajemnych relacji logicznych pomiędzy twierdzeniami.[4]

Hilbert chciał uzasadnić i ugruntować wiedzę matematyczną za pomocą rozważań syntaktycznych. U podstaw jego podejścia leżało rozróżnienie pomiędzy nie sprawiającą kłopotu «finitystyczną» częścią matematyki a jej częścią «infinitystyczną», która wymaga uzasadnienia. Matematyka finitystyczna zajmuje się tzw. zdaniami realnymi, które są w pełni sensowne, ponieważ odwołują się jedynie do danych konkretnych przedmiotów. Matematyka infinitystyczna zaś dotyczy tzw. zdań idealnych, które odwołują się do wielkości (aktualnie) nieskończonych. Hilbert zaproponował, by ugruntować całą matematykę w matematyce finitystycznej poprzez teorię dowodu. Ta ostatnia miała być nową dziedziną matematyki, zajmującą się badaniem dowodów matematycznych za pomocą metod matematycznych. Jej zasadniczym celem miało być pokazanie, że stosowanie w dowodach twierdzeń realnych elementów idealnych (w szczególności nieskończoności aktualnej) prowadzi zawsze do poprawnych wyników. Można tu wyróżnić dwa problemy: problem niesprzeczności i problem zachowawczości. Pierwszy polega na wykazaniu (za pomocą metod finitystycznych), że matematyka infinitystyczna jest niesprzeczna (a więc w konsekwencji bezpieczna), natomiast problem zachowawczości sprowadza się do pokazania (znów metodami finitystycznymi), że każde zdanie realne, które można udowodnić stosując metody matematyki infinitystycznej, może być w istocie udowodnione w matematyce finitystycznej. Trzeba wyraźnie podkreślić, że akcent kładziony był przez Hilberta na niesprzeczność (a nie na poprawność).

---

[3] Ja, es ist doch selbsverständlich eine jede Theorie nur ein Fachwerk oder Schema von Begriffen nebst ihren nothwendigen Beziehungen zu einander, und die Grundelemente können in beliebiger Weise gedacht werden. Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger..., denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras auch von diesen Dingen. Mit anderen Worten: eine jede Theorie kann stets auf unendliche viele Systeme von Grundelementen angewandt werden.

[4] W (1902/03, s. 50) Hilbert pisał: „Przez badanie aksjomatyczne prawdy matematycznej rozumiem badanie, którego celem nie jest odkrywanie nowych czy ogólniejszych twierdzeń na podstawie prawd danych, ale badanie, które stawia sobie za cel określenie pozycji danego twierdzenia w ramach systemu prawd [już] znanych oraz ich związków logicznych w taki sposób, że jasno można stwierdzić, które założenia są konieczne i wystarczające do uzasadnienia rozważanej prawdy". (Unter der axiomatischen Erforschung einer mathematischen Wahrheit verstehe ich eine Untersuchung, welche nicht dahin zieht, im Zusammenhange mit jener Wahrheit neue oder allgemeinere Sätze zu entdecken, sondern die vielmehr die Stellung jenes Satzes innerhalb des Systems der bekannten Wahrheiten und ihren logischen Zusammenhang in der Weise klarzulegen sucht, dass sich sicher angeben lässt, welche Voraussetzungen zur Begründung jener Wahrheit notwendig und hinreichend sind.)

Aby zrealizować ten program należało sformalizować teorie matematyczne (nawet całą matematykę jako taką), a następnie badać je jako systemy symboli podlegające określonym i ustalonym regułom kombinatorycznym. Zaletą takiego podejścia było to, że odwołania do obiektów idealnych zostały zastąpione przez rozumowania o charakterze czysto finitystycznym, przez rozumowania dotyczące nie samych (idealnych) obiektów matematycznych, ale symboli pewnego języka sformalizowanego, w którym obiekty te scharakteryzowano aksjomatycznie, tj. na drodze syntaktycznej — bez odwoływania się do rozważań semantycznych. Inną zaletą było to, że, jak to ujął Bernays, „problemy i trudności pojawiające się w podstawach matematyki mogą zostać w ten sposób przetransponowane z poziomu epistemologiczno-filozoficznego do dziedziny czysto matematycznej".

Sformalizowany system aksjomatyczny, o którym mówił Hilbert, powinien spełniać trzy warunki: powinien on być zupełny, niesprzeczny i oparty na niezależnym układzie aksjomatów. Niesprzeczność systemu była kryterium prawdziwości oraz samego istnienia obiektów matematycznych.[5] Hilbert zakładał też, że teoria niesprzeczna jest kategoryczna, że jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) charakteryzuje dziedzinę obiektów, o których mówi. To związane było z kolei z zupełnością.

Sposób rozumienia „zupełności" przez Hilberta jest bardzo istotny dla rozważanego przez nas problemu. Zauważmy na początek, że w *Grundlagen der Geometrie* zupełność była postulowana jako jeden z aksjomatów (aksjomatu tego nie było w pierwszym wydaniu *Grundlagen*, ale znajdujemy go już w tłumaczeniu francuskim, a potem w drugim wydaniu z 1903 roku). Aksjomat ten oznaczony symbolem V(2) stwierdzał: „Elementy geometrii (tj. punkty, proste i płaszczyzny) tworzą system rzeczy, który przy zachowaniu wszystkich wymienionych aksjomatów nie dopuszcza żadnego rozszerzenia".[6] W wykładzie wygłoszonym przez Hilberta na Kongresie Matematyków w Heidelbergu w 1904 roku (por. 1905a) znaleźć można podobny aksjomat dla liczb rzeczywistych. Później zupełność pojawia się jako cecha systemu sformalizowanego. W wykładach „Logische Principien des mathematischen Denkens" (1905, s. 13) Hilbert wyjaśnia żądanie zupełności systemu jako żądanie, by

---

[5] Por. list Hilberta do Fregego z 29 grudnia 1899, w którym twierdził, że „jeżeli dowolnie dane aksjomaty nie przeczą sobie nawzajem ani też swoim konsekwencjom, to są one prawdziwe, a rzeczy zdefiniowane przez te aksjomaty istnieją". (Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge.)

[6] „Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist."

W ostatnich wydaniach *Grundlagen*, począwszy chyba od siódmego z roku 1930, Hilbert zastąpił go aksjomatem liniowej zupełności głoszącym: „Punkty prostej tworzą system, który przy zachowaniu wszystkich poprzednich aksjomatów nie dopuszcza żadnego rozszerzenia". (Die Punkte einer Geraden bilden ein System, welches bei Aufrechterhaltung der linearen Anordnung (Satz 6), des ersten Kongruenzaxioms und des Archimedischen Axioms (d.h. der Axiome I1–2, II, III1, V1) keiner Erweiterung mehr fähig ist.)

przyjęte aksjomaty wystarczały do udowodnienia wszystkich «faktów» rozważanej teorii. Mówi: „Będziemy musieli żądać, by wszystkie pozostałe fakty rozważanej dziedziny wiedzy wynikały z aksjomatów".[7] Z drugiej strony można powiedzieć, że przekonanie Hilberta o rozwiązalności każdego problemu matematycznego — wyrażone na przykład w jego wykładzie paryskim z roku 1900 (por. Hilbert 1901) i powtórzone w wykładzie „Naturerkennen und Logik" (por. Hilbert, 1930a) wygłoszonym na Zjeździe Towarzystwa Niemieckich Przyrodników i Lekarzy w Królewcu we wrześniu 1930 — może być traktowane jako nieformalne odbicie jego przekonania o zupełności teorii aksjomatycznych. W Paryżu Hilbert mówił: „Przekonanie o rozwiązalności każdego problemu matematycznego stanowi dla nas silny bodziec w tej pracy; słyszymy w sobie cały czas zawołanie: *Oto jest problem, szukaj jego rozwiązania. Możesz je znaleźć za pomocą czystego myślenia; w matematyce nie ma żadnego ignorabimus!*"[8] W Królewcu zaś głosił: „Dla matematyka nie ma żadnego *ignorabimus*, [co więcej] jestem przekonany, że nie ma go też w naukach przyrodniczych. [...] Prawdziwym powodem tego, że nikomu nie udało się znaleźć problemu nierozwiązalnego jest według mnie to, że żadnego takiego problemu nie ma. W przeciwieństwie do niemądrego *ignorabimus*, nasze *credo* brzmi: Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć."[9] W wykładzie paryskim Hilbert mówił o zupełności w następujący sposób (por. Hilbert 1901, drugi problem, s. 299—300):

> Kiedy chcemy zbadać podstawy jakiejś nauki, to powinniśmy ustalić system aksjomatów zawierający dokładny i zupełny opis relacji zachodzących pomiędzy podstawowymi pojęciami tej nauki. Ustalone tak aksjomaty stanowią jednocześnie definicje owych pojęć elementarnych i każde twierdzenie w ramach nauki, której podstawy badamy, możemy uznać za zachodzące jedynie wtedy, gdy można je wywieść z przyjętych aksjomatów za pomocą skończenie wielu reguł logicznych.[10]

---

[7] Wir werden verlangen müssen, dass alle übrigen Thatsachen des vorgelegten Wissensbereiches Folgerungen aus den Axiomen sind.

[8] Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* (Hilbert, 1901, s. 298).

[9] Für den Mathematiker gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. [...] Der wahre Grund, warum es [niemand] nicht gelang, ein unlösbares Problem zu finden, besteht meiner Meinung nach darin, daß es ein unlösbares Problem überhaupt nicht gibt. Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung: Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

[10] Wenn es sich darum handelt, die Grundlagen einer Wissenschaft zu untersuchen, so hat man ein System von Axiomen aufzustellen, welche eine genaue und vollständige Beschreibung derjenigen Beziehungen enthalten, die zwischen den elementaren Begriffen jener Wissenschaft stattfinden. Die aufgestellten Axiome sind zugleich die Definitionen jener elementaren Begriffe, und jede Aussage innerhalb des Bereiches der Wissenschaft, deren Grundlage wir prüfen, gilt uns nur dann als richtig, falls sie sich mittels einer endlichen Anzahl logischer Schlüsse aus den aufgestellten Axiomen ableiten läßt.

Można przyjąć, iż zwrot „dokładny i zupełny opis" (*genaue und vollständige Beschreibung*) znaczy tu tyle, co żądanie, by opis ów był zupełny w tym sensie, że na jego podstawie można rozstrzygnąć wartość logiczną każdego twierdzenia badanej teorii. Semantycznie zupełność taka wynika z kategoryczności, tj. z faktu, że każde dwa modele danego systemu aksjomatycznego są izomorficzne; syntaktycznie zupełność taka znaczy, że dla dowolnego zdania w języku rozważanej teorii albo ono samo, albo jego negacja dają się wywieść z przyjętych aksjomatów. Aksjomatyzacje podawane przez Hilberta były zupełne w tym sensie, że były one kategoryczne. Zauważmy jednak, że nie były to aksjomatyzacje w języku pierwszego rzędu. Hilbertowska aksjomatyzacja geometrii podana w *Grundlagen der Geometrie*, jak również jego aksjomatyzacja arytmetyki z 1900 roku — były drugiego rzędu. Każdy z tych systemów zawierał aksjomat Archimedesa, będący zdaniem w języku drugiego rzędu, oraz aksjomat zupełności orzekający, że rozważane struktury są maksymalne, tj. nie dopuszczają żadnego rozszerzenia przy zachowaniu wszystkich pozostałych aksjomatów.[11]

Rozważane żądanie formułowane pod adresem teorii naukowych może właściwie być spełnione jedynie w wypadku teorii odpowiednio mocno już rozbudowanych i rozwiniętych. Z drugiej jednak strony Hilbert formułował postulat zupełności także w odniesieniu do teorii dopiero rozwijanych. W „Mathematische Probleme" pisał (1901, s. 295):

> Niezależnie od tego, czy pojęcia matematyczne pochodzą z rozważań epistemologicznych, czy z geometrii, czy też z teorii przyrodniczych, zadaniem matematyki jest badanie zasad leżących u podstaw tych pojęć i określenie ich poprzez podanie prostego i zupełnego systemu aksjomatów.[12]

Należy tu też wyraźnie powiedzieć, iż Hilbert dopuszczał możliwość, że problem matematyczny może mieć negatywne rozwiązanie, tj. możliwość pokazania, że dany problem nie może być pozytywnie rozwiązany na podstawie przyjętego układu aksjomatów. W „Mathematische Probleme" pisał (1901, s. 297):

> Zdarza się czasami, że poszukujemy rozwiązania przyjąwszy niewystarczające założenia albo też szukamy go w niewłaściwym sensie, i z tego też powodu nie udaje nam się go znaleźć. Powstaje wtedy zadanie wykazania, że niemożliwe jest rozwiązanie przy przyjętych założeniach czy też w żądanym sensie. [...] Zauważmy, że stare i trudne problemy [...] znajdowały w końcu w pełni zadowalające i ścisłe rozwiązanie, aczkolwiek w innym sensie niż początkowo zamierzano. Ten godny uwagi fakt, poza innymi jeszcze powodami natury filozoficznej, jest zapewne przyczyną powstania w nas przekonania [...], iż każdy określony problem matematyczny musi mieć z konieczności ścisłe rozwiązanie albo w formie odpowiedzi na postawione pyta-

[11] Dodajmy, że ten ostatni aksjomat nie był nawet właściwie zdaniem drugiego rzędu.

[12] Wo immer von erkenntnistheoretischer Seite oder in der Geometrie oder aus den Theorien der Naturwissenschaft mathematische Begriffe auftauchen, erwächst der Mathematik die Aufgabe, die diesen Begriffen zugrunde liegenden Prinzipien zu erforschen und dieselben durch einfaches und vollständiges System von Axiomen [...] festzulegen.

nie, albo w postaci wykazania, że rozwiązanie jest niemożliwe i stąd wszystkie próby skazane są z konieczności na niepowodzenie.[13]

W wykładach Hilberta z lat 1917—1918 (por. Hilbert, 1917—18) znajdujemy zupełność w sensie maksymalnej niesprzeczności: system *T* jest zupełny zawsze i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zdania φ, które nie jest twierdzeniem tego systemu, układ $T \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczny.[14]

W wykładzie na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Bolonii w roku 1928 Hilbert sformułował cztery problemy związane ze swoim programem. Dwa spośród nich dotyczyły zupełności: jeden w odniesieniu do rachunku predykatów pierwszego rzędu (chodzi tu o zupełność względem wszelkich możliwych interpretacji, a więc o zupełność semantyczną) oraz drugi w odniesieniu do systemu elementarnej teorii liczb (chodzi tu o formalną zupełność w sensie maksymalnej niesprzeczności, tj. o zupełność w sensie Posta, czyli o zupełność w sensie syntaktycznym) (por. Hilbert, 1930).[15]

Wydaje się, że nacisk na finitystyczność i na metody syntaktyczne wraz z żądaniem zupełności sformalizowanych systemów aksjomatycznych (i przekonaniem, że systemy takie są możliwe) były u Hilberta źródłem i przyczyną tego, że — jak to wyraził Gödel (por. Wang, 1974, s. 9) — „formaliści traktowali formalną dowodliwość jako *analizę* pojęcia prawdy matematycznej i stąd nie byli oczywiście w stanie *od-*

[13] Mitunter kommt es vor, daß wir die Beantwortung unter ungenügenden Voraussetzungen oder in unrichtigem Sinne erstreben und infolgedessen nicht zum Ziele gelangen. Es entsteht dann die Aufgabe, die Unmöglichkeit der Lösung des Problems unter den gegebenen Voraussetzungen und in dem verlangten Sinne nachzuweisen. [...] Und wir nehmen so gewahr, daß alte schwierige Probleme [...] eine völlig befriedigende und strenge Lösung gefunden haben. Diese merkwürdige tatsache neben anderen philosophischen Gründen ist es wohl, welche in uns eine überzeugung entstehen lässt [...] daß ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erledigung notwendig fähig sein müsse, sei es, daß es gelingt die Beantwortung der gestellten Frage zu geben, sei es, daß die Unmöglichkeit seiner Lösung and damit die Notwendigkeit des Mißlingens aller Versuche dargetan wird.

[14] Hilbert pisał w (1917—18), s. 152): „Zajmijmy się teraz problemem *zupełności.* System aksjomatów chcemy nazywać „zupełnym", gdy otrzymamy system sprzeczny, zawsze ilekroć dołączymy doń formułę niedowodliwą w nim". (Wenden wir uns nun zu der Frage der *Vollständigkeit.* Wir wollen das vorgelegte Axiomen-System vollständig nennen, falls durch die Hinzufügung einer bisher nicht ableitbaren Formel zu dem System der Grundformeln stets ein widerspruchsvolles Axiomensystem entsteht.)

[15] W polskiej terminologii logicznej mówimy tu odpowiednio o *pełności* (rachunku predykatów) i o *zupełności* układu aksjomatów dla elementarnej teorii liczb. W pierwszym wypadku chodzi o własność polegającą na tym, że każda tautologia rachunku predykatów, czyli formuła prawdziwa przy każdej interpretacji, jest tezą rachunku, a w drugim wypadku — o własność, że dla każdego zdania φ elementarnej teorii liczb albo φ, albo jego negacja, tj. $\neg\varphi$, jest twierdzeniem teorii. Dodajmy, że w innych językach (na przykład w niemieckim, francuskim, angielskim czy rosyjskim) nie ma tu oddzielnych terminów i w obu przypadkach mówi się po prostu o zupełności.

różnić ich obu".[16] Dodać należy też, że intuicyjne pojęcie prawdy (prawdziwości)[17] nie było w tym czasie w pełni i powszechnie akceptowane jako (dobrze) określone pojęcie matematyczne. Gödel pisał (w skreślonym później fragmencie szkicu swej odpowiedzi na list Yossefa Balasa, studenta University of Northern Iowa): „Pojęcie obiektywnej prawdy matematycznej jako czegoś przeciwstawionego dowodliwości było traktowane z największą podejrzliwością i powszechnie odrzucane jako bezsensowne".[18] Warto to porównać z pewną uwagą Carnapa. Otóż pisze on w swym dzienniku, że kiedy zapraszał Tarskiego, aby opowiedział o pojęciu prawdy na Międzynarodowym Kongresie Filozofii Naukowej we wrześniu 1935 roku, to „Tarski był bardzo sceptyczny. Uważał, że większość filozofów, filozofów pracujących w zakresie nowoczesnej logiki włączając, pozostanie nie tylko obojętna, ale będzie nastawiona wrogo do eksplikacji pojęcia prawdy." Istotnie, w czasie Kongresu „była ogromna opozycja nawet ze strony naszych przyjaciół filozoficznych" (Carnap, 1963, s. 61—62).

Wszystko to wyjaśnia chyba, dlaczego Hilbert wolał odwoływać się w swojej metamatematyce jedynie do kształtu formuł i używać jedynie wnioskowań skończonych (finitarnych), które traktowano jako bezpieczne (w przeciwieństwie do rozważań semantycznych, które nie były finitarne i w konsekwencji nie były bezpieczne). Rozumowania nieskończone były uważane za sensowne tylko w takim zakresie, w jakim mogły być interpretowane czy uzasadnione w języku metamatematyki finitystycznej.[19]

Z drugiej strony nie było wtedy żadnego jasnego odróżnienia pomiędzy syntaktyką a semantyką. Przypomnijmy dla przykładu, że — co wskazywaliśmy już wyżej — u Hilberta systemy aksjomatyczne podawane są często z wbudowaną od razu interpretacją. Trzeba też dodać, że Hilbert nie dysponował jeszcze odpowiednimi pojęciami koniecznymi do wyrażenia (opisania) różnicy pomiędzy syntaktyką i semantyką.

3. Problem zupełności, a dokładniej pełności logiki pierwszego rzędu sformułowany przez Hilberta w wykładzie z Bolonii, został także postawiony w książce Hilberta i Ackermanna *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928). Został on rozwiązany przez Gödla w rozprawie doktorskiej (1929, por. także 1930), w której Gödel pokazał, że logika pierwszego rzędu jest pełna, tj. że każde zdanie prawdziwe (przy dowolnej interpretacji, czyli każda tautologia), jest dowodliwe w tej logice. Co więcej, pokazał on, że każdy niesprzeczny system aksjomatyczny pierwszego rzędu ma model. Gödel przez pełność rozumiał własność polegającą na tym, że „każda formuła prawdziwa wyrażona w węższym rachunku funkcyjnym [...] może być wyprowadzona

---

[16] Formalists considered formal demonstrability to be an *analysis* of the concept of mathematical truth and, therefore were of course not in a position to *distinguish* the two.

[17] Nie było jeszcze wtedy ścisłej definicji Tarskiego, która pojawiła się dopiero w 1933 roku (por. Tarski, 1933).

[18] A concept of objective mathematical truth as opposed to demonstrability was viewed with greatest suspicion and widely rejected as meaningless (por. Wang, 1987, 84—85).

[19] Por. list Gödla do Hao Wanga z 7 grudnia 1967 roku — zob. Wang, 1974, s. 8.

z aksjomatów za pomocą skończonej liczby inferencji". Dodawał przy tym, że jest to równoważne twierdzeniu, iż „każdy niesprzeczny system aksjomatyczny [sformalizowany w ramach węższego rachunku logicznego] [...] ma realizację", i twierdzeniu, że „każde wyrażenie logiczne jest albo spełnione, albo sprzeczne" (w takiej właśnie postaci udowodnił on swój rezultat). Gödel twierdził, że znaczenie tego wyniku polega na tym, iż uzasadnia on „stosowane zwykle metody wykazywania niesprzeczności".

Twierdzenie Gödla o pełności istotnie pokazuje w jakimś sensie równoważność prawdziwości i dowodliwości — równoważność podejścia semantycznego i syntaktycznego. Pokazuje ono, że metody logiczne dopuszczalne przez pojęcie dowodliwości są adekwatne i wystarczające. Trzeba jednak zauważyć, że pojęcie prawdziwości w danej strukturze, centralne dla określenia spełnialności czy prawdziwości, nie zostało nigdzie przez Gödla dokładnie zbadane (ani w samej rozprawie doktorskiej, ani też w jej opublikowanej i zmienionej wersji). Gödel — jak to było wtedy powszechnie przyjęte — posługiwał się intuicyjnym pojęciem spełniania i prawdy (por. prace Löwenheima, Skolema i innych).[20]

Kilka miesięcy później, w 1930 roku, Gödel rozwiązał trzy pozostałe problemy postawione przez Hilberta w Bolonii. Pokazał on mianowicie, że arytmetyka liczb naturalnych i wszystkie teorie bogatsze są istotnie niezupełne (jeśli tylko są niesprzeczne) (por. Gödel 1931). Warto przyjrzeć się, jak Gödel doszedł do tego wyniku. Hao Wang pisze o tym — na podstawie dyskusji i rozmów z Gödlem — tak (por. Wang, 1981):

> [Gödel] reprezentował liczby rzeczywiste za pomocą formuł [...] teorii liczb i zauważył, że musi stosować pojęcie prawdy dla zdań teorii liczb, aby sprawdzić zachodzenie aksjomatu komprehencji dla analizy. Szybko pojawiły się jednak paradoksy (w szczególności paradoks

---

[20] W rozprawie doktorskiej Gödla (1929) znajdujemy takie oto wyjaśnienie na omawiany temat: „Mówimy o pewnym systemie [złożonym z] funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (określonych w tej samej dziedzinie), indywiduów $a_1, a_2, \ldots, a_l$ (należących do tej samej dziedziny), oraz wyrażeń $A_1, A_2, \ldots, A_m$, czyli o systemie

$$S = (f_1, f_2, \ldots, f_k; a_1, a_2, \ldots, a_l; A_1, A_2, \ldots, A_m),$$

że *spełnia* on wyrażenie logiczne, gdy po podstawieniu ich daje w wyniku zdanie prawdziwe (w rozważanej dziedzinie). Stąd wynika bezpośrednio, jak powinno się rozumieć pojęcia *spełniony w pewnej określonej dziedzinie*, *spełniony* po prostu (= istnieje dziedzina, w której spełnione jest wyrażenie), ogólnie prawdziwy [ogólnie zachodzący] w określonej dziedzinie (= negacja nie jest spełniona), [czy] *ogólnie prawdziwy*." (Wir sagen von einem System (sämtlich in demselben Denkbereich definierter) Funktionen, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ und (ebenfalls demselben Denkbereich angehörenden) Individuen, $a $a_1, a_2, \ldots, a_l$ wie Aussagen, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — von diesem System

$$S = (f_1, f_2, \ldots, f_k; a_1, a_2, \ldots, a_l; A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

sagen wir, daß es den logischen Ausdruck *erfülle*, wenn es in denselben eingesetzt einen (in dem betreffenden Denkbereich) wahren Satz ergibt. Daraus erfolgt sich ohneweiteres, was unter *erfüllbar in einem bestimmten Denkbereich*, *erfüllbar* schlechthin (= es gibt einen Denkbereich, in dem der Ausdruck erfüllbar ist), allgemein giltig in einem bestimmten Denkbereich (= Negaton nicht erfüllbar), *allgemein giltig* schlechthin verstanden werden soll.)

kłamcy i paradoks Richarda) związane z prawdą i definiowalnością. Doszedł więc do wniosku, że prawdy dla teorii liczb nie da się zdefiniować w samej teorii liczb i dlatego jego plan [...] nie funkcjonował.[21]

Gödel pisał o swoim odkryciu fenomenu niezupełności w szkicu odpowiedzi na list Balasa z dnia 27 maja 1970 roku (por. Wang, 1987, s. 84—85). Gödel wskazuje tam, że to właśnie zauważenie różnicy pomiędzy formalną definiowalnością pojęcia dowodliwości a formalną niedefiniowalnością pojęcia prawdy doprowadziło go do odkrycia niezupełności. Znajdujemy tam też następujące słowa:

Na długo przedtem znalazłem *poprawne* rozwiązanie paradoksów semantycznych w fakcie, że prawdy dla [danego] języka nie można zdefiniować w nim samym.[22]

Na podstawie tego cytatu twierdzi się czasami, że Gödel doszedł do wyniku o niedefiniowalności pojęcia prawdy niezależnie od Tarskiego (por. Tarski, 1933; tłumaczenie niemieckie — 1936, tłumaczenie angielskie — 1956). Dodać jednak należy wyraźnie zastrzeżenie, że o ile Tarski dowodząc niedefiniowalności pojęcia prawdy dysponował precyzyjną definicją tego ostatniego, o tyle Gödel posługiwał się tylko intuicyjnym (a zatem nieścisłym i nieprecyzyjnym) pojęciem prawdziwości. Powstaje więc zasadniczy problem, w jakim sensie można w ogóle mówić, że Gödel doszedł do tezy o niedefiniowalności pojęcia prawdy.[23]

Zauważmy, że Gödel był przekonany o obiektywności pojęcia prawdy matematycznej. W liście do Hao Wanga (por. Wang, 1974, s. 9) pisał:

Mogę dodać, że moja obiektywistyczna koncepcja matematyki i metamatematyki w ogólności, jak również rozumowań pozaskończonych w szczególności, była fundamentalna także jeśli chodzi o inne moje prace z zakresu logiki. Jakże bowiem można byłoby myśleć o *wyrażeniu* metamatematyki *w* systemach matematycznych, gdyby te ostatnie były rozumiane jako składające się z pozbawionych znaczenia i sensu symboli, które otrzymują jakieś znaczenie jedynie *poprzez* metamatematykę. [...] Należy zauważyć, że zasadą heurystyczną leżącą u podstaw mojej konstrukcji teorioliczbowych zdań nierozstrzygalnych w systemach sformalizowanych matematyki jest wysoce pozaskończone pojęcie „obiektywnej prawdy matematycznej" *przeciwstawione* pojęciu „dowodliwości" (por. M. Davis, *The Undecidable*, New York 1965, s. 64, gdzie wyjaśniam argument heurystyczny, przy pomocy którego doszedłem do wyników o niezupełności), z którym było ono zwykle mylone przed pojawieniem się mojej pracy i pracy Tarskiego.[24]

---

[21] [Gödel] represented real numbers by formulas [...] of number theory and found he had to use the concept of truth for sentences in number theory in order to verify the comprehension axiom for analysis. He quickly ran into the paradoxes (in particular, the Liar and Richard's) connected with truth and definability. He realized that truth in number theory cannot be defined in number theory and therefore his plan [...] did not work.

[22] Long before, I had found the *correct* solution of the semantic paradoxes in the fact that truth in a language cannot be defined in itself.

[23] W sprawie problemu priorytetu w wykazaniu niedefiniowalności pojęcia prawdy por. Woleński (1991) oraz Murawski (1998).

[24] I may add that my objectivist conception of mathematics and metamathematics in general, and

W tej sytuacji należy zapytać, dlaczego Gödel nie wspomina w swoich pracach o niedefiniowalności pojęcia prawdy. W rzeczywistości Gödel unikał nawet terminów „prawda" czy „prawdziwy" (używał w odpowiednich miejscach terminu „richtige Formel" (formuła poprawna) a nie terminu „wahre Formel" (formuła prawdziwa)). W pracy „Über formal unentscheidbare Sätze [...]" (1931) pojęcie formuły prawdziwej pojawia się jedynie pod koniec paragrafu 1, w którym Gödel wyjaśnia zasadniczą ideę dowodu pierwszego twierdzenia o niezupełności (znów jednak pojawia się tu zwrot „inhaltlich richtige Formel" (formuła treściowo poprawna) a nie zwrot „wahre Formel"). Mówienie o konstrukcji formuły, która ma wyrażać własną niedowodliwość, odwołuje się do interpretacji systemu sformalizowanego. Na samym końcu tego wstępnego paragrafu 1 znajdujemy następującą uwagę (zob. Gödel, 1931, s. 175—176):

> Wyjaśniona właśnie metoda dowodu może być oczywiście zastosowana do dowolnego systemu sformalizowanego takiego, że, po pierwsze, jeśli interpretować go treściowo, posiada on wystarczająco wiele środków wyrazu, aby zdefinować pojęcia pojawiające się w powyższych rozważaniach (w szczególności pojęcie „formuły dowodliwej") oraz, po drugie, każda formuła dowodliwa jest treściowo poprawna. Podany poniżej dokładny dowód ma za zadanie między innymi i to, żeby zastąpić drugie wymienione założenie poprzez pewne inne czysto formalne i znacznie słabsze założenie.[25]

(Dodajmy tutaj, że owo „czysto formalne i znacznie słabsze założenie", o którym mówił Gödel, to założenie ω-niesprzeczności, czyli założenie, że dla każdej formuły z jedną zmienną wolną $\varphi(x)$, jeżeli w rozważanej teorii udowodnić można zdania $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ..., $\varphi(n)$, ... ($n \in \mathbf{N}$), to nie można w niej dowieść formuły $\exists x \neg\varphi(x)$.)

Z drugiej strony termin „prawda" pojawia się w wykładach Gödla na temat niezupełności wygłoszonych w Institute for Advanced Syudy w Princeton wiosną 1934 roku.[26] Rozważał on tam m.in. związki między istnieniem zdań nierozstrzygalnych

---

of transfinite reasoning in particular, was fundamental also to my other work in logic. How indeed could one think of *expressing* metamathematics *in* the mathematical systems themselves, if the latter are considered to consist of meaningless symbols which acquire some substitute of meaning only *through* metamathematics [...] it should be noted that the heuristic principle of my construction of undecidable number theoretical propositions in the formal systems of mathematics is the highly transfinite concept of „objective mathematical truth" as *opposed* to that of „demonstrability" (por. M. Davis, *The Undecidable*, New York 1965, p. 64 where I explain the heuristic argument by which I arrive at the incompleteness results), with which it was generally confused before my own and Tarski's work.

[25] Die eben auseinandergesetzte Beweismethode läßt sich offenbar auf jedes formale System anwenden, das erstens inhaltlich gedeutet über genügend Ausdrucksmittel verfügt, um die in der obigen Überlegung vorkommenden Begriffe (insbesondere den Begriff „beweisbare Formel") zu definieren, und in dem zweitens jede beweisbare Formel auch inhaltlich richtig ist. Die nun folgende exakte Durchführung des obigen Beweises wird unter anderem die Aufgabe haben, die zweite der eben angeführten Voraussetzungen durch eine rein formale und weit schwächere zu ersetzen.

[26] Notatki do tych wykładów sporządzone przez S.C. Kleene'ego i J.B. Rossera zostały opublikowane w 1965 roku (por. Gödel, 1934).

a możliwością zdefiniowania pojęcia „zdanie prawdziwe (fałszywe)" danego języka w samym tym języku. Rozważając stosunek zastosowanego przez siebie rozumowania do paradoksów, w szczególności do paradoksu kłamcy, Gödel wskazuje, że paradoksy znikają, gdy zauważy się, iż pojęcie „twierdzenie fałszywe w języku *B*" nie może być wyrażone w *B*. Co więcej, „paradoks można traktować jako dowód tego, że pojęcie „stwierdzenie fałszywe w języku *B*" nie może być wyrażone w *B*". W przypisie 25 (dodanym do wersji opublikowanej w Davis, 1965) Gödel pisał:

> Bliższe badania nad tym faktem zawierają prace A. Tarskiego opublikowane w *Trav. Soc. Sci. Lettr. de Varsovie*, Cl. III, No. 34, 1933 (po polsku) (przetłumaczone w: *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938 by A. Tarski*, w szczególności patrz s. 247 nn.) oraz w *Philosophy and Phenom. Res.* 4 (1944), s. 341—376. W obu tych pracach zbadano systematycznie pojęcie prawdy w odniesieniu do zdań [danego] języka. Patrz także R. Carnap, *Mon. Hefte f. Math. u. Phys.*} 4 (1934), s. 263.[27]

O racjach leżących u podstaw twierdzeń o niezupełności mówił Gödel wyraźnie także w odpowiedzi na list A.W. Burksa. Odpowiedź ta została przytoczona w książce von Neumanna *Theory of Self-Reproducing Automata*, 1966, s. 55—56. Gödel pisał:

> Myślę, że moje twierdzenie, na które powołuje się von Neumann, to ani nie twierdzenie o istnieniu zdań nierozstrzygalnych, ani nie twierdzenie na temat długości dowodów, lecz raczej fakt, iż pełny opis epistemologiczny języka *A* nie może być podany w samym języku *A*, ponieważ pojęcia prawdy zdań *A* nie można zdefiniować w *A*. To właśnie to twierdzenie jest prawdziwą racją istnienia zdań nierozstrzygalnych w systemach sformalizowanych zawierających arytmetykę. Nie sformułowałem go jednak wyraźnie w swojej pracy z 1931 roku; zrobiłem to dopiero w wykładach z Princeton z roku 1934. To samo twierdzenie zostało udowodnione przez Tarskiego w jego pracy na temat pojęcia prawdy opublikowanej w 1933 roku w *Act. Soc. Sci. Lit. Vars.*, tłumaczenie [angielskie] na stronach 152—278 [książki] *Logic, Semantics and Metamathematics*.[28]

---

[27] For a closer examination of this fact see A. Tarski's papers published in: *Trav. Soc. Sci. Lettr. de Varsovie*, Cl. III, No. 34, 1933 (Polish) (translated in: *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938 by A. Tarski*, see in particular p. 247 ff.) and in *Philosophy and Phenom. Res.* 4 (1944), p. 341—376. In these two papers the concept of truth relating to sentences of a language is discussed systematically. See also: R. Carnap, *Mon. Hefte f. Math. u. Phys.* 4 (1934), p. 263.

[28] I think the theorem of mine which von Neumann refers to is not that on the existence of undecidable propositions or that on the length of proofs but rather the fact that a complete epistemological description of a language *A* cannot be given in the same language *A*, because the concept of truth of sentences of *A* cannot be defined in *A*. It is this theorem which is the true reason for the existence of the undecidable propositions in the formal systems containing arithmetic. I did not, however, formulate it explicitly in my paper of 1931 but only in my Priceton lectures of 1934. The same theorem was proved by Tarski in his paper on the concept of truth published in 1933 in *Act. Soc. Sci. Lit. Vars.*, translated on pp. 152—278 of *Logic, Semantics and Metamathematics*.

Dlaczego Gödel unikał pojęcia prawdy? Odpowiedź na to pytanie można znaleźć w wykreślonym fragmencie szkicu odpowiedzi Gödla na list Balasa. Gödel pisał tam:

> Jednakże na skutek filozoficznych przesądów naszych czasów: 1. nikt nie szukał dowodu względnej niesprzeczności, ponieważ za aksjomat uchodziło to, że dowód niesprzeczności musi być finitystyczny, aby w ogóle miał sens; 2. pojęcie obiektywnej prawdy matematycznej jako przeciwstawione dowodliwości było traktowane z największą podejrzliwością i powszechnie odrzucane jako bezsensowne.[29]

Dochodzimy w ten sposób do wniosku, który Feferman sformułował w (1984) tak:

> Gödel obawiał się, że praca zakładająca takie pojęcie [tj. pojęcie prawdy matematycznej — RM] zostałaby odrzucona przez głównych specjalistów od podstaw matematyki, wśród których dominowały wówczas idee Hilberta. Próbował więc wyekstrahować z niej wyniki, które miałyby w pełni sens nawet dla tych, którzy unikają wszelkich metod niefinitystycznych w matematyce.[30]

Zauważmy jednak, że choć Gödel próbował unikać stosowania pojęć nieakceptowanych przez ówczesny «establishment» w podstawach matematyki, to jego własna filozofia matematyki była w istocie platońska. Był przekonany, że:

> To właśnie antyplatoński przesąd uniemożliwił innym dojście do moich wyników. Ten fakt jest jasnym dowodem na to, że przesąd ten jest błędem.[31]

Należy zaznaczyć, że Tarski był wolny od tego rodzaju ograniczeń. Istotnie, w Szkole Lwowsko-Warszawskiej nie formułowano żadnych wstępnych ograniczeń przed przystąpieniem do właściwych badań. Głównymi wymaganiami, które stawiano badaniom było żądanie jasności, unikanie myślenia spekulatywnego oraz sceptycyzm w stosunku do zasadniczych problemów filozofii tradycyjnej. Podstawową metodą, którą należało stosować, była analiza logiczna. Szkoła Lwowsko-Warszawska nie była tak radykalna w swym krytycyzmie wobec metafizyki jak Koło Wiedeńskie.[32]

Tarski przy rozmaitych okazjach podkreślał, że badania matematyczne i logiczne nie powinny być ograniczane przez żadne ogólne poglądy filozoficzne. W szczególności w (1930) pisał:

---

[29] However in consequence of the philosophical prejudices of our times: 1. nobody was looking for a relative consistency proof because [it] was considered axiomatic that a consistency proof must be finitary in order to make sense; 2. a concept of objective mathematical truth as opposed to demonstrability was viewed with greatest suspicion and widely rejected as meaningless.

[30] Gödel feared that work assuming such a concept [i.e., the concept of mathematical truth — RM] would be rejected by the foundational establishment, dominated as it was by Hilbert's ideas. Thus he sought to extract results from it which would make perfectly good sense even to those who eschewed all non-finitary methods in mathematics.

[31] It was the anti-Platonic prejudice which prevented people from getting my results. This fact is a clear proof that the prejudice is a mistake. (Por. Wang Hao, 1996, s. 83).

[32] Por. na przykład Woleński (1989) i (1995).

> Na zakończenie należy zauważyć, że w pracy tej nie przyjmujemy żadnego szczególnego poglądu w zakresie podstaw matematyki.[33]

A w pracy (1954) pisał:

> Za istotny wkład szkoły polskiej w rozwój metamatematyki można uważać fakt, iż od samego początku dopuszczano w badaniach metamatematycznych wszelkie owocne metody, zarówno finitystyczne, jak i niefinitystyczne.[34]

W związku z tym Tarski — nie ukrywając swych sympatii dla nominalizmu — swobodnie stosował w swych badaniach logicznych i matematycznych abstrakcyjne i ogólne pojęcia, których nominaliści starali się unikać.

Tarski w swojej słynnej pracy z 1933 roku nie tylko pokazał niedefiniowalność pojęcia prawdy, ale przede wszystkim — i to jest jego główna zasługa — podał ścisłą indukcyjną definicję spełniania i prawdziwości. W związku z tym warto zapytać, czy Gödel widział konieczność analizy pojęcia prawdy (zauważmy, że w swojej rozprawie doktorskiej *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* (1929) i w pracy „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls" (1930) o pełności rachunku predykatów pierwszego rzędu stosował on intuicyjne pojęcie prawdy, podobnie jak Löwenheim czy Skolem). Odpowiedź jest pozytywna. Otóż w liście do Carnapa z 11 września 1932 roku pisał:

> Na podstawie tych pomysłów podam w drugiej części swojej pracy definicję [pojęcia] „prawdziwości".[35]

Köhler wyjaśnia w (1991), że „druga część mojej pracy" oznacza tutaj projektowaną wspólnie przez Gödla i Heytinga pracę przeglądową (dla Springer-Verlag, Berlin) na temat aktualnie prowadzonych badań w logice matematycznej. Heyting napisał swoją część, część zaś, którą miał napisać Gödel, nigdy nie powstała (powodem były tu chyba jego kłopoty zdrowotne). Można przypuszczać, że Gödel zamierzał rozwinąć w niej teorię prawdy na podstawie teorii mnogości.

Twierdzenie Gödla o pełności logiki pierwszego rzędu i jego odkrycie fenomenu niezupełności wraz z niedefiniowalnością pojęcia prawdy z jednej strony oraz fakt definiowalności pojęcia formalnej dowodliwości z drugiej pokazały, że nie można traktować tej ostatniej jako analizy prawdy — że dowodliwość jest w istocie czymś słabszym niż prawdziwość. W ten sposób okazało się, że marzenia Hilberta, by usprawiedliwić i ugruntować matematykę klasyczną przy pomocy środków finitystycznych nie dają się w pełni zrealizować. Wyniki te wraz z definicją Tarskiego poję-

---

[33] In conclusion it should be noted that no particular philosophical standpoint regarding the foundations of mathematics is presupposed in the present work.

[34] As an essential contribution of the Polish school to the development of metamathematics one can regard the fact that from the very beginning it admitted into metamathematical research all fruitful methods, whether finitary or not.

[35] Ich werde auf Grund dieses Gedankens im II. Teil meiner Arbeit eine Definition für „wahre" geben (cytat według Köhler, 1991).

cia prawdy (w strukturze) oraz pracami Carnapa na temat składni logicznej pozwoliły na wyodrębnienie i ukształtowanie w latach trzydziestych syntaktyki i semantyki.

Należy jednocześnie dodać, że Gödel podzielał Hilbertowski „optymizm racjonalistyczny" (by użyć tu zwrotu Hao Wanga) — jeśli chodzi o dowody niesformalizowane. Istotnie, traktował on matematykę jako system prawd, który jest zupełny w tym sensie, że „każde precyzyjnie sformułowane pytanie matematyczne, na które odpowiedź brzmi „tak" lub „nie", musi mieć jednoznaczną odpowiedź"[36] (por. Gödel, 1970). Odrzucał jednak — w świetle twierdzenia o niezupełności — myśl, że podstawą tych prawd jest ich dowodliwość na podstawie aksjomatów. W swym wykładzie z 1951 roku Gödel rozróżnił system wszystkich prawdziwych zdań matematycznych i system wszystkich dowodliwych zdań matematycznych, nazywając je, odpowiednio, „matematyką w sensie obiektywnym" i „matematyką w sensie subiektywnym". Twierdził też, że żaden system aksjomatyczny nie może w pełni objąć matematyki obiektywnej.

4. Twierdzenia Gödla pokazały, że nie można osiągnąć całej prawdy za pomocą dowodliwości — czyli za pomocą finitystycznych metod syntaktycznych (jak to proponował w swym programie Hilbert). Prawda może być jedynie aproksymowana za pomocą dowodliwości. W tej sytuacji można było postawić pytanie, jak należy rozszerzyć finitystyczny punkt widzenia Hilberta.

Hilbert w wykładzie wygłoszonym w Hamburgu w grudniu 1930 roku (por. Hilbert, 1931) zaproponował przyjęcie nowej reguły wnioskowania. Miała to być reguła podobna do ω-reguły, ale o charakterze raczej niesformalizowanym, przez co system otrzymany przez jej dołączenie byłby semi-sformalizowany. Hilbert proponował mianowicie, by w wypadku formuły bezkwantyfikatorowej $A(z)$, dla której pokazano za pomocą metod finitystycznych, że $A(z)$ jest poprawna (*richtig*) dla każdego podstawienia liczebnika w miejsce z, dopuścić jej uniwersalne domknięcie, tj. formułę $\forall z\, A(z)$ jako nową przesłankę (*Ausgangsformel*) w dalszych dowodach.

We wstępie do pierwszego tomu opublikowanej wspólnie z Bernaysem monografii *Grundlagen der Mathematik* (1934/1939) Hilbert pisał:

> Głoszona czasem opinia, iż z wyników Gödla wynika nierealizowalność mojej teorii dowodu, okazuje się błędna. Wynik ten pokazuje w istocie tylko, że w wypadku bardziej zaawansowanych dowodów niesprzeczności stosować należy skończony punkt widzenia w głębszym sensie niż to jest konieczne w wypadku rozważania formalizmów elementarnych.[37]

---

[36] Every precisely formulated yes-or-no question in mathematics must have a clear-cut answer.

[37] Die zeitweilig aufgekommene Meinung, aus gewissen neueren Ergebnissen von Gödel folge die Undurchführbarkeit meiner Beweistheorie, als irrtümlich erwiesen ist. Jenes Ergebnis zeigt in der Tat auch nur, daß man für die weitergehenden Widerspruchsfreiheitsbeweise den finiten Standpunkt in einer schärferen Weise ausnutzen mu\ss, als dieses bei der Betrachtung der elementaren Formalismen erforderlich ist.

Gödel w wielu miejscach wskazywał na to, że potrzebne są nowe aksjomaty, by rozstrzygnąć zarówno arytmetyczne, jak i teoriomnogościowe zdania nierozstrzygalne. W przypisie 48ª do pracy (1931) pisał:

Prawdziwa przyczyna niezupełności, która związana jest z wszelkimi systemami sformalizowanymi w matematyce, leży, jak to zostanie pokazane w części II tej pracy, w tym, że tworzenie ciągle wyższych typów można przedłużać w pozaskończoność (por. Hilbert, 1926, s. 184), podczas gdy w każdym systemie sformalizowanym mamy ich jedynie co najwyżej przeliczalnie wiele. Można pokazać, że wskazane tutaj zdania nierozstrzygalne staną się rozstrzygalne po dołączeniu odpowiednich wyższych typów (na przykład typu ω do systemu *P*). Coś podobnego zachodzi także dla systemu aksjomatycznego teorii mnogości.[38]

W pracy (1931?, s. 34) stwierdza, że „istnieją problemy teorioliczbowe, które można rozwiązać nie za pomocą metod teorii liczb, lecz jedynie za pomocą metod analitycznych czy też teoriomnogościowych."[39] W (1933, s. 48) pisał zaś, że „istnieją zdania arytmetyczne, których nie można dowieść nawet w analizie, a które mogą być uzyskane jedynie za pomocą metod stosujących duże nieskończone liczby kardynalne czy podobne środki."[40] W (1972) (jest to poprawiona i rozszerzona wersja angielska pracy (1958)) Gödel twierdził, że konkretne środki finitystyczne są niewystarczające dla dowodu niesprzeczności elementarnej teorii liczb oraz że trzeba tu użyć pewnych pojęć abstrakcyjnych.

W pracy (1946) Gödel wyraźnie sugerował konieczność stosowania coraz to silniejszych teorii pozaskończonych, by uzyskać nowe twierdzenia arytmetyczne. Pisał tam (s. 151):

Rozważmy dla przykładu pojęcie dowodliwości. Wiadomo, że niezależnie od tego, w jaki sposób sprecyzuje się je za pomocą formalizmu, rozważanie tego formalizmu prowadzi do nowych aksjomatow, które są dokładnie tak samo oczywiste i uzasadnione jak te, od których zaczynaliśmy i że ten proces rozszerzania można iterować w pozaskończoność. Nie istnieje zatem jeden formalizm, który obejmowałby wszystkie te kroki; nie wyklucza to jednak, że wszystkie te kroki (czy przyjnajmniej wszystkie te, które dają coś nowego w zakresie interesujących nas zdań) mogą być opisane i zebrane razem w pewien niekonstruktywny sposób.[41]

---

[38] Der wahre Grund für die Unvollständigkeit, welche allen formalen Systemen der Mathematik anhaftet, liegt, wie im II. Teil dieser Abhandlung gezeigt werden wird, darin, daß die Bildung immer höcherer Typen sich ins Transfinite fortsetzen läßt (vgl. Hilbert 1926, s. 184), während in jedem formalen System höchstens abzählbar viele vorhanden sind. Man kann nämlich zeigen, daß die hier aufgestellten unentscheidbaren Sätzen durch Adjunktion passender höcherer Typen (z.B. des Types ω zum System *P*) immer entscheidbar werden. Analoges gilt auch für das Axiomensystem der Mengenlehre.}

[39] Es [gibt] zahlentheoretische Probleme, die sich nicht mit zahlentheoretischen sondern nur mit analytischen bzw. mengentheoretischen Hilfsmitteln lösen lassen.

[40] There are arithmetic propositions which cannot be proved even by analysis but only by methods involving extremely large infinite cardinals and similar things.

[41] Let us consider, e.g., the concept of demonstrability. It is well known that, in whichever way you make it precise by means of a formalism, the contemplation of this very formalism gives rise to

Uwagi te zgadzają się ze słowami Carnapa, który w (1934, s. 274) pisał:

> *Wszystko w matematyce można sformalizować, ale matematyki nie można wyczerpać za pomocą jednego systemu*; przeciwnie wymaga ona szeregu coraz to bogatszych języków.[42]

Uwagi powyższe można porównać z uwagami Turinga z pracy (1939). We wstępie do niej Turing pisał:[43]

> Znane twierdzenie Gödla (1931) pokazuje, że każdy system logiki jest w pewnym sensie niezupełny, ale jednocześnie wskazuje ono też środki, za pomocą których z systemu logiki L można otrzymać zupełniejszy system L'. Powtarzając ten proces otrzymujemy ciąg [systemów] L, $L_1 = L'$, $L_2 = L_1'$, ..., z których każdy jest zupełniejszy niż [system go] poprzedzający. W ten sposób można skonstruować logikę L_ω taką, że [zbiór] twierdzeń w niej dowodliwych jest równy zbiorowi twierdzeń dowodliwych za pomocą logik L, L_1, L_2, [...]. Postępując w ten sposób przyporządkowujemy każdej konstruktywnej liczbie porządkowej pewien system logiki. Można zapytać, czy taki system logik jest zupełny w tym sensie, że każdemu problemowi A odpowiada liczba porządkowa α taka, że A jest rozwiązywalne za pomocą logiki L_α.[44]

Także Zermelo proponował dopuszczenie metod nieskończonych w celu przezwyciężenia ograniczeń ujawnionych przez twierdzenia Gödla o niezupełności. Zermelo twierdził, że istnienie zdań nierozstrzygalnych jest konsekwencją ograniczenia pojęcia dowodu do metod finitystycznych (mówił nawet o „przesądzie finitystycznym"). Utrzymywał, że sytuację tę można zmienić używając ogólniejszego «schematu» dowodów. Zermelo miał na myśli logikę infinitarną, w której dopuszcza się formuły nieskończenie długie i reguły wnioskowania o nieskończenie wielu przesłankach. Sądził, że w takiej logice „*wszystkie* zdania są rozstrzygalne". Dodajmy jednak, że Zermelo pojmował dowód nie jako formalną dedukcję z danych aksjomatów, lecz jako metamatematyczne ustalenie prawdziwości czy fałszywości rozważanego zdania. Tak więc rozważania syntaktyczne nie odgrywały u niego żadnej roli.

---

new axioms which are exactly as evident and justified as those with which you started, and that this process of extension can be iterated into the transfinite. So there cannot exist any formalism which would embrace all these steps; but this does not exclude that all these steps (or at least all of them which give something new for the domain of propositions in which you are interested) could be described and collected together in some non-constructive way.

[42] *Alles Mathematische ist formalisierbar; aber die Mathematik ist nicht durch Ein System erschöpfbar*, sondern erfordert eine Reihe immer reicherer Sprachen.

[43] W sprawie pomysłu Turinga por. także prace Fefermana (1962) i (1988).

[44] The well-known theorem of Gödel (1931) shows that every system of logic is in a certain sense incomplete, but at the same time it indicates means whereby from a system L of logic a more complete system L' may be obtained. By repeating the process we get a sequence L, $L_1 = L'$, $L_2 = L_1'$, ..., each more complete than the proceeding. A logic L_ω may then be constructed in which the provable theorems are the totality of theorems provable with the help of logics L, L_1, L_2, ... Proceeding in this way we can associate a system of logic with any constructive ordinal. It may be asked whether such a sequence of logics of this kind is complete in the sense that to any problem A there corresponds an ordinal α such that A is solvable by means of the logic L_α.

5. Przedstawiliśmy powyżej, jak dojrzewała świadomość różnicy pomiędzy prawdziwością a dowodliwością w matematyce. Wskazaliśmy przy tym na rolę, jaką w tym procesie odegrały wyniki Gödla o niezupełności teorii sformalizowanych oraz na próby przezwyciężenia tych ograniczeń poprzez rezygnację z warunku finitystyczności i dopuszczenie metod infinitarnych w pojęciu dowodu matematycznego. Na zakończenie należy zwrócić uwagę na jedną jeszcze kwestię, a mianowicie na istotne znaczenie dla dyskutowanego problemu przyjmowanych założeń filozoficznych. Otóż dla ścisłych formalistów oraz dla intuicjonistów problem rozróżnienia pomiędzy prawdą a dowodem w ogóle nie istnieje. Dla nich bowiem twierdzenie matematyczne jest prawdziwe, gdy jest dowodliwe, przy czym dowody pojmują oni jako nasze własne konstrukcje syntaktyczne czy mentalne. Z kolei dla zwolenników platonizmu (realizmu) w filozofii matematyki sytuacja jest diametralnie różna. Można powiedzieć, że to właśnie platońskie podejście do matematyki umożliwiło Gödlowi zarówno samo postawienie problemu, jak również doprowadziło go do zrozumienia i wykazania różnicy pomiędzy dowodliwością a prawdziwością.[45]

LITERATURA CYTOWANA

Carnap, R.: 1934, „Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 41, 263—284.

Carnap R.: 1963, „Intellectual Autobiography". [W:] Schilpp, P.A. (red.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court Publishing Co., La Salle, Ill., 3—84.

Davis, M. (red.): 1965, *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett, N.Y.

Feferman, S.: 1962, „Transfinite Recursive Progressions of Axiomatic Theories", *Journal of Symbolic Logic* 27, 259—316.

Feferman, S.: 1984, „Kurt Gödel: Conviction and Causation". [W:] *Philosophia Naturalis*, a special issue, Weingartner, P. *et al.* (red.), *Philosophy of Science — History of Science. A Selection of Contributed Papers of the 7th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Salzburg, 1983*, Meisenheim/Glan (Verlag Anton Hain). Przedrukowane w: Shanker, S.G. (red.) *Gödel's Theorem in Focus*, Croom Helm, London 1988, 96—114.

Feferman, S.: 1988, „Turing and the Land of *O*(*z*)". [W:] Herken, R. (red.) *The Universal Turing Machine — A Half-Century Survey*, Oxford University Press, New York and Oxford, 113—147.

Frege G.: 1976, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, Ch. Thiel, A. Veraart (opr.), Felix Meiner Verlag, Hamburg.

Gödel, K.: 1929, „Über die Vollständigkeit des Logikkalküls", rozprawa doktorska, opublikowana (wraz z tłumaczeniem angielskim) w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. I, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York, and Clarendon Press, Oxford, 1986, 60—101.

Gödel, K.: 1930, „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 349—360. Przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim „The

[45] Dodajmy tu, że Hilberta nie interesowały kwestie filozoficzne i w związku z tym w ogóle ich nie rozważał.

Completeness of the Axioms of the Functional Calculus of Logic" w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. I, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York, and Clarendon Press, Oxford, 1986, 102—123.

Gödel, K.: 1931, „Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme. I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38, 173—198. Przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim „On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems" w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. I, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York, and Clarendon Press, Oxford 1986, 144—195.

Gödel, K.: 1931?, „Über unentscheidbare Sätze"; po raz pierwszy opublikowane (oryginał niemiecki i tłumaczenie angielskie „On Undecidable Sentences") w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. III, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York and Oxford 1995, 30—35.

Gödel, K.: 1933, „The Present Situation in the Foundations of Mathematics"; po raz pierwszy opublikowane w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. III, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York and Oxford 1995, 45—53.

Gödel, K.: 1934, *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems* (mimeographed lecture notes, taken by S.C. Kleene and J.B. Rosser), Princeton; przedruk ze zmianami w: Davis, M. (red.) *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett, New York 1965, 39—74. Także w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. I, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York, and Clarendon Press, Oxford 1986, 346—371.

Gödel, K.: 1946, „Remarks Before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics", 1—4; po raz pierwszy opublikowane w: Davis, M. (red.) *The Undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems, and Computable Functions*, Raven Press, Hewlett, NY,1965, 84—88. Przedruk w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. II, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York and Oxford, 1990, 150—153.

Gödel, K.: 1951, „Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications"; po raz pierwszy opublikowane w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. III, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York and Oxford 1995, 304—323.

Gödel, K.: 1958, „Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica* 12, 280—287. Przedruk wraz z tłumaczeniem angielskim „On a Hitherto Unutilized Extension of the Finitary Standpoint" w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. II, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York and Oxford, 1990, 240—251.

Gödel, K.: 1970, „The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy"; po raz pierwszy opublikowane (oryginał niemiecki i tłumaczenie angielskie) w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. III, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York and Oxford 1995, 374—387.

Gödel, K.: 1972, „On an Extension of Finitary Mathematics Which Has Not Yet Been Used", poprawiona i rozszerzona wersja angielska pracy (Gödel, 1958), miała się ukazać w czasopiśmie *Dialectica*, po raz pierwszy opublikowana w: Gödel, K. *Collected Works*, vol. II, Feferman, S. *et al.* (opr.), Oxford University Press, New York and Oxford 1990, 271—280.

Heijenoort, J. van (red.): 1967, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879—1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Hilbert D.: 1899, *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals*, B.G. Teubner, Leipzig, 3—92.

Hilbert D., 1900, „Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung* 8, 180—184.

Hilbert, D.: 1901, „Mathematische Probleme", *Archiv der Mathematik und Physik* 1, 44—63 and 213—237. Przedruk w: Hilbert, D. Gesammelte Abhandlungen, Verlag von Julius Springer, Berlin, Bd. 3, 290—329. Tłumaczenie angielskie: „Mathematical Problems", *Bulletin of the American Mathematical Society* 8 (1901—2), 437—479; także w: Browder, F. (red.) *Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems*, Proceedings of the Symposia in Pure Mathematics 28, American Mathematical Society, Providence, RI, 1976, 1—34.

Hilbert D., 1902//03, „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck", *Proceedings of the London Mathematical Society* 35, 50—68.

Hilbert D., 1903, *Grundlagen der Geometrie*, wydanie drugie, Teubner, Leipzig.

Hilbert D., 1905, „Logische Principien des mathematischen Denkens", Lecture notes by E. Hellinger, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen, Sommer-Semester 1905. Rękopis nieopublikowany.

Hilbert D., 1905a, „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik". [W:] Krazer, A. (red.), *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Teubner, Leipzig, 174—185. Tłumaczenie angielskie: „On the Foundations of Logic and Arithmetic" w: Heijenoort, J. van (red.) 1967, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879—1931*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 129—138.

Hilbert D., 1917—18, „Prinzipien der Mathematik", Lecture notes by P. Bernays. Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen, Wintersemester 1917—18. Rękopis nieopublikowany.

Hilbert D., 1918, „Axiomatisches Denken", *Mathematische Annalen* 78, 405—415. Przedruk w: Hilbert, D. *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Verlag von Julius Springer, Berlin, 146—177.

Hilbert D., 1930, „Probleme der Grundlegung der Mathematik", *Mathematische Annalen* 102, 1—9.

Hilbert, D.: 1930a, „Naturerkennen und Logik", *Naturwissenschaften* 18, 959—963; przedruk w: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Verlag von Julius Springer, Berlin 1935, 378—387.

Hilbert D., 1931, „Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie", *Mathematische Annalen* 104, 485—494; przedruk w: Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Verlag von Julius Springer, Berlin 1935, 192—195.

Hilbert, D. and Ackermann, W.: 1928, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Verlag von Julius Springer, Berlin. Tłumaczenie angielskie wydania drugiego: *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea Publishing Company, New York 1950.

Hilbert, D. and P. Bernays (1934//1939): *Grundlagen der Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, Bd. I 1934, Bd. II 1939.

Köhler, E.: 1991, „Gödel und der Wiener Kreis". [W:] Kruntorad, P. (red.), *Jour Fixe der Vernunft*, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 127—158.

Murawski R., 1998, „Undefinability of Truth. The Problem of the Priority: Tarski vs Gödel", *History and Philosophy of Logic* 19, 153—160.

Neumann von, J.: 1966, *Theory of Self-Reproducing Automata*, A.W. Burks (opr.), University of Illinois, Urbana.

Rowe, D.E.: 1989, „Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition", *Osiris* (2) 5, 186—213.

Rosser, J.B.: 1937, „Gödel Theorems for Non-Constructive Logics", *Journal of Symbolic Logic* 2, 129—137.

Tarski, A.: 1930, „Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 361—404. Tłumaczenie angielskie „Fundamental

Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences" w: *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers From 1923 To 1938*, Clarendon Press, Oxford 1956, 60—109.

Tarski, A.: 1933, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Nakładem Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Warszawa.

Tarski, A.: 1936, „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica* 1, 261—405 (nadbitki z datą 1935).

Tarski, A.: 1954, „Contributions to the Discussion of P. Bernays, *Zür Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung*", *Revue Internationale de Philosophie* 8, 16—20.

Tarski, A.: 1956, „The Concept of Truth in Formalized Languages". [W:] *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers From 1923 To 1938*, Clarendon Press, Oxford 1956, 152—278.

Turing, A.: 1939, „Systems of Logic Based on Ordinals", *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2 45, 161—228. }

Wang, Hao: 1974, *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.

Wang, Hao: 1981, „Some Facts About K. Gödel", *Journal of Symbolic Logic* 46, 653—659.

Wang, Hao: 1987, *Reflections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Wang, Hao, 1996, *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, England.

Woleński, J.: 1989, *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Woleński, J.: 1991, „Gödel, Tarski and the Undefinability of Truth". [W:] *Yearbook 1991 of the Kurt Gödel Society* (Jahrbuch 1991 der Kurt-Gödel-Gesellschaft), Wien, 97—108. Przedruk w: J. Woleński, *Essays in the History of Logic and Logical Philosophy*, Jagiellonian University Press, Kraków 1999, 134—138.

Woleński, J.: 1995, „Mathematical Logic in Poland 1900—1939: People, Circles, Institutions, Ideas", *Modern Logic* 5, 363—405.