Filozofia Nauki
Rok IX, 2001, Nr 1(33)

Krzysztof Wójtowicz

Naturalizm w filozofii matematyki[1]

We współczesnej filozofii matematyki żywo dyskutowane jest zagadnienie uzasadniania aksjomatów matematycznych i zdań niezależnych. Prace Maddy [Maddy 1988a, 1988b] – w których autorka koncentruje się na teorii mnogości — to obszerne studia poświęcone temu problemowi. W monografii [Maddy 1997] autorka podejmuje problem uzasadniania zdań teorii mnogości w nowym ujęciu, wychodząc od odmiennego stanowiska metafilozoficznego.

W poniższym artykule (stanowiącym pierwszą część dwuczęściowej całości) zaprezentowana zostanie — możliwie wiernie i bez komentarzy (z wyjątkiem mającego charakter wstępny rozdziału pierwszego oraz przypisów, gdzie zamieszczam niekiedy dodatkowe wyjaśnienia, informacje i komentarze) — koncepcja Maddy. W pracy [Wójtowicz 2001] poddana ona zostanie krytycznej analizie.

1. PROBLEM ZDAŃ NIEZALEŻNYCH

Podstawową teorią matematyczną jest teoria mnogości Zermela-Fraenkla (ZFC). W zasadzie cała matematyka (teoria liczb naturalnych, rzeczywistych, analiza rzeczywista i zespolona, topologia, teoria prawdopodobieństwa i wiele innych) daje się odtworzyć (zrekonstruować) w ZFC. Wszelkie obiekty matematyczne (liczby, miary, przestrzenie topologiczne, rozmaitości różniczkowe, *etc.*) można traktować (reprezentować) jako zbiory.[2] W ZFC można udowodnić praktycznie wszystkie twierdzenia

---

[1] Praca napisana została w ramach grantu KBN „Realizm i antyrealizm w filozofii matematyki", grant nr 1 H01A 006 17.

[2] Nie podejmuję tu zagadnienia, czy obiekty te faktycznie *są* zbiorami, czy też jedynie mają swoją reprezentację w postaci zbiorów. To zagadnienie nie ma znaczenia dla dalszej dyskusji.

matematyki klasycznej.[3] Jest to więc teoria o dużej sile i ogólności.[4]

Naturalne jest oczekiwanie, że podstawowa dla matematyki teoria udzieli odpowiedzi na wszystkie dobrze postawione pytania matematyczne. Jednak już od wyników Gödla wiadomo, że ZFC jest teorią niezupełną. Istnieją więc zdania φ, sformułowanie w języku teorii mnogości ZFC, które nie dają się w ZFC ani udowodnić, ani obalić. Podane przez Gödla w dowodzie twierdzenia zdanie niezależne zostało uzyskane za pomocą lematu przekątniowego i było zdaniem o treści *de facto* metamatematycznej. Obecnie jednak dysponujemy licznymi przykładami «konkretnych» zdań niezależnych od ZFC, spośród których najbardziej znana jest hipoteza *continuum*.[5] Dzięki zastosowaniu techniki *forcingu*, odkrytej przez Cohena w latach 60-tych (por. [Cohen 1966]), udało się także udowodnić niezależność wielu innych zdań dotyczących zarówno zagadnień czysto teoriomnogościowych (np. wyników dotyczących arytmetyki liczb kardynalnych czy istnienia dużych liczb kardynalnych), jak i bardziej «konkretnych», dotyczących np. zbiorów liczb rzeczywistych.[6]

Niezależność pojawia się więc w matematyce. Oczywiście — z definicji zdania niezależnego — zdania φ, niezależnego od teorii mnogości, nie da się rozstrzygnąć w teorii mnogości. Czy znaczy to, że pytanie o prawdziwość φ jest źle postawione? Jaki jest status pytania „Czy prawdą jest, że φ" i jak pytanie to należy rozumieć? Chcę zaznaczyć, że nie chodzi tutaj o modyfikację pojęcia dowodu, ani o zastąpienie

---

[3] „Praktycznie wszystkie" należy rozumieć jako: „twierdzenia pojawiające się w ramach «zwykłej» matematyki". Oczywiście, w ramach ZFC nie da się udowodnić zdań niezależnych od ZFC.

[4] *„Wszystkie gałęzie matematyki rozwijane są — świadomie lub nieświadomie — w teorii mnogości"* [Levy 1979, 3]. *„Teoria mnogości stanowi podstawę dla matematyki. Wszystkie pojęcia matematyczne definiowane są poprzez pierwotne pojęcia zbioru i należenia.* [...] *Z aksjomatów można wyprowadzić całą znaną matematykę"* [Kunen 1980, xi]. *„Obiekty matematyczne* [...] *mogą zostać zdefiniowane jako pewne zbiory. Twierdzenia matematyczne* [...] *mogą być uznane za twierdzenia dotyczące zbiorów. Co więcej, twierdzenia te są dowodliwe za pomocą naszych aksjomatów. A zatem aksjomaty te stanowią wystarczającą* [*podstawę*] *dla uprawiania całej matematyki — co stanowi fakt godny uwagi"* [Enderton 1977, 10—11] (powyższe trzy cytowania za [Maddy 1997, 22]). „[*W*] *standardowej praktyce matematycznej „precyzacja pojęcia" jest w gruncie rzeczy synonimem dla „zdefiniowania pojęcia w teorii mnogości". Teoria mnogości jest oficjalnym językiem matematyki, tak jak matematyka jest oficjalnym językiem nauki"* [Moschovakis 1994, vii].

[5] Hipoteza *continuum*, sformułowana — jeszcze w XIX wieku — przez Cantora, głosi że moc zbioru liczb rzeczywistych (moc *continuum* – oznaczana przez *c*) jest najmniejszą mocą nieprzeliczalną, czyli, że $c=\aleph_1$. Hipotezę tę w skrócie oznacza się przez CH.

[6] Oto przykłady tego typu zdań niezależnych (por. [Dales, Woodin 1987]):

1. Niech f,g:**R**→**R** będą funkcjami ciągłymi. Czy dla każdego zbioru Borelowskiego B, zbiór f(**R**\g(B)) jest mierzalny w sensie Lebesgue'a?

2. Niech X będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa. Czy każda norma na algebrze C(X,C) jest równoważna normie supremum?

Inne przykłady można znaleźć np. w [Roitman 1992]. Pojęcie „konkretnego zdania matematycznego" jest oczywiście nieostre. W pracy tej nie analizuję tego pojęcia; chodzi jedynie o roboczą klasyfikację.

dowodu procedurą innego typu. Chodzi o zagadnienie, czy można wprowadzić pojęcie „zasadności" aksjomatów i zdań niezależnych, i jak to pojęcie należy interpretować. W skrócie przypomnę kilka najważniejszych stanowisk w tej sprawie.[7]

(i) Z punktu widzenia formalizmu, w myśl którego matematyka to nauka dotycząca jedynie metamatematycznych własności systemów formalnych, pytanie to nie ma sensu. Nie istnieje pozajęzykowa rzeczywistość matematyczna, pojęcie „prawdziwości" nie ma więc zastosowania do zdań matematycznych. Problem prawdziwości zdań niezależnych jest więc pseudoproblemem; sensowny jest jedynie problem ich statusu metamatematycznego (taką opinię wyraża np. Cohen w [Cohen 1971]).

(ii) W myśl stanowiska fikcjonalistycznego (por. np. [Field 1980]), teorie matematyczne przypominają pewne opowieści, którym brak jednak odniesienia w rzeczywistości. Pytanie o prawdziwość zdania niezależnego nie ma tu sensu — po prostu zdanie to nie jest fragmentem pewnej odpowiedniej opowieści czy ściślej: nie jest w ramach tej opowieści rozstrzygnięte (tak jak w ramach opowieści o Sherlocku Holmesie nie jest rozstrzygnięty problem długości nosa Sherlocka Holmesa).

(iii) W myśl stanowiska realistycznego matematyka opisuje pewną pozajęzykową rzeczywistość matematyczną. Zdania matematyczne są w niej prawdziwe lub fałszywe. Tym samym pytanie o prawdziwość zdań niezależnych może być pytaniem sensownym.[8]

Ważni reprezentanci realizmu matematycznego — to Gödel i Quine. Gödel, jako realista, przyjmował istnienie uniwersum zbiorów, których (przybliżonym i niepełnym) opisem jest teoria mnogości ZFC. Ponieważ uniwersum zbiorów istnieje obiektywnie, więc pytania o to, jakie ma własności, są zasadne. W szczególności wszelkie otwarte pytania teorii mnogości są dobrze postawionymi pytaniami.

Inny charakter ma realizm Quine'a. Quine wychodzi od analiz metanaukowych — dotyczących roli matematyki w naukach przyrodniczych. Problem istnienia obiektów matematycznych jest szczególnym przypadkiem problemu zobowiązań ontologicznych teorii naukowych. Za teorie zinterpretowane mogą zostać uznane te teorie matematyczne, które pojawiają się jako fragment teorii empirycznej opisującej rzeczywistość. Znaczy to, że odpowiedź na pytanie, czy należy przyjąć istnienie obiektów matematycznych danego typu, jest uzależnione od wyników analiz dotyczących roli matematyki w naukach przyrodniczych. Nie ma np. powodu, aby uznawać istnienie całej hierarchii mnogościowej — bowiem nie cała teoria mnogości znajduje zastosowanie w naukach empirycznych.

---

[7] Szczegółową analizę problemu z punktu widzenia tradycyjnych stanowisk w filozofii matematyki zawiera artykuł [Wójtowicz 2001].

[8] Stanowisko realistyczne występuje oczywiście w wielu wariantach. Poszczególne warianty różnić się mogą w kwestiach szczegółowych — dotyczących np. tego, jakie jest uniwersum matematyczne. Tym samym klasa zdań uznawanych za sensowne różni się w poszczególnych wypadkach. (Hipotetyczny) realista, który uznaje tylko istnienie liczb naturalnych opisywanych przez np. arytmetykę Peana, uzna za sensowną inną klasę pytań niż realista przyjmujący istnienie uniwersum zbiorów opisywanych przez teorię mnogości w stylu ZFC.

2. STANOWISKO FILOZOFICZNE I METODOLOGICZNE MADDY

Punktem wyjścia analiz Maddy jest pytanie o status zdań niezależnych od teorii mnogości. Podobnie jak Gödel, Maddy uważa zagadnienie zdań niezależnych za problem dobrze postawiony. Uzasadnia to jednak zupełnie inaczej niż Gödel.

Maddy określa swoje stanowisko jako „naturalizm matematyczny", a niekiedy (i to określenie — co wynika z dalszych analiz — jest adekwatniejsze) jako „naturalizm teoriomnogościowy". Maddy przyznaje, że jej punkt widzenia inspirowany jest stanowiskiem Quine'a. Sam Quine naturalizm (w filozofii) określa w sposób następujący: „*Naturalizm: uznanie, że rzeczywistość jest identyfikowana i opisywana w nauce, a nie w jakiejś uprzedniej wobec niej filozofii*" [Quine 1981, 49]. Quine odrzuca więc tezę, iż punktem wyjścia może być «filozofia pierwsza». Granica między filozofią a nauką jest płynna, a punktem wyjścia analiz filozoficznych powinny być nauki przyrodnicze. W szczególności nauki empiryczne i matematyka powinny być badane przede wszystkim przy użyciu kryteriów naukowych, a nie filozoficznych.

Maddy zgadza się z deklaracjami Quine'a, zarzuca mu jednak niekonsekwencję: twierdzi, że o ile jest on konsekwentny w stosowaniu metafilozoficznej zasady naturalizmu w swoich analizach nauk przyrodniczych, o tyle nie jest już konsekwentny w stosowaniu tej zasady w odniesieniu do matematyki. Quine bowiem argumentuje na rzecz realizmu matematycznego odwołując się przede wszystkim do swojego argumentu z niezbędności.[9] Istnienie obiektów matematycznych uzasadniane jest zatem poprzez odwołanie do roli, jaką matematyka odgrywa w naukach przyrodniczych. Maddy twierdzi, że jest to niewłaściwy sposób argumentacji. Wskazuje na zmiany, jakie dokonały się w matematyce w ostatnich 100 latach. We wcześniejszych stadiach rozwoju matematyki, matematyka była bardzo silnie związana z naukami przyrodniczymi; tworzone techniki matematyczne były bezpośrednio stosowane w rozwiązywaniu konkretnych problemów fizycznych. Jednakże w wieku XIX nastąpiło usamodzielnienie się matematyki, czego dobitnym przykładem jest powstanie teorii mnogości Cantora. Matematyka stała się niezależną, odrębną dyscypliną naukową, kierującą się własnymi celami poznawczymi i metodami. Przestała pełnić jedynie rolę usługową w stosunku do nauk empirycznych; sformułowano (i rozwiązano) szereg problemów matematycznych — interesujących z powodów czysto matematycznych, bez względu na ich ewentualne zastosowania.

Te fakty uzasadniają według Maddy tezę, że standardy przeniesione z nauk przyrodniczych — a więc z zewnątrz — nie są adekwatne dla opisu rozwoju matematyki. W szczególności, kwestie prawdziwości niezależnych zdań matematycznych nie mają związku z kwestią ich ewentualnych zastosowań. Dla badacza w zakresie teorii mnogości pytanie o prawdziwość CH (czy np. zagadnienie istnienia zbiorów liczb rzeczywistych określonego typu, istnienie liczb mierzalnych, prawdziwości aksjomatu konstruowalności) jest ważne z powodów czysto matematycznych.

---

[9] Szczegółową prezentację argumentacji Quine'a zawiera [Wójtowicz 1997].

Argumentacja Quine'a jest więc — według Maddy — chybiona, i to chybiona z dwóch ważnych powodów:

(i) Quine wprowadza standardy pozamatematyczne do rozważań wewnątrzmatematycznych.

(ii) W ujęciu Quine'a, problemy teorii mnogości, takie jak np. CH, V=L, zagadnienie istnienia liczb mierzalnych, *etc.*, stają się pseudoproblemami, gdyż nie mają znaczenia dla zastosowań w naukach przyrodniczych.[10]

Taki punkt widzenia jest — według Maddy — sprzeczny z praktyką matematyczną. O ile metody nauk przyrodniczych można stosować w badaniach odnoszących się do tychże nauk, i wyniki tych badań mogą mieć znaczenie dla samej nauki, dla jej rozwoju, o tyle badania matematyki prowadzone metodami nauk przyrodniczych nie mogą mieć znaczenia dla rozwoju samej matematyki.

Kolejna, istotna różnica między naukami przyrodniczymi a matematyką dotyczy statusu ontologicznego przedmiotu badań. Status ontologiczny obiektów fizycznych jest istotny z punktu widzenia badań naukowych. Fizyka wypowiada się wszak na temat istnienia obiektów fizycznych — twierdzi, że istnieją one obiektywnie w czasoprzestrzeni. Natomiast matematyka nie wypowiada się na temat sposobu istnienia obiektów matematycznych — tego, czy są abstrakcyjne, czasoprzestrzenne czy nie. Z punktu widzenia matematyki ten problem nie jest istotny.

Być może zatem motywacja dla prowadzenia badań dotyczących prawdziwości zdań niezależnych ma charakter filozoficzny? Przypomnieć tu należy poglądy Gödla, który jawnie twierdził, że zasadnicze znaczenie dla jego badań w zakresie podstaw matematyki miały jego poglądy filozoficzne. Realizm Gödla był dla niego punktem wyjścia do zaakceptowania niekonstruktywnych metod oraz umożliwiał uznanie pytania o prawdziwość zdań niezależnych za pytanie dobrze postawione.[11] Takim dobrze postawionym pytaniem dotyczącym rzeczywistości matematycznej jest na przykład pytanie o wartość *continuum*. Maddy odrzuca jednak tezę, że racje natury filozoficznej mogą mieć znaczenie dla rozwoju matematyki — w szczególności, że określenie klasy sensownych problemów może opierać się na tego typu argumentacji. Stanowisko filozoficzne może pełnić rolę motywującą, ale nie może pełnić roli uzasadniającej — może mieć znaczenie dla kontekstu odkrycia, ale nie dla kontekstu uzasadnienia. Maddy poddaje analizie przypadek pewnika wyboru i problemu definicji niepredykatywnych. Jak wiadomo, wokół tych zagadnień w początkowej fazie powstawania teorii mnogości toczyła się ożywiona dyskusja. Pewnik wyboru był uważany za wysoce kontrowersyjny ze względu na swój niekonstruktywny charakter i pewna część matematyków uważała dowody oparte na pewniku wyboru za niedo-

[10] Quine *explicite* pisze o tym, że niektóre teorie matematyczne (te mianowicie, które pozostają bez żadnych związków z zastosowaniami) mają status niezinterpretowanych systemów [Quine 1984].

[11] W jednym z listów do Wanga Gödel napisał: „*Mogę dodać, że moja obiektywistyczna koncepcja matematyki i metamatematyki,* [...], *w szczególności* [*koncepcja*] *rozumowań pozaskończonych, miała zasadnicze znaczenie* [...] *dla moich badań w zakresie logiki*" [Wang 1974, 9].

puszczalne. Podobnie było w wypadku definicji niepredykatywnych. W końcu jednak — jak wiemy — zarówno pewnik wyboru, jak i definicje niepredykatywne zostały powszechnie zaakceptowane w matematyce. Maddy twierdzi jednak, że nie stało się tak z powodu uzgodnienia stanowiska filozoficznego przez matematyków. Dyskusja filozoficzna pozostała nierozstrzygnięta, zaś pewnik wyboru został zaakceptowany z czysto matematycznych powodów — po prostu okazało się, że jest to bardzo owocny środek dowodowy i że matematyka bez pewnika wyboru jest uboższa i nie potrafi rozwiązać wielu problemów.[12] Racje, dla których przyjęto te środki dowodowe, są zatem racjami czysto matematycznymi, nie zaś filozoficznymi — pewne środki okazały się efektywniejsze z punktu widzenia osiągania czysto matematycznych celów, takich jak np. program opisania liczb rzeczywistych.

Wskazując na ograniczoną rolę argumentacji filozoficznej przy podejmowaniu decyzji metodologicznych dotyczących sposobu uprawiania matematyki, Maddy przytacza także argument, iż kwestie metodologiczne zostały w większości wypadków rozstrzygnięte, natomiast kwestie filozoficzne pozostały otwarte. Nie można zatem twierdzić, iż to analizy filozoficzne miały wpływ na decyzje metodologiczne. Podobną opinię wyraża na temat stanowiska Gödla — twierdzi mianowicie, że realistyczne stanowisko Gödla mogło być dla niego inspiracją, jednak te prawdziwe przyczyny, dla których podejmował on takie a nie inne decyzje, miały charakter czysto matematyczny — służyły osiągnięciu pewnych celów matematycznych, a nie miały przyczyny natury filozoficznej.

Maddy, odrzucając dopuszczalność argumentacji filozoficznej w dyskusjach dotyczących metodologii matematyki, nie twierdzi, iż pytania filozoficzne tracą rację bytu. Tak nie jest — tradycyjne pytania filozofii matematyki są nadal otwarte i warte dyskusji. Argumenty filozoficzne nie mogą jednak pojawiać się w dyskusjach metodologicznych — naturalistyczna metodologia ma być całkowicie niezależna od argumentacji filozoficznej. Priorytet mają wewnątrzmatematyczne racje, zaś analizy filozoficzne winny być im podporządkowane. Matematyka stanowi odrębną dyscyplinę, rządzi się własnymi prawami i posiada własne standardy metodologiczne. Przy ocenie tych standardów nie powinny być brane pod uwagę argumenty pozamatematyczne, tj. ani argumenty mające źródło w analizie nauk przyrodniczych, ani argumenty natury filozoficznej.

Analizy historyczne pozwalają, według Maddy, na sformułowanie następujących ogólnych wskazań, którymi należy się kierować przy konstruowaniu metodologii:

1. Należy zindentyfikować zasadniczy cel badań w danej dziedzinie.
2. Należy wskazać efektywne metody osiągania tego celu.

Przykładem jest tu teoria mnogości Cantora. Celem Cantora była możliwie pełna klasyfikacja zbiorów liczb rzeczywistych. W szczególności, jednym z elementów takiego opisu jest ustalenie, czy istnieją podzbiory **R** mocy pośredniej pomiędzy $\aleph_0$ i *c*.

[12] Pewnik wyboru jest równoważny lematowi Kuratowskiego-Zorna, który stanowi podstawowe narzędzie w wielu działach matematyki.

Problem jest więc dobrze postawiony — mimo niezależności CH od ZFC należy prowadzić badania mające na celu ustalenie wartości *continuum*. Oczywiście ostatnie twierdzenie należy rozumieć w taki sposób: CH jest wprawdzie niezależna od aksjomatów ZFC, jednak należy poszukiwać takich rozszerzeń ZFC, takich nowych aksjomatów, które pozwolą na ustalenie wartości *continuum* poprzez udowodnienie odpowiednich twierdzeń.[13]

Naturalista stawia sobie zatem za cel badanie całej matematyki, niezależnie od kwestii zastosowań (czym różni się od realisty w stylu Quine'a) i kwestii filozoficznych (czym różni się np. od klasycznego platonika, ale też od konceptualisty). Celem matematycznego naturalisty jest sformułowanie takich kryteriów metodologicznych, które pozwolą na rozstrzyganie pytań otwartych (niezależnych od ZFC). Taki naturalistyczny model oczywiście musi być poddany testowi. Maddy wymienia kilka kryteriów, wśród nich m.in.:

(i) analizy historyczne — takie, w których debaty metodologiczne zostały już rozstrzygnięte (model musi zgadzać się z danymi empirycznymi);

(ii) wiarygodność w oczach specjalistów z danej dziedziny;[14]

(iii) możliwość dokonania skutecznych predykcji.

Czym różni się stanowisko naturalistyczne od innych stanowisk filozoficznych w odniesieniu np. do problemu *continuum*? Realista oraz formalista odwołują się do argumentów natury filozoficznej. Realista założywszy istnienie uniwersum zbiorów formułuje tezę, że problem prawdziwości CH jest dobrze postawiony; dla formalisty problem ten ma charakter czysto metamatematyczny (gdyż teorie matematyczne nie posiadają interpretacji). Maddy taką argumentację odrzuca. Twierdzi bowiem, że należy wskazać czysto matematyczne argumenty, które pozwolą na ustalenie statusu CH.

Zagadnienie to jest oczywiście złożone. Wśród matematyków raczej brak jest zgody co do CH (inaczej niż w wypadku innych zdań niezależnych, które będą przedmiotem dalszych analiz), co wywołuje opinie typu: „Jest to problem źle postawiony", „Nie ma sensu rozważać takich pytań", „Używane tu pojęcia nie mają dobrze określonych znaczeń" *etc.*[15] Maddy przyznaje, że naturalista także może dojść do wniosku, że problem CH jest nie do rozwiązania — w tym sensie, że nie da się sformułować wiarygodnych, matematycznych argumentów na rzecz przyjęcia lub odrzu-

---

[13] Aby uniknąć nieporozumień, chcę podkreślić, że nie chodzi o modyfikację pojęcia dowodu, lecz o poszukiwanie argumentów mających na celu uzasadnienie wiarygodności (i tym samym zasadności przyjęcia) nowych aksjomatów.

[14] Maddy nie traktuje jednak potocznej opinii specjalistów jako rozstrzygającej.

[15] Według Mac Lane'a duża liczba wyników dotyczących niezależności zdań teoriomnogościowych od aksjomatów ZFC wskazuje na to, że pojęcie zbioru jest płynne, niedookreślone i przez to teoria mnogości nie może stanowić podstawy dla matematyki [Mac Lane 1986, 359]. Podobną opinię wyraża Mostowski: *„Jeśli istnieje dużo teorii mnogości, to żadna z nich nie może rościć sobie prawa do zajmowania centralnego miejsca w matematyce"* [Mostowski 1979, 288].

cenia CH. Jednakże nawet wówczas stanowisko naturalistyczne będzie się zdecydowanie różnić od innych stanowisk filozoficznych.

(i) Formalista stwierdzi, że wszystkie (niesprzeczne) systemy są równie dobre, że nie ma żadnych powodów, aby preferować jeden z nich. Naturalista odrzuca taki punkt widzenia — jego celem jest wskazanie *matematycznych* standardów, które pozwolą na wybór jednego z tych systemów. Może się oczywiście okazać, że w wypadku poszczególnych zdań teorii mnogości (np. CH) nie jest to możliwe. Jednakże naturalista nierozstrzygalność CH uzasadnić może dopiero poprzez wykazanie, że brak jest wewnątrzmatematycznych argumentów pozwalających na rozstrzygnięcie problemu. Tymczasem według formalisty problem ten *a priori* nie może być przedmiotem rzeczowej analizy.

(ii) Podobne stanowisko zajmuje fikcjonalista, dla którego teorie matematyczne to opowieści o fikcyjnych obiektach. Zdanie niezależne to takie, o którym dana opowieść nic nie mówi (w sensie: z danej teorii T nie wynika nic na temat zdania φ — jest ono od T niezależne). Pytania o prawdziwość takich zdań są bez sensu (tak jak pytanie: „Jak długi był nos Hamleta?"). Naturalizm jest nie do pogodzenia z taką wersją fikcjonalizmu, gdyż naturalizm uznaje sensowność argumentacji wykraczającej poza aksjomaty i formalne procedury dowodowe.

(iii) Reprezentowane przez Balaguera stanowisko «bogatego platonizmu» (*plentiful platonism*),[16] w myśl którego każdej niesprzecznej teorii odpowiada pewne uniwersum matematyczne (tj. istnieją różne uniwersa matematyczne), też jest nie do pogodzenia z naturalizmem. Stanowisko to bowiem nie wskazuje żadnej teorii jako wyróżnionej — wszystkie niesprzeczne teorie są równie uprawnione (pod tym względem stanowisko Balaguera przypomina — paradoksalnie — stanowisko formalistyczne). Tymczasem celem naturalisty jest wybranie jednej teorii — najlepszej z punktu widzenia standardów matematycznych.

Formalizm, fikcjonalizm i «bogaty platonizm» zawężają więc klasę zdań, w stosunku do których sensowne jest postawienie pytania o ich przyjęcie. Naturalizm jest nie do pogodzenia z tymi stanowiskami, jest jednak również niezgodny ze stanowiskiem realistycznym.

(iv) W myśl stanowiska klasycznego platonizmu każde zdanie ma pewną wartość logiczną. Jednakże naturalista, który twierdzi, że nie ma żadnych sensownych *matematycznych* powodów, dla których należałoby wybrać taki a nie inny system, odrzuci realistyczny postulat, iż każde zdanie winno być rozstrzygnięte. Jeśli brak jest mate-

[16] Swoją koncepcję Balaguer prezentuje w [Balaguer 1998]. Zasadnicza teza sprowadza się do tego, że niesprzeczność jest pojęciem podstawowym, zaś wszystkie niesprzeczne teorie matematyczne mają interpretację. W szczególności, każdej niesprzecznej teorii mnogości odpowiada pewne uniwersum zbiorów. Przyjęcie takiego punktu widzenia ma — według Balaguera — umożliwić rozwiązanie zasadniczych trudności klasycznego platonizmu, a mianowicie: (i) trudności epistemologicznych, związanych z zagadnieniem źródła wiedzy matematycznej; (ii) trudności z problemem wieloredukcji Benacerrafa.

matycznych powodów, aby przyjąć np. CH, to naturalista odrzuci pogląd, iż kwestia przyjęcia CH winna być rozstrzygnięta.

(v) W myśl realizmu Quine'a, klasa pytań, w stosunku do których problem prawdziwości jest dobrze postawiony i może zostać rozstrzygnięty, może być ustalona przez analizę roli matematyki w naukach przyrodniczych. Naturalista natomiast abstrahuje od kwestii zastosowań matematyki, poszukując standardów wewnątrzmatematycznych.

Pojawia się pytanie, co wyróżnia matematykę spośród innych dyscyplin. Skoro bowiem w matematyce mają obowiązywać standardy czysto matematyczne, odrzucające argumenty zewnętrzne, to czy taki punkt widzenia nie pozwoliłby np. na uzasadnienie naturalizmu... astrologicznego, w myśl którego także astrologia zasługuje na to, aby oceniać ją według jej własnych, wewnętrznych standardów? Maddy negatywnie odpowiada na to pytanie, wskazując dwa powody.

Matematyka nic nie mówi o obiektach czasoprzestrzennych, jej przedmiot badań jest rozłączny z przedmiotem badań nauk przyrodniczych. Tymczasem astrologia wkracza w kompetencje nauk przyrodniczych (i jest z nimi oczywiście nie do pogodzenia). Czy jednak, gdyby astrolog twierdził, że bada zjawiska z innego wymiaru, nie objęte badaniem naukowym, to byłby to argument na rzecz astrologicznego naturalizmu? Maddy twierdzi, iż tak nie jest, wskazując na fakt, iż matematyka jest użyteczna (niezbędna) w nauce. Aby uprawiać naukę należy rozumieć matematykę, tymczasem dla rozumienia i uprawiania nauki nie jest konieczne rozumienie astrologii. Status matematyki jest więc istotnie różny od statusu astrologii.

Reasumując: Maddy uzasadnia tezę, iż matematyka posiada własne standardy metodologiczne. Pojawia się pytanie, jakie są to standardy i w jaki sposób winny być sformułowane. Temu zagadnieniu poświęcone są kolejne paragrafy.

3. MAKSYMY METODOLOGICZNE: MAKSYMALIZUJ I UNIFIKUJ[17]

Maddy wychodzi od obserwacji, że teoria mnogości stanowi podstawę dla matematyki. Ważne jest zatem podanie jednej, fundamentalnej teorii zbiorów, w której będzie można modelować wszelkie obiekty matematyczne i rozstrzygać wszystkie otwarte problemy. Maddy odrzuca sposób myślenia, w myśl którego pojęcie zbioru jest — wobec niezależności tak wielu zdań — pojęciem niejasnym, o źle sprecyzowanym znaczeniu,[18] i ponieważ nigdy nie wiadomo, czy lepiej dołączyć niezależne zdanie φ czy jego negację, to należy po prostu (niejako równolegle) badać dwie teorie: ZFC+φ, ZFC+$\neg\varphi$.

To motywuje pierwszą z dwóch podstawowych zasad metodologicznych, a mianowicie zasadę UNIFIKUJ: celem badań jest podanie jednej teorii zbiorów, jako pod-

---

[17] Swoje maksymy metodologiczne Maddy nazywa MAXIMIZE i UNIFY, co tłumaczę po prostu jako MAKSYMALIZUJ i UNIFIKUJ.

[18] Por. cytowane wyżej opinie Mac Lane'a i Mostowskiego.

stawy dla całej matematyki, wskazanie *jednej* teorii jako teorii podstawowej. Chodzi więc o zunifikowanie matematyki poprzez zunifikowanie teorii mnogości.

Ponieważ jednak teoria mnogości ma być podstawą dla całej matematyki, to konieczne jest również zadbanie o to, aby możliwe było w teorii mnogości modelowanie jak najobszerniejszej klasy obiektów matematycznych (według Maddy tak właśnie rozwija się matematyka — modeluje coraz obszerniejszy zakres zjawisk). Maddy precyzuje tą ideę w postaci zasady MAKSYMALIZUJ: aby klasa modelowanych obiektów mogła być bogata, ważne jest, aby możliwe było zdefiniowanie możliwie dużej klasy typów izomorfizmów. Dzięki temu matematyka dostarczy także naukom przyrodniczym bogatą klasę modeli.

Te dwie zasady — UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ — stają się punktem wyjścia metodologii naturalistycznej, zaś «poligonem działań» jest dyskusja na temat aksjomatu konstruowalności (V=L). Maddy formułuje — na podstawie zasady UNIFIKUJ I MAKSYMALIZUJ — pewne techniczne kryteria, które następnie stosuje do aksjomatu konstruowalności. Można zatem powiedzieć, że UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ są pewnymi zasadami metateoretycznymi, zaś podane przez Maddy techniczne kryterium stanowi ich «implementację».[19]

4. CZY V=L?

4.1. Sformułowanie problemu i pierwszy argument negatywny

Jednym ze zdań niezależnych od ZFC jest aksjomat konstruowalności V=L.[20] Pojawia się pytanie, czy można wskazać jakieś powody, aby aksjomat ten dołączyć

---

[19] Nie jest to jedyna możliwa «implementacja»: prezentowane w drugiej części artykułu trudności (o niektórych spośród nich pisze sama Maddy) pokazują, iż nie jest wcale oczywiste, jak należy przełożyć te zasady na precyzyjne, techniczne kryteria.

[20] Klasa zbiorów konstruowalnych L definiowana jest w sposób następujący (por. np. [Kanamori 1994]):

Niech M będzie modelem dla języka J. Zbiór y nazwiemy definiowalnym z parametrami nad M, jeśli istnieje formuła $\varphi(v_0,\dots,v_n)$ języka J, oraz parametry $a_1,\dots,a_n \in M$, takie, że:

$z \in y$ zawsze i tylko wtedy, gdy M spełnia $\varphi(z,a_1,\dots,a_n)$.

Dla dowolnego zbioru x, $\mathrm{Def}(x)=\{y \subseteq x$: y jest definiowalny z parametrami nad strukturą $(x,\in)\}$. Hierarchię zbiorów konstruowalnych L definiujemy teraz w sposób następujący:

$L_0 = \varnothing$;

$L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}\,(L_\alpha)$;

$L_\lambda = \bigcup\{L{:}\xi<\lambda\}$ dla λ granicznych.

W krokach następnikowych tworzymy więc zbiory definiowalne z parametrami, wykorzystując już zdefiniowaną strukturę $(L_\alpha,\in)$.

Uniwersum zbiorów konstruowalnych L definiujemy jako sumę wszystkich szczebli tej hierarchii:

$L = \bigcup\{L_\xi{:}\xi \in On\}$.

do pozostałych aksjomatów — lub aby go odrzucić. Już w jednej ze swoich wcześniejszych prac ([Maddy 1993]) Maddy formułuje argumenty przeciwko aksjomatowi konstruowalności. Stawia tezę, że V=L sytuuje się w pewnym szczególnym nurcie myślenia o matematyce, który nazywa *definabilism* (termin ten można — niedoskonale — przetłumaczyć używając neologizmu „definionizm"). W myśl tego stanowiska jedyne obiekty dopuszczalne w matematyce — to obiekty *explicite* definiowalne. Maddy wskazuje historyczne uwarunkowania tego poglądu (związane z ukształtowaniem się pojęcia funkcji: od „geometrycznych" i „mechanicznych" krzywych Kartezjusza, po współczesne ujęcie funkcji jako dowolnego przyporządkowania).[21]

Definionizmowi Maddy przeciwstawia kombinatoryzm (*Combinatorialism*), w myśl którego w matematyce współczesnej abstrahuje się od możliwości podania definicji badanych obiektów. Za stanowiskiem kombinatoryzmu opowiada się np. Bernays, wskazując na fakt, że metody niekonstruktywne stały się bardzo owocne – i w zasadzie nieodzowne — w matematyce współczesnej. Maddy zgadza się z Bernaysem, cytując go z aprobatą [Maddy 1997, 128].[22] Definionizm Maddy nazywa „zdyskredytowaną maksymą metodologiczną" [Maddy 1993, 41]. Aksjomat konstruowalności lokuje się jednak w „definionistycznym paradygmacie". Tym samym należy go odrzucić.

Różnica w stosunku do definicji pełnej hierarchii mnogościowej V (gdzie $V_o = \varnothing$; $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$; $V_\lambda = \cup\{V_\xi : \xi<\lambda\}$ dla λ granicznych, zaś $V = \cup\{V_\xi : \xi \in On\}$) polega na tym, że w kroku następnikowym ograniczamy się jedynie do *definiowalnych* podzbiorów, a nie do wszystkich podzbiorów. Mówiąc swobodnie, zbiór potęgowy jest «okrojony» w stosunku do pełnego (a więc zawierającego także niedefiniowalne podzbiory) zbioru potęgowego.

Aksjomat konstruowalności stwierdza, że każdy zbiór jest konstruowalny, czyli, że V=L. Formalnie, aksjomat konstruowalności należy sformułować jako $\forall x \exists \alpha\, (x \in L_\alpha)$. Powszechnie jednak jest stosowane krótsze i bardziej sugestywne oznaczenie V=L.

[21] W tym historycznym procesie można wskazać przykładowo kilka ważnych momentów:

(i) Dyskusja między Eulerem a d'Alembertem na temat pojęcia funkcji (dyskusja ta toczyła się w kontekście analizy zagadnienia struny drgającej). D'Alembert zawęża pojęcie funkcji do funkcji zadanych wyrażeniami analitycznymi, Euler dopuszcza szerszą klasę funkcji.

(ii) Riemann — dyskutując wyniki Dirichleta na temat możliwości przedstawienia funkcji w postaci szeregu Fouriera — dopuszcza ogólne pojęcie funkcji, także takich, które nie mogą być przedstawione w postaci szeregu Fouriera.

(iii) W dyskusji między Baire'm, Borelem i Lebesgue'm a Hadamardem, Hadamard opowiada się po stronie «anty-definionizmu» — nie jest zasadne ograniczanie się do badania obiektów definiowalnych. Dla dobra matematyki wskazane jest badanie możliwie najszerszej klasy obiektów.

[22] Oryginalnie Bernays nie posługiwał się pojęciem „kombinatoryzmu", lecz nazywał to stanowisko po prostu „platonizmem".

4.2. «Opinia publiczna» o V=L

Aksjomat konstruowalności jest odrzucany przez zdecydowaną większość matematyków jako zbyt restryktywny.[23] Zarzut, który stawia się temu aksjomatowi, odnosi się m.in. do faktu, że ogranicza on pojęcie podzbioru liczb naturalnych. W myśl aksjomatu konstruowalności istnieją bowiem jedynie definiowalne podzbiory ω (por. np. [Moschovakis 1980, 610]). Wielu matematyków uznaje to ograniczenie — uniemożliwiające uznanie istnienia wszystkich zbiorów pojawiających się na danym etapie tworzenia uniwersum — za nieuzasadnione (por. np. [Drake 1974, 131]). Levy twierdzi, iż aksjomat konstruowalności powinien być nazwany „hipotezą konstruowalności". Dodany do aksjomatów ZF daje bowiem teorię, która opisuje nie pełne uniwersum zbiorów, ale *ograniczone* uniwersum składające się wyłącznie ze zbiorów konstruowalnych [Levy 1979, 291]. Scott twierdzi, iż zbiory konstruowalne są *minimalne*,[24] jeśli chodzi o możliwość spełniania formalnych aksjomatów pierwszego rzędu, nie obejmują natomiast ogólnego pojęcia zbioru [Scott 1977, xii].[25]

---

[23] Zwolennikiem aksjomatu konstruowalności jest natomiast Devlin. W [Devlin 1977] wskazuje on na fakt, że przyjęcie tego aksjomatu pozwala rozstrzygnąć wiele problemów (z algebry, teorii miary czy topologii), nierozwiązywalnych w samej teorii mnogości ZFC. Według niego sytuacja jest tu podobna do przypadku pewnika wyboru, o którego przyjęciu zadecydowały względy pragmatyczne [Devlin 1977, iv]. Devlin wyraża nadzieję, że w wypadku V=L sytuacja się powtórzy, i że aksjomat konstruowalności również zostanie zaakceptowany jako prawomocny aksjomat teorii mnogości. Założenie zawężające pojęcie zbioru (do obiektów definiowalnych) jest, według Devlina, naturalne i uzasadnione.

[24] Także Gödel, który początkowo skłaniał się do uznania aksjomatu konstruowalności jako naturalnego uzupełnienia aksjomatów teorii mnogości (por. np. [Moore 1990, 158]), uznał go później za aksjomat „minimalistyczny" i odrzucił. Opinię negatywną na temat aksjomatu konstruowalności wyraża np. w [Gödel 1947/64]

[25] Warto przytoczyć argumenty przeciwko aksjomatowi konstruowalności, formułowane przez Kanamoriego i Magidora. Wskazują oni szereg argumentów na rzecz przyjęcia i badania aksjomatów istnienia dużych liczb kardynalnych (sprzecznych z aksjomatem konstruowalności). Wyróżniają oni następujące ważne argumenty na rzecz istnienia dużych liczb kardynalnych:

1. «Z punktu widzenia» zbiorów dziedzicznie skończonych — ω jest olbrzymią liczbą. Jeśli zatem stwierdzimy, że powinny istnieć inne zbiory, które «z punktu widzenia» zbiorów mniejszych wyglądają tak, jak ω «z punktu widzenia» zbiorów dziedzicznie skończonych, to prowadzi nas to do aksjomatów dużych liczb.

2. Uniwersum V ma tę własność, że jeśli pewne zdanie φ jest prawdziwe w V, to jest prawdziwe także w pewnym początkowym segmencie uniwersum V_α (jest to zasada refleksji). To stanowi motywację dla rozważania liczb kardynalnych κ o podobnej własności (tj.: jeśli coś jest prawdziwe w V_κ, to jest prawdziwe także w pewnym V_α, dla pewnego $\alpha<\kappa$). Taka liczba κ musi być oczywiście na tyle duża, aby V_κ przypominało całe uniwersum V.

3. Jeśli uznamy, że uniwersum jest tak duże, że istnieją podobne (w stosownym sensie tego słowa) poziomy V_α i V_β, to prowadzi nas to w naturalny sposób do rozważania włożeń elementarnych uniwersum w siebie, które wiążą się z aksjomatami dużych liczb.

Aksjomat konstruowalności można zatem uznać za restryktywny, zaś restryktywność jest zła, bo teorie restryktywne ograniczają (w pewnym sensie) ilość typów izomorfizmów. W tej postaci argument ten nie jest jednak precyzyjny, opiera się bowiem na niejasnym pojęciu „restryktywności". Maddy stawia sobie więc za cel sformułowanie precyzyjnego, argumentu przeciwko V=L (skonstruowanego na podstawie zasady MAKSYMALIZUJ I UNIFIKUJ). Prezentacji tego argumentu poświęcony jest następny paragraf.

5. KRYTERIUM TECHNICZNE MADDY

5.1. Definicje

Maddy prowadzi swoje rozważania porównując dwie — wzajemnie sprzeczne — teorie: (i) ZFC+V=L; (ii) ZFC+$\exists 0^\#$.[26] Jej celem jest wykazanie, że teoria ZFC+V=L jest restryktywna — i to nie tylko w intuicyjnym, ale także odpowiednio zdefiniowanym, technicznym sensie tego słowa. Techniczne kryterium Maddy ma pozwolić na uzasadnienie tezy, iż spośród dwóch – wzajemnie sprzecznych — teorii: ZFC+V=L oraz ZFC+$\exists 0^\#$, to właśnie ZFC+$\exists 0^\#$ powinna zostać wybrana jako podstawa dla matematyki.

---

4. Dla wielu zdań z zakresu teorii mnogości (także zasad kombinatorycznych dotyczących małych liczb kardynalnych albo **R**), można podać równoważne im aksjomaty dużych liczb kardynalnych. Aksjomaty te są zatem najsłabszymi, jakie należy przyjąć, aby udowodnić pewne twierdzenie kombinatoryczne. Duże liczby stanowią zatem niejako miarę niesprzeczności teorii.

5. Aksjomaty dużych liczb kardynalnych stanowią silną metodę dowodzenia nowych twierdzeń teorii mnogości. Z intuicyjnego punktu widzenia, badania dotyczące dużych liczb kardynalnych pozwalają patrzeć na uniwersum teoriomnogościowe jako na interesujący świat „zaludniony bogactwem najrozmaitszych tworów".

6. Liniowe uporządkowanie dużych liczb kardynalnych umożliwia użycie ich w charakterze swoistej skali niezależności. Stanowi to silny argument na rzecz uznania teorii dużych liczb kardynalnych za naturalną nadstrukturę dla ZFC. Z wyjątkiem CH nie są znane naturalne pytania teoriomnogościowe, nie dające się rozstrzygnąć przy użyciu takich hipotez. Jak piszą cytowani autorzy, musiałyby one pochodzić „z innej galaktyki problemów" [Kanamori, Magidor 1978, 105].

[26] $0^\#$ oznacza pewną teorię, sformułowaną w języku teorii mnogości z dodaną przeliczalną liczbą nowych stałych. Teoria ta ma spełniać pewne warunki techniczne, związane z (i) istnieniem tzw. zbiorów elementów nieodróżnialnych dla struktur postaci $\langle L_\alpha, \in \rangle$, gdzie α jest graniczną liczbą porządkową, L_α jest fragmentem hierarchii konstruowalnej L, oraz (ii) spełnianiem przez tzw. termy Skolema dla tej teorii odpowiednich warunków. Poprzez arytmetyzację składni, teorię $0^\#$ można utożsamiać z pewnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych ω.

Istnienie $0^\#$ jest niezależne od ZFC i jest równoważne istnieniu niebanalnego włożenia elementarnego L w L. Zbiór $0^\#$ jest niekonstruowalnym podzbiorem ω, zatem jego istnienie jest sprzeczne z aksjomatem konstruowalności V=L (por. np. [Kanamori 1994]).

Zasadniczą ideę można wyrazić w sposób następujący: są takie obiekty, jak $0^{\#}$, których nie ma w uniwersum zbiorów konstruowalnych L. V=L wyklucza więc istnienie pewnego typu obiektów, czyli jest aksjomatem restryktywnym.

Z drugiej strony, w teorii ZFC+$\exists 0^{\#}$ mamy stale «do dyspozycji» uniwersum zbiorów konstruowalnych L — w tym sensie, że w hierarchii mnogościowej (opisywanej przez ZFC+$\exists 0^{\#}$) są też zbiory konstruowalne.[27] Uniwersum zbiorów konstruowalnych L może być więc nadal opisywane w ramach teorii ZFC+$\exists 0^{\#}$, poprzez relatywizację kwantyfikatorów do warunku $x \in$ L.[28] Wybranie teorii ZFC+$\exists 0^{\#}$ czyni zadość zarówno zasadzie UNIFIKUJ, jak i zasadzie MAKSYMALIZUJ: nic nie tracimy z modelu L.

Czy jednak – posługując się tym sposobem argumentacji — za restryktywną nie należałoby uznać także teorii ZFC w stosunku do AFA?[29] Przecież ZFC wyklucza istnienie zbiorów nieufundowanych, więc konsekwentnie należałoby uznać ją za teorię restryktywną. Wniosek taki nie jest jednak uzasadniony, gdyż klasa zbiorów nieufundowanych nie zawiera żadnych nowych typów izomorfizmów, których nie ma w klasie zbiorów ufundowanych (WF). Każdy typ (tj. para $\langle A,R \rangle$, gdzie A jest zbiorem, zaś $R \subseteq A^2$ pewną relacją) «dostępny» w AFA jest izomorficzny z pewnym zbiorem ufundowanym (innymi słowy: każdy zbiór nieufundowany ma swoją ufundowaną kopię wewnątrz WF). Tymczasem w L nie ma kopii $0^{\#}$. Analogia pomiędzy parami teorii (ZFC+V=L, ZFC+$\exists 0^{\#}$) oraz (ZFC, AFA) jest więc pozorna. ZFC nie jest — w analizowanym tu sensie — restryktywna w stosunku do AFA, natomiast ZFC+V=L jest restryktywna w stosunku do ZFC+$\exists 0^{\#}$.

Wydaje się więc, że sformułowany został argument pozwalający na odrzucenie aksjomatu konstruowalności. Argument ten ma jednak pewną istotną wadę: mówimy w nim o modelach, w szczególności o uniwersum zbiorów konstruowalnych L. Tymczasem celem jest sformułowanie kryterium umożliwiającego porównywanie *teorii* i stwierdzenie, iż pewna teoria jest restryktywna. Naturalny jest w tej sytuacji pomysł, aby zamiast mówienia o możliwości opisu pewnego modelu w pewnej teorii mówić o tym, że pewną teorię można interpretować w innej. W analizowanym wypadku powiemy, że teoria ZFC+V=L może być interpretowana w teorii ZFC+$\exists 0^{\#}$.[30] Można wówczas utrzymać argument, w myśl którego teoria ZFC+$\exists 0^{\#}$ implikuje istnienie ty-

---

[27] Innymi słowy: w każdym modelu M dla ZFC+$0^{\#}$ istnieje klasa L^M zbiorów konstruowalnych «z punktu widzenia» tego modelu.

[28] Definicja relatywizacji formuły φ do warunku ψ (oznaczanej jako φ^{ψ}) jest następująca:

Dla formuł φ bezkwantyfikatorowych: $\varphi^{\psi} = \varphi$.

Dla formuł α postaci $\alpha = \exists x \varphi(x)$: $\alpha^{\psi} = \exists x(\psi(x) \wedge \varphi^{\psi})$.

Dla formuł α postaci $\alpha = \forall x \varphi(x)$: $\alpha^{\psi} = \forall x(\psi(x) \Rightarrow \varphi^{\psi})$.

Innymi słowy, kwantyfikator $\forall x(\ldots)$ zamieniamy na: $\forall x(\psi(x) \Rightarrow \ldots)$, zaś kwantyfikator $\exists x(\ldots)$ na: $\exists x(\psi(x) \wedge \ldots)$. Mówiąc swobodnie, dzięki relatywizacji formuł do warunku ψ możemy opisywać ten «fragment świata», który jest wyróżniony formułą ψ.

[29] AFA to teoria mnogości z negacją aksjomatu ufundowania.

[30] Interpretacja ta polega na tym, że formuła φ jest przekształcana na formułę $\varphi^{x \in L}$, tj. formułę φ z kwantyfikatorami zrelatywizowanymi do warunku $x \in$ L.

pu izomorfizmu, który nie występuje w L. Okazuje się jednak, że ten argument też nie jest wystarczający. Maddy przytacza tu kontrargument, pochodzący od Martina. Rozważmy bowiem teorię:

$$T = ZFC + V{=}L + \text{„Istnieje przechodni model dla teorii } ZFC{+}\exists 0^{\#}\text{''}.$$

Oczywiście, z teorii T wynika istnienie przechodniego modelu dla teorii $ZFC+\exists 0^{\#}$. Z kolei z samej konstrukcji L wynika istnienie formuły o dwóch zmiennych wolnych, definiującej dobry porządek na L. Oznaczmy tę formułę jako $x <_L y$. Niech formuła $\psi(x)$ znaczy: „x jest w $<_L$-najmniejszym modelu przechodnim dla $ZFC+\exists 0\#$”[31]. Wówczas, poprzez zrelatywizowanie kwantyfikatorów do warunku ψ, uzyskujemy interpretację teorii $ZFC+\exists 0^{\#}$ w teorii T. Jednak z teorii T wynika również, że żaden przechodni model teorii $ZFC+\exists 0^{\#}$ nie zawiera wszystkich przeliczalnych liczb porządkowych. Na mocy odpowiednich wyników technicznych wynika stąd, że żaden przechodni model teorii $ZFC+\exists 0^{\#}$ nie zawiera żadnej nieprzeliczalnej liczby porządkowej. V=L implikuje więc istnienie typów izomorfizmu, które nie są obecne w żadnym przechodnim modelu dla $ZFC+\exists 0^{\#}$. Czy nie wynika stąd więc, że teoria $ZFC+\exists 0^{\#}$ jest restryktywna w stosunku do teorii ZFC+V=L?

Maddy odpiera argument Martina w sposób następujący: interpretacja teorii $ZFC+\exists 0^{\#}$ w teorii T za pomocą formuły ψ nie jest dobrą, zamierzoną interpretacją. Zasadniczo różni się np. od interpretacji teorii ZFC+V=L w L, czy interpretacji ZFC w WF — te bowiem w jakiś sposób «zachowują» teorię ZFC+V=L, czy ZFC, tymczasem nie jest tak z zaproponowaną przez Martina interpretacją teorii $ZFC+\exists 0^{\#}$ przy użyciu ψ.

Jednakże aby te rozważania uściślić konieczne jest wprowadzenie precyzyjniejszego pojęcia „rzetelnej interpretacji” (*fair interpretation*). Motywacji dla definicji tego pojęcia dostarcza obserwacja dotycząca tego, jakie są najważniejsze typy modeli, stanowiące swoiste aproksymacje dla uniwersum mnogościowego V.

Pierwszym typem są modele typu V_κ, gdzie κ jest liczbą nieosiągalną, zaproponowane już przez Zermela ([Zermelo 1930]) (nazywa się je często „modelami naturalnymi”). Opierają się one na idei, że pełna hierarchia kumulatywna powstaje w wyniku swoistej nieograniczonej progresji takich modeli — ciąg modeli nie ma końca, zaś liczby graniczne (tj. nieosiągalne) oddzielają modele niższego i wyższego typu. W myśl stanowiska Zermela, powyżej każdego poziomu hierarchii teoriomnogościowej jest pewien poziom wyższy, do którego (mówiąc swobodnie) nie możemy «przedostać się» za pomocą środków dostępnych na poziomie, na którym «aktualnie jesteśmy».[32]

---

[31] Relacja $<_L$ porządkuje elementy L. Niektóre z tych elementów są modelami dla $ZFC+\exists 0^{\#}$, jest więc sens mówić o $<_L$-najmniejszym takim modelu.

[32] Mówiąc ściślej: w teorii mnogości mamy do dyspozycji pewne metody tworzenia zbiorów, np. za pomocą operacji pary, sumy, zbioru potęgowego, zastępowania, *etc.* Mówiąc o niemożności «przedostania się» z poziomu α na wyższy poziom β, mamy na myśli fakt, że dostępne środki formowania zbiorów nie pozwalają na utworzenie zbioru z poziomu β ze zbiorów z poziomu α.

Drugi typ modeli, to modele wewnętrzne, tworzące klasy właściwe. «Prototypem» jest uniwersum konstruowalne Gödla L. L zawiera wszystkie liczby porządkowe, ale oczywiście nie musi być domknięte na operację zbioru potęgowego (w szczególności nie zawiera $0^{\#}$, czyli pewnego podzbioru ω). Maddy zwraca uwagę na fakt, że o ile podstawową charakterystyką modeli naturalnych jest ich «wysokość»[33], o tyle modele wewnętrzne charakteryzowane są raczej przez «szerokość» uniwersum. Uznanie, iż to właśnie te typy modeli mają zasadnicze znaczenie dla teorii mnogości motywuje następującą definicję:

DEF 1. φ stanowi model wewnętrzny dla teorii T[34] zawsze i tylko wtedy, gdy:
(i) dla dowolnego $\sigma \in$ ZFC, T dowodzi σ^{φ};
(ii) T dowodzi $\forall\alpha\varphi(\alpha)$ lub T dowodzi $\exists\kappa(\mathrm{Inacc}(\kappa) \wedge \forall\alpha(\alpha<\kappa \Rightarrow \varphi(\alpha));$[35]
(iii) T dowodzi $\forall x \forall y(x \in y \wedge \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x)).$[36]

Można teraz wyrazić ideę, że teoria T_2 interpretuje teorię T_1 w takim właśnie modelu wewnętrznym:

DEF 2. φ jest rzetelną interpretacją teorii T_1 w T_2 (gdzie T_1 jest rozszerzeniem ZFC) zawsze i tylko wtedy, gdy:
(i) φ stanowi model wewnętrzny dla teorii T_2;
(ii) dla dowolnego $\sigma \in T_1$, T_2 dowodzi σ^{φ}.

Ta definicja «chwyta» ideę, która kryje się za kontrargumentem Maddy wobec przytaczanego wyżej argumentu Martina. Formuła „$x \in$ L" stanowi model wewnętrzny dla teorii ZFC+$\exists 0^{\#}$, więc „$x \in$ L" jest rzetelną interpretacją teorii ZFC+V=L w teorii ZFC+$\exists 0^{\#}$.[37] Z drugiej strony, nie istnieje rzetelna interpretacja teorii ZFC+$\exists 0^{\#}$ w ZFC+V=L.[38]

---

[33] «Prototypem» dla tego typu modeli naturalnych są modele dla teorii mnogości drugiego rzędu. Mają one postać V_κ, gdzie κ jest liczbą nieosiągalną. Gdy κ, λ są liczbami nieosiągalnymi i $\kappa<\lambda$, to $V_\kappa \subseteq V_\lambda$ i V_κ jest zbiorem w V_λ. To motywuje określenie ich różnicy jako „różnicy wysokości".

[34] Przez „model wewnętrzny" Maddy rozumie modele jednego z wymienionych wyżej typów oraz obcięcia modeli wewnętrznych tworzących klasy właściwe na nieosiągalnych stopniach.

[35] Inacc(x) oznacza „x jest liczbą nieosiągalną".

[36] Intuicyjnie: φ jest formułą, która w modelu M dla teorii T wyznacza klasę zbiorów φ^M taką, że:
(i) φ^M jest modelem dla ZFC;
(ii) φ^M zawiera wszystkie liczby porządkowe lub wszystkie liczby porządkowe poniżej pewnej liczby nieosiągalnej;
(iii) φ^M jest modelem przechodnim;
i fakty te można udowodnić w T.

[37] Tak jest, ponieważ ZFC+$0^{\#}$ dowodzi $\sigma^{x \in L}$, dla $\sigma \in$ ZFC+V=L.

[38] Przypuśćmy bowiem, że taka interpretacja ψ istnieje. Wówczas ZFC+V=L dowodziłoby zdania „$0^{\#}$ istnieje" zrelatywizowanego do ψ. Jednakże formuła „$x=0^{\#}$" jest formułą absolutną dla modeli wewnętrznych, a więc ZFC+V=L dowodziłoby po prostu zdania „Istnieje $0^{\#}$", które jednak jest sprzeczne z V=L. A zatem nie istnieje taka interpretacja ψ.

Kolejnym krokiem do sprecyzowania pojęcia restryktywności jest zdefiniowanie, co znaczy, że „teoria daje nowe typy izomorfizmu". Idea, która się kryje za podaną dalej definicją jest następująca: teoria ZFC+$\exists 0^{\#}$ «dostarcza» nowych struktur, ponieważ dowodzi istnienia czegoś, co nie jest izomorficzne z żadnym zbiorem konstruowalnym (czyli z żadnym elementem L). W ogólnej wersji mamy następujące definicje:

DEF 3: T_2 jest maksymalizacją teorii T_1[39] zawsze i tylko wtedy, gdy jest φ taka, że:

(i) φ jest rzetelną interpretacją teorii T_1 w T_2;
(ii) T_2 dowodzi $\exists x \neg \varphi(x)$.[40]

DEF 4. T_2 jest właściwą maksymalizacją teorii T_1 zawsze i tylko wtedy, gdy T_2 jest maksymalizacją T_1, ale T_1 nie jest maksymalizacją T_2.

Zauważmy, że ZFC+$\exists 0^{\#}$ jest właściwą maksymalizacją ZFC+V=L, natomiast AFA nie jest maksymalizacją ZFC — dlatego nie ma analogii między tymi sytuacjami.

Pojawia się pokusa, aby nazwać teorię „restryktywną" wtedy, gdy istnieje teoria, która jest jej właściwą maksymalizacją. Jest to jednak błędny kierunek myślenia, co pokazuje przykład pary teorii T_1=ZFC oraz T_2=ZFC+„Istnieje liczba nieosiągalna". Formuła „$x \in V_\kappa$" (gdzie κ jest liczbą nieosiągalną) jest rzetelną interpretacją teorii ZFC w T_2. W T_2 można też wykazać, że istnieją typy izomorfizmu, których nie ma w V_κ, więc T_2 jest maksymalizacją ZFC. Z kolei ZFC nie jest maksymalizacją T_2: gdyby bowiem ZFC dowodziło istnienia wewnętrznego modelu zawierającego liczbę nieosiągalną, to dowodziłoby istnienia wewnętrznego modelu dla swojej własnej niesprzeczności.[41] Jednakże niesprzeczność jest absolutna w modelach wewnętrznych, więc ZFC po prostu dowodziłoby swojej niesprzeczności, co jest niemożliwe (na mocy II twierdzenia Gödla, w ZFC nie można udowodnić niesprzeczności ZFC). A więc T_2 jest właściwą maksymalizacją ZFC. Jednakże uznanie ZFC za teorią restryktywną tylko dlatego, że nie wynika z niej istnienie liczby nieosiągalnej, wydaje się niewłaściwe. ZFC nie dowodzi istnienia liczby nieosiągalnej, ale i nie odrzuca jej istnienia (tj. nie dowodzi nieistnienia liczby nieosiągalnej). Naturalna wydaje się więc hipoteza, aby nazwać teorię T_1 „restryktywną" dopiero wtedy, gdy teoria T_2 jest sprzeczna z T_1:

---

[39] Maddy używa sformułowania „T_2 maximizes over T_1", które tłumaczę jako „T_2 jest maksymalizacją teorii T_1".

[40] Oryginalna definicja Maddy jest bardziej złożona, jednak gdy teorie T_1 oraz T_2 są rozszerzeniami ZFC, jest ona równoważna podanej tutaj.

[41] Jest tak, ponieważ V_κ — dla κ nieosiągalnych — są modelami dla ZFC. W teorii ZFC+$\exists\kappa$Inacc(κ) można więc udowodnić istnienie modelu dla ZFC, czyli niesprzeczność ZFC.

DEF 5: T_2 jest sprzeczną maksymalizacją T_1, gdy T_2 jest właściwą maksymalizacją T_1 i T_2 jest sprzeczna z T_1.[42]

To jednak nadal nie jest właściwe pojęcie „restryktywności", o czym przekonuje nas następujące rozumowanie. Rozważmy teorię T_1, w ramach której zakładamy istnienie dowolnie dużych liczb mierzalnych (przez „MC(x)" oznaczamy formułę „x jest liczbą mierzalną"):

$$T_1 = ZFC + \forall\alpha\exists x(MC(x)\wedge x>\alpha)$$

oraz drugą teorię, która również zakłada istnienie liczb mierzalnych oraz istnienie ich ograniczenia górnego:

$$T_2 = ZFC + \exists x(Inacc(x) \wedge \neg MC(x) \wedge x = \sup\{y{:}MC(y)\})$$

T_2 wydaje się restryktywna — głosi bowiem, że powyżej pewnego miejsca nie ma liczb mierzalnych. Jednakże okazuje się, że T_2 jest maksymalizacją T_1. Oczywiście, zaklasyfikowanie z tego powodu T_1 jako teorii restryktywnej byłoby bardzo kontrintuicyjne. Dlaczego? Jaki jest powód tego paradoksu?

W jednym sensie T_2 jest bogatsza niż T_1, gdyż dowodzi istnienia (faktycznie: zakłada to istnienie) obiektu, którego istnienia nie można udowodnić w T_1 (tj. zbioru liczb mierzalnych, który ma niemierzalne supremum). Jednak T_1 nie wyklucza takiej możliwości — T_1 można bowiem rozszerzyć do teorii, w ramach której założymy istnienie zbioru liczb mierzalnych posiadającego niemierzalne supremum:

$$T_3 = T_1 + \exists x[\forall y(y\in x \Rightarrow MC(y)) \wedge Inacc(\sup(x)) \wedge \neg MC(\sup(x))]$$

Istotne dla prowadzonych analiz jest to, że nowa teoria T_3 jest maksymalizacją T_2. Wynika stąd, że teoria T_1 wprawdzie nie jest tak silna, jak mogłaby być, ale niczego nie ogranicza – możliwe jest bowiem sformułowanie jej odpowiednich wzmocnień. Jako restryktywne powinny jednak być określane tylko takie teorie, które *wykluczają* pewien kierunek rozwoju (czyli poszukiwania wzmocnień tych teorii). To motywuje kolejną definicję:

DEF 6. T_2 jest silną maksymalizacją T_1 zawsze i tylko wtedy, gdy
(i) T_2 jest sprzeczną maksymalizacją T_1;
(ii) nie na niesprzecznej teorii T_3, będącej rozszerzeniem T_1, która jest właściwą maksymalizacją T_2.

$ZFC+\exists 0^{\#}$ jest więc silną maksymalizacją ZFC+V=L.[43]

W ten sposób dochodzimy do pojęcia „restryktywności":

---

[42] Teoria $ZFC+0^{\#}$ jest zatem sprzeczną maksymalizacją teorii ZFC+V=L.

[43] Tak jest, ponieważ „bycie $0^{\#}$" jest absolutne dla modeli wewnętrznych, a zatem żadne rozszerzenie ZFC+V=L nie umożliwia podania rzetelnej interpretacji teorii $ZFC+\exists 0^{\#}$.

DEF 7. Teoria T_1 jest *restryktywna*, jeśli istnieje niesprzeczna teoria T_2, która jest silną maksymalizacją T_1.

Podane zostało zatem techniczne kryterium, zgodnie z którym teoria ZFC+V=L jest restryktywna. Nie jest to więc teoria, która może służyć jako podstawa dla matematyki — byłoby to sprzeczne z zasadą MAKSYMALIZUJ.

Jeśli teoria T_2 jest silną maksymalizacją teorii T_1, to spośród tych dwóch teorii właśnie T_2 ma szanse stać się teorią podstawową dla matematyki. ZFC+V=L nie może być więc teorią podstawową. Istnieje jednak dużo teorii, które są silnymi maksymalizacjami teorii ZFC+V=L, na przykład: (a) ZFC+$\exists 0^{\#}$; (b) ZFC+MC; (c) ZFC+$\neg$V=L; (d) ZFC+$\neg$V=L+$\neg$Con(ZFC).[44] *A priori* nie jest oczywiste, która z nich może służyć jako kandydatka na teorię podstawową. Konieczne jest zbadanie, czy istnieją jakieś racjonalne argumenty, aby dokonać wyboru pomiędzy nimi, i czy kryterium Maddy może tu być pomocne.

5.2. Słabości kryterium technicznego Maddy[45]

Powyższe kryterium pozwala — zgodnie z oczekiwaniami — na zaklasyfikowanie teorii ZFC+V=L jako restryktywnej. Czy jest ono jednak uniwersalne? Jaki jest zasięg jego działania, tj. jak działa ono w wypadku innych teorii? Okazuje się, że kryterium to nie jest doskonałe i ma dwie poważne słabości:

(i) pewne teorie (które intuicyjnie wydają się restryktywne) błędnie klasyfikuje jako nierestryktywne;

(ii) pewne intuicyjnie nierestryktywne teorie klasyfikuje jako restryktywne.

Ad (i). Maddy podaje tutaj przykład teorii, w której zakłada się istnienie liczb Woodina. Przyjęcie założenia o istnieniu nieskończenie wielu liczb Woodina pozwala na udowodnienie pełnego aksjomatu determinacji rzutowej (PD).[46] Dodanie dodat-

[44] Zdanie Con(ZFC) znaczy, że ZFC jest niesprzeczna. Teoria ZFC+$\neg$Con(ZFC) (czyli: ZFC+"ZFC jest sprzeczna") jest — na mocy II twierdzenia Gödla — teorią niesprzeczną.

[45] Tu przedstawiam trudności, wymieniane przez Maddy w [Maddy 1997]. Inne trudności prezentowane są w artykule ([Wójtowicz 2001]).

[46] Aksjomat determinacji związany jest z grami nieskończonymi na ω. Rozważmy grę nieskończoną, w trakcie której dwaj gracze, I i II, wybierają liczby naturalne. W wyniku takiej gry powstaje pewien ciąg $\alpha \in \omega^{\omega}$. Przestrzeń takich ciągów możemy utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych. Rozważmy teraz zbiór $A \subseteq \mathbf{R}$. Powiemy, że w grze wygrał gracz I, jeśli powstały ciąg α należy do zbioru A. W przeciwnym wypadku, tj. gdy $\alpha \notin A$, wygrywa gracz II. Zbiór A nazwiemy zbiorem zdeterminowanym, jeśli w tej grze któryś z graczy ma strategię wygrywającą. Pojawia się naturalne pytanie, jakie zbiory $A \subseteq \mathbf{R}$ są zdeterminowane. Można udowodnić, iż zbiory borelowskie są zdeterminowane [Martin 1975], jednak pełen aksjomat determinacji (AD), głoszący iż każdy podzbiór **R** jest zdeterminowany, jest sprzeczny z ZFC (istnienie zbioru niezdeterminowanego wynika bowiem z pewnika wyboru). Aksjomat rzutowej determinacji (PD — od *projective determinacy*) głosi natomiast, iż zdeterminowane są tzw. zbiory rzutowe, tworzące klasę obszerniejszą od zbiorów borelowskich (por. np. [Kanamori 1994], [Maddy 1988b]). Jest on niezależny od ZFC.

kowego aksjomatu, że nad nimi znajduje się liczba mierzalna pozwala na udowodnienie aksjomatu determinacji dla modelu L(R) (tj. najmniejszego modelu dla ZF zawierającego liczby porządkowe i liczby rzeczywiste). Rozważmy teraz model L[E] — kanoniczny model wewnętrzny zawierający dokładnie dwie liczby Woodina. Teoria ZFC+V=L[E] wydaje się intuicyjnie restryktywna: stwierdza bowiem, że istnieją *dokładnie* dwie liczby Woodina, a więc odrzuca możliwość istnienia większej liczby liczb Woodina. Tymczasem teorię ZFC+V=L[E] można rozszerzyć w taki sposób, aby zapewnić istnienie modeli wewnętrznych dla teorii takich, jak ZFC+„Istnieje 5 liczb Woodina", ZFC+„istnieje liczba superzwarta" *etc.* Znaczy to, że żadna z tych teorii nie jest silną maksymalizacją teorii ZFC+V=L[E], a więc nie można wykazać w zwykły sposób restryktywności teorii ZFC+V=L[E].

Według Maddy, przyczyną takiego stanu rzeczy jest fakt, że odpowiednie rozszerzenia teorii ZFC+V=L[E] «dostarczają» modeli dla odpowiednio silnych teorii, ale te modele nie są naturalne — nie mają cech, których oczekiwalibyśmy od «kanonicznych» modeli wewnętrznych.[47] Rozważania te sugerują, że definicja „rzetelnej interpretacji" powinna być zmodyfikowana tak, aby występujący w niej model wewnętrzny był — w stosownym sensie tego słowa — optymalny. Brak jest jednak formalnego kryterium, pozwalającego rozpoznać dany model jako optymalny. Pomimo iż uznajemy model L jako optymalny model dla teorii ZFC+V=L, zaś uzyskane przez wzmocnienia teorii ZFC+V=L[E] modele dla teorii ZFC+„Istnieje 5 liczb Woodina" — jako nieoptymalne, to fakt ten nie daje się scharakteryzować formalnie.

Ad (ii). Teoria ZFC+MC intuicyjnie wydaje się nierestryktywna. Jednak Maddy wskazuje argument, pozwalający na uzasadnienie, iż teoria ZFC+MC jest restryktywna. Rozważmy bowiem teorię

T = ZFC+„$\exists 0^{+}$"+ „$\forall\alpha<\omega_1(L_\alpha[0^{+}]$ nie spełnia ZFC)".[48]

Teoria ta jest silną maksymalizacją teorii ZFC+MC. Wynika stąd, że ZFC+MC jest teorią restryktywną — to jednak wydaje się być bardzo nieintuicyjne. Jakie jest źródło tego paradoksu?

Teoria T, za pomocą której wykazano restryktywność teorii ZFC+MC, jest nienaturalną teorią – można ją wręcz uznać za teorię dziwaczną. Oto argumentacja Maddy. Zdanie „$\exists 0^{+} \wedge \forall\alpha<\omega_1(L_\alpha[0^{+}]$ nie spełnia ZFC)" jest sposobem wyrażenia faktu, że wprawdzie zbiór 0^{+} istnieje, ale nie jest zawarty w żadnym przechodnim modelu dla ZFC będącym zbiorem.[49] To twierdzenie nie jest wprawdzie oczywiście

[47] Słowo „kanonicznych" zostało wzięte w cudzysłów, ponieważ użyte zostało w sensie metaforycznym. W matematyce (np. w algebrze liniowej) pojęcie „kanonicznego odwzorowania", „kanonicznego izomorfizmu" *etc.* mają ustalony sens techniczny. W wypadku modeli dla teorii mnogości, termin ten nie ma takiego ustalonego, technicznego sensu — ma jedynie sens intuincyjny.

[48] 0^{+} jest pewnym szczególnym podzbiorem ω (zdefiniowanym w «bardzo teoriomnogościowy» sposób).

[49] Techniczny powód jest taki, że gdyby 0^{+} był elementem pewnego modelu przechodniego dla ZFC, to — dla pewnego przeliczalnego α — byłby też elementem $L_\alpha[0^{+}]$.

równoważne z twierdzeniem, że ZFC+$\exists 0^+$ jest teorią sprzeczną, ale jest «w duchu» tego twierdzenia.[50] Wiadomo wprawdzie (z II twierdzenia Gödla), że jeśli ZFC jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest także teoria ZFC+$\neg$Con(ZFC) (intuicyjnie: ZFC+„ZFC jest sprzeczna"). Jednakże teoria ZFC+$\neg$Con(ZFC) — mimo iż jest niesprzeczna — nie może zostać uznana za poważną kandydatkę na teorię podstawową dla matematyki. Teoria T obarczona jest podobną słabością.

Jedyną znaną teorią, która jest silną maksymalizacją teorii ZFC+MC, jest jednak dziwaczna teoria T = ZFC+„$\exists 0^+$"+ „$\forall\alpha<\omega_1(L_\alpha[0^+]$ nie spełnia ZFC)". Wydaje się więc nieracjonalne, aby uznać teorię ZFC+MC za restryktywną właśnie z powodu istnienia tego typu silnej maksymalizacji, gdyż ZFC+MC— intuicyjnie rzecz biorąc — nie ogranicza przecież rozwoju teorii mnogości w żadnym kierunku. Jest to inna sytuacja niż w wypadku teorii ZFC+V=L. Istnieją bowiem naturalne teorie, które są silnymi maksymalizacjami teorii ZFC+V=L, więc restryktywność teorii ZFC+V=L można uzasadniać poprzez wskazanie naturalnej teorii, będącej silną maksymalizacją teorii ZFC+V=L.

Płynie stąd następujący wniosek: teorię T_1 można uznać za restryktywną tylko wtedy, gdy teoria T_2, która jest silną maksymalizacją teorii T_1, jest atrakcyjna z matematycznego punktu widzenia, zaś T_1 rzeczywiście ogranicza rozwój teorii mnogości w kierunku, który można uznać za atrakcyjny. Sam fakt istnienia jakiejkolwiek silnej maksymalizacji nie może zostać uznany za decydujący.

Aby podane kryterium można było uznać za rozsądne, konieczne jest więc doprecyzowanie znaczeń pojęć takich jak: „optymalność" danego modelu i „atrakcyjność" teorii alternatywnych.

Zgodnie z definicjami Maddy, zarówno ZFC+MC jak i ZFC+$\exists 0^\#$ są silnymi maksymalizacjami teorii ZFC+V=L (i to w «optymalny» sposób). Obie te teorie są atrakcyjne. ZFC+MC umożliwia jednak rozwiązanie szeregu zagadnień deskryptywnej teorii mnogości; natomiast w wypadku teorii ZFC+$\exists 0^\#$ brak jest argumentów podobnego typu. Aby zatem uznać teorię ZFC+V=L za restryktywną na mocy argumentu, iż ZFC+$\exists 0^\#$ jest silną maksymalizacją ZFC+V=L, należałoby stwierdzić, iż ma ona jakieś atrakcyjne cechy, nie jest «dziwaczna» — jak np. ZFC+$\neg$V=L+$\neg$Con(ZFC) czy ZFC+„$\exists 0^+$"+ „$\forall\alpha<\omega_1(L_\alpha[0^+]$ nie spełnia ZFC)". Maddy nie podaje tutaj żadnego argumentu; wyraża jednak przekonanie, iż założenie o istnieniu zbioru $0^\#$ pozwala na osiągnięcie istotnych matematycznie celów.

[50] Maddy wprawdzie *explicite* nie pisze, dlaczego tak jest, ale można ten fakt uzasadnić: postulowanie istnienia obiektu, który nie może istnieć w żadnym przechodnim modelu dla ZFC, jest nienaturalne. Znaczy bowiem, że ZFC+„Istnieje ten obiekt" nie ma «porządnych» modeli. W tym sensie teoria T przypomina teorię ZFC+$\neg$Con(ZFC), która też ma tylko «dziwaczne» modele.

6. PODSUMOWANIE

1. Maddy zajmuje stanowisko matematycznego naturalizmu, w myśl którego matematyka winna być badana według standardów wewnątrzmatematycznych.

2. Maddy odrzuca w szczególności zarówno argumentację opierającą się na analizie roli matematyki w naukach przyrodniczych, jak i na założeniach filozoficznych (zgodnie z tezą naturalizmu, Maddy odrzuca możliwość oparcia się na «filozofii pierwszej» w analizach metodologicznych).

3. W związku z tym konieczne jest sformułowanie zasad metodologicznych, odwołujących się wyłącznie do kryteriów matematycznych. Maddy formułuje dwie takie zasady:

(i) UNIFIKUJ (celem jest podanie jednej teorii mnogości jako podstawy dla matematyki);

(ii) MAKSYMALIZUJ (konstruowana teoria ma być możliwie bogata, w szczególności powinna «dostarczyć» możliwie dużej liczby typów izomorfizmu).

4. Odwołując się do tych zasad, Maddy — poprzez ciąg technicznych definicji — formułuje (formalne) pojęcie „teorii restryktywnej".

5. Na podstawie sformułowanego kryterium restryktywności Maddy wykazuje, że teoria ZFC+V=L jest teorią restryktywną, zatem nie może być uznana za podstawę dla matematyki. Przyjęcie aksjomatu konstruowalności nie jest więc zasadne.

6. Okazuje się jednak, że podane przez Maddy techniczne kryterium restryktywności obarczone jest pewnymi słabościami. Zakresy pojęć: „teoria restryktywna w rozumieniu technicznego kryterium Maddy" i „teoria restryktywna w «zdroworozsądkowym rozumieniu specjalistów od teorii mnogości»" nie pokrywają się.

7. Aby wyeliminować tę słabość, konieczna jest eksplikacja takich pojęć, jak: „rzetelna interpretacja", „optymalność modelu" czy „naturalność teorii". Maddy dostrzega tę konieczność, jednak nie przedstawia żadnych wyników w tym zakresie.

Niezależnie od faktu, że podane przez Maddy kryteria nie są doskonałe, jej koncepcja stanowi interesującą próbę sformułowania formalnych zasad metodologicznych dla teorii mnogości, i tym samym przeniesienia rozważań dotyczących statusu zdań niezależnych z poziomu intuicyjnego, preformalnego, na poziom ścisłych analiz. Maddy uzasadnia swoją koncepcję odwołując się do tez filozoficznych, prowokujących do dyskusji i wymagających dalszej analizy. Temu poświęcony jest artykuł [Wójtowicz 2001], stanowiący kontynuację niniejszej pracy.

BIBLIOGRAFIA

Balaguer M.

[1998] *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, New York — Oxford.

Cohen P.J.

[1966] *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* W.A. Benjamin, Inc., New York — Amsterdam.

[1971] „Comments on the Foundations of Set Theory", w: *Axiomatic Set Theory. Proceedings in Symposia in Pure Mathematics,* 13, part 1, D. Scott (red.), AMS, Providence, RI, s. 9—15.

Dales H.G, Woodin W.H.

[1987] *An Introduction to Independence for Analyst,* Cambridge University Press, Cambridge.

Devlin K.

[1977] *The Axiom of Constructability,* Lecture Notes in Mathematics 617, Springer-Verlag, Berlin.

Drake F.R.

[1974] *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals.* North Holland, Amsterdam.

Enderton H.

[1972] *A Mathematical Introduction to Logic,* Academic Press, New York.

Field H.

[1980] *Science Without Numbers,* Basil Blackwell, Oxford.

Kanamori A.

[1994] *The Higher Infinite.* Springer-Verlag, Berlin.

Kanamori K., Magidor M.

[1978] „The Evolution of Large Cardinal Axioms in Set Theory", w: *Higher Set Theory,* G.H.Müller and D.S.Scott (red.), Lecture Notes in Mathematics 669, Springer-Verlag, Berlin, s. 99—275.

Kunen K.

[1980] *Set Theory,* North-Holland, Amsterdam.

Levy A.

[1979] *Basic Set Theory,* Springer-Verlag, Berlin.

Mac Lane S.

[1986] *Mathematics: Form and Function,* Springer-Verlag, Berlin.

Maddy P.

[1988a] „Believing the Axioms. I", *Journal of Symbolic Logic,* 53, 481—511.

[1988b] „Believing the Axioms. II", *Journal of Symbolic Logic,* 53, 736—764.

[1993] „Does V Equal L?", *Journal of Symbolic Logic,* 58, 15—41.

[1997] *Naturalism in Mathematics,* Clarendon Press, Oxford.

Martin D.A.

[1975] „Borel Determinacy", *Annals of Mathematics*, ser. 2, 102, 363—371.

Moore G.H.

[1990] „Introductory Note to 1947 and 1964", w: Gödel K., *Collected Works*, vol. 2, Feferman S. i in. (red.), Oxford University Press, Oxford, s. 154—175.

Moschovakis Y.

[1980] *Descriptive Set Theory*, North-Holland, Amsterdam.

[1994] *Notes on Set Theory*, Springer-Verlag, New York.

Mostowski A.

[1979] „Recent Results in Set Theory", w: *Mengenlehre*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, s. 276—302.

Quine W.v.O.

[1981] „Things and Their Place in Theories", w: *Theories and Things*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Mass., s. 1—23. Przekład polski: „Rzeczy i ich miejsca w teoriach", w: Szubka T. (red.): *Metafizyka w filozofii analitycznej*, TN KUL, Lublin, 1995, s. 31—52.

[1984] Recenzja z: Parsons C. *Mathematics in Philosophy*, *Journal of Philosophy*, 81, 783—794.

Roitman J.

[1992] „The Uses of Set Theory", *The Mathematical Intelligencer*, 14 (1), 63—69.

Scott D.

[1977] Przedmowa do: Bell J.L. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, Clarendon Press, Oxford, s. III—IX.

Wang H.

[1974] *From Mathematics to Philosophy*, Routledge and Kegan Paul, London.

Wójtowicz K.

[1997] „Na czym polega *argument z niezbędności* Quine'a?", *Edukacja Filozoficzna*, 24, s. 297—306.

[2000] „O uzasadnianiu w matematyce", *Kwartalnik Filozoficzny* (w druku).

[2001] „Naturalizm matematyczny Penelope Maddy: próba analizy", *Filozofia Nauki* (w druku).

Zermelo E.

[1930] „Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre", *Fundamenta Mathematicae*, 16, 29—47.