Filozofia Nauki
Rok IX, 2001, Nr 4(36)

Stanisław Krajewski

Nierozstrzygalność w matematyce a nierozstrzygalność w filozofii

0. ROZWIĄZYWANIE A ROZSTRZYGANIE

Nasz temat[1] — to nierozwiązywalne problemy w filozofii. Ja chcę mówić o kwestiach nierozstrzygalnych, co jest jeszcze trudniejsze, bo wiązy na pewno istnieją, a strzygi — ponoć nie. (Roz-wiąz-anie, roz-strzyga-nie; mówię to nie po to, by dyskredytować szukanie źródeł sensu w rozbiorze słów, ale by wskazać, że czasem prowadzi to na manowce.)

Czy istotnie rozstrzyganie jest czymś trudniejszym? Czy może być kwestia rozwiązywalna, ale nierozstrzygalna? Rzecz w tym, że można sobie wyobrazić problem, który da się rozwiązać, ale jego rozwiązanie polega na stwierdzeniu jego nierozstrzygalności. Rozwiązanie, jak wiąz, istnieje, ale rozstrzygalność, jak strzyga, jest nieosiągalna. Jaki to może być problem? Przecież potocznie mówiąc „rozstrzygnięcie" mamy na myśli to samo co wtedy, gdy mówimy „rozwiązanie". Jak więc „nierozstrzygalność" może oznaczać coś innego niż „nierozwiązywalność"?

1. ROZSTRZYGANIE

Zastanówmy się najpierw ogólnie, na czym polegać może pokazanie nierozstrzygalności jakiegoś problemu. Na początek pytanie pomocnicze: na czym polega okazanie rozstrzygalności? To powinno być łatwe: pokazujemy jak rozstrzygać. Na przykład: czy rozstrzygalny jest problem, czy ktoś jest pełnoletni? Oczywiście — wystar-

---

[1] Znacznie rozszerzony tekst odczytu wygłoszonego podczas otwartej sesji, która miała miejsce 20 IX 2000 w Instytucie Filozofii UW, w ramach Festiwalu Nauki Polskiej.

czy sprawdzić w dokumentach. Ze spraw subtelniejszych: czy dane wyrażenie w języku formuł logicznych jest tautologią rachunku zdań? Otóż mamy metodę sprawdzania, np. tabelkową. Jest ona dobra dla każdej formuły. TO jest ważne: jedna metoda dobra dla KAŻDEJ formuły. Pytanie o rozstrzygalność w sensie ściślejszym, innym niż po prostu rozwiązalność, dotyczy tzw. problemu MASOWEGO. Chodzi o jeden problem, który odnosi się do wielu obiektów, a raczej do wszystkich obiektów pewnej kategorii. Pytanie zawiera więc zmienną, która przebiega te obiekty. Np. „Czy *x* jest pełnoletni?". Zmiennych może być więcej: „Czy *x* i *y* są małżeństwem?". Najprościej jest, gdy odpowiedź jest „tak" lub „nie". Nie powinno to jednak być wymogiem: można też pytać o np. o datę urodzenia.

Jak pokazać nierozstrzygalność? Nie chodzi po prostu o brak danych. Jeśli nie ma dokumentów ani świadków w sprawie czyjejś daty urodzenia, nie poznamy jej, ale jest to niemożność, która nie ujawnia nic głębokiego. Prawdziwa nierozstrzygalność ma miejsce, gdy nie ma METODY rozstrzygania. Ale by stwierdzić coś takiego, trzeba wiedzieć czym jest metoda. Należy więc ustalić, jakie metody dopuszczamy, jaki repertuar środków mamy stosować.

Rozstrzyganie, w tym węższym sensie, różnym od rozwiązywania, odnosi się więc (a) do problemów masowych oraz (b) do ustalonego pojęcia metody.

Jaki więc może być problem rozwiązywalny, a zarazem nierozstrzygalny? Otóż może być tak, że da się dowieść niemożności rozstrzygania przy pomocy zadanego repertuaru środków. Byłaby to więc **dowodliwa** nierozstrzygalność. Najłatwiej jest podać przykłady z matematyki, nawet szkolnej. Wiadomo np., że łatwo jest poprowadzić dwusieczną danego kąta przy pomocy cyrkla i linijki, ale da się dowieść (to wykracza poza matematykę szkolną), że nie da się zrobić trysekcji kąta, czyli dwu linii dzielących go na trzy równe części, przy użyciu jedynie cyrkla i linijki. Chodzi oczywiście o metodę pasującą do dowolnego kąta, bo w szczególnych przypadkach jest to możliwe (np. dla 90°). Jest to przykład pouczający, bo mamy tu jasno określony zasób dopuszczalnych środków. Jest on arbitralny, choć ma uzasadnienie historyczne. Rozwiązanie starożytnego problemu trysekcji kąta było więc dużym teoretycznym osiągnięciem, ale praktycznie nie ma istotnego znaczenia, bo tak ustalone pojęcie metody (stosowanie w wiadomy sposób cyrkla i linijki bez podziałki) nie jest praktycznie ważne.

2. ROZSTRZYGANIE TEORETYCZNE A PRAKTYCZNE

Gdy mowa o rozróżnieniu pomiędzy praktycznym a teoretycznym, pojawia się problem, czy wspomniana już rozstrzygalność logicznego rachunku zdań jest praktycznie ważna. Otóż sprawa nie jest zupełnie jasna. Sam problem jest ważny, związane z nim (a faktycznie równoważne z jego negacją — problemem spełnialności) są inne praktycznie istotne kwestie, np. problem komiwojażera (mając dany zestaw miast i odległości między nimi, ustalić najkrótszą marszrutę tak, by objechać wszystkie miasta). Natomiast praktyczna wartość znanych metod rozstrzygania jest wątpliwa, bo komplikacja rośnie eksponencjalnie: gdy jest n zmiennych zdaniowych (ew. n miast w problemie komiwojażera) trzeba zrobić 2^n kroków. To jest praktycznie nie do przerobienia, już dla n równego kilkadziesiąt. (Warto przypomnieć, że 2^{100} jest wedle obowiązujących teorii liczbą porównywalną z liczbą cząstek elementarnych we wszechświecie.) Dlatego uważa się, że praktyczną wartość mają tylko metody, które wymagają wielomianowej liczby kroków, czasu, cząstek przestrzeni, pamięci (wielomianowej, tzn. rzędu n^2, n^3, czy n^c, dla ustalonej liczby c).

Czy istnieje metoda rozstrzygania o tautologiczności danej formuły (odpowiednio: rozstrzygania o spełnialności, rozstrzygania, która droga jest najkrótsza w problemie komiwojażera) o wielomianowej komplikacji? Otóż nie wiemy. Jest to słynny problem P=NP, a dokładniej „Czy P=NP?", jeden z najważniejszych problemów otwartych w logice, podstawach matematyki i teoretycznej informatyce. (Przez „P" oznaczamy klasę problemów wielomianowo rozstrzygalnych, zaś przez „NP" klasę problemów rozstrzygalnych wielomianowo z możliwością trafnego odgadywania; problem spełnialności jest NP.) Wszyscy sądzą, że nie ma metody wielomianowej, ale nie ma na to dowodu. Jest to nierozwiązany problem o charakterze matematycznym. Wydaje się, że zostanie prędzej czy później rozwiązany.

Jak można dowieść, że jakiś problem nie da się rozstrzygnąć w sposób, którego komplikacja jest mniejsza niż eksponencjalna? Czasem można to zrobić bardzo prosto. Przykładem jest problem trzech wież z Hanoi. Mamy trzy pionowe pręty, na jednym nanizane 64 krążki z otworkami, jeden na drugim, coraz mniejsze, dwa pozostałe puste. Trzeba je wszystkie przenieść na trzeci pręt, używając drugiego jako pomocniczego, ale można przekładać na raz tylko jeden, a na żadnym pręcie nie może leżeć większy krążek na mniejszym. Otóż musimy zrobić ponad 2^{63} kroków.

Dowód: Niech M(k) będzie najmniejszą liczbą kroków dla k krążków. Oczywiście M(1)=1. Pokażemy, że wystarczy, jeśli zachodzi następujący

Lemat: M(k+1) > 2M(k).

Istotnie to wystarczy, bo wtedy: M(64) > 2M(63) > 2^2 M(62) > ... > 2^{63}M(1) = 2^{63}.

Ponieważ 2^{64} to liczba kolosalna, nic dziwnego, iż wedle podania, gdy mnisi w Hanoi skończą pracę, nastąpi koniec świata. Gdyby tylko od tego zależał nasz koniec, nasz świat byłby jeszcze długo bezpieczny.

Dowód lematu: Żeby przenieść wedle reguł k+1 krążków, trzeba najpierw przenieść k krążków na środkowy pręt, co wymaga akurat M(k) kroków, a potem największy krążek na trzeci pręt, a potem wszystkie na niego, z użyciem pierwszego pręta jako pomocniczego, co wymaga znów M(k) kroków. A zatem M(k+1) = 2M(k)+1. C.b.d.o.

Czy jednak wielomianowa tylko komplikacja to naprawdę dobra miara praktyczności metody? Przecież przy dużych wykładnikach c liczba n^c przestaje mieć sens praktyczny. Warunek wielomianowej komplikacji daje więc TEORETYCZNIE praktyczną metodę rozstrzygania, a nie metodę naprawdę praktyczną. Nawet więc, gdyby

P=NP, nie jest oczywiste, że mielibyśmy naprawdę praktyczną metodę. Z drugiej strony, nawet jeśli P nie jest równe NP, to może być tak, że istnieje praktyczna metoda, albo zestaw metod, dostatecznie prędkiego rozwiązywania problemu komiwojażera we wszystkich naprawdę potrzebnych przypadkach. Choć więc teoretycznie nie byłoby metody praktycznego rozstrzygania, może tak być, że w praktyce jest metoda praktycznego rozstrzygania — nie we wszystkich możliwych, ale tylko w praktycznie, np. biznesowo, interesujących przypadkach.

3. NIEROZSTRZYGALNOŚĆ

Problem tautologiczności w rachunku zdań jest rozstrzygalny. Naturalnym następnym krokiem jest to samo pytanie w odniesieniu do bardziej złożonego rachunku logicznego — rachunku predykatów, czyli rachunku kwantyfikatorów. W 1936 Alonzo Church w oparciu o metody rozwinięte przez Kurta Gödla pokazał, że nie ma metody rozstrzygania, czy dowolna dana formuła z kwantyfikatorami jest tautologią, czyli reprezentuje prawdziwość logiczną.

Słynne twierdzenie Gödla o niezupełności mówi, że dla naturalnej formalizacji arytmetyki istnieją zdania nierozstrzygalne, tzn. takie, że ani one ani ich zaprzeczenia, nie są formalnie dowodliwe. Nie byłoby to może aż takie dziwne (choć trudno jest podać takie zdanie), ale siła twierdzenia Gödla polega na jego ogólności: tak samo jest dla DOWOLNEGO EFEKTYWNEGO pojęcia dowodliwości.

Oczywiście pojawia się pytanie, co to jest efektywne pojęcie dowodliwości, co to są metody efektywne, które dopuszczamy, by rozstrzygać problemy masowe. Nie mówimy tu o pojęciu formalnym, rzecz wymaga więc eksplikacji. W obecnych czasach, gdy wszyscy używamy komputerów, najprościej jest mówić nie o metodach efektywnych, ale o programach. Wiadomo, że wyidealizowane komputery (tzw. maszyny Turinga) podlegają ograniczeniom podobnym do tych, o których mowa w twierdzeniu Gödla.

Możemy też spytać: a co z metodami nieefektywnymi? Dlaczego mamy się ograniczać? Z filozoficznego punktu widzenia chciałoby się dopuszczać dowolne metody. Otóż metody, takie jak odgadywanie, pytanie się wyroczni, losowanie przez rzut monetą, są do pomyślenia, ale nie warto ich poważnie traktować jako kandydatek na rozstrzyganie problemu tautologiczności. Na tym przykładzie widać, jak ważne jest określenie, o jakie metody chodzi. Metoda musi być adekwatna do problemu. Dla rozstrzygania kwestii, czy coś jest tautologią, pojęcie metody efektywnej wydaje się w sam raz. Nie można jednak wykluczyć, że pojawi się jakaś sensowna propozycja innego rodzaju. Może na przykład przez odwołanie się do autorytetu jakiegoś superekstramakrokomputera, który będzie miał dużo doświadczeń z tautologiami? Może to nawet wystarczy we wszystkich konkretnych kwestiach, z jakimi będziemy się spotykać w praktyce? Jest to jednak czysta spekulacja, która nic obecnie nie wnosi.

Znacznie ciekawsze jest pytanie, czy naprawdę wiemy, co to są metody efektywne i czy programy komputerowe naprawdę oddają ich istotę.

4. TEZA CHURCHA

Mówiąc o rozstrzyganiu możemy jednocześnie mówić o obliczaniu. Mianowicie obliczać wartość funkcji $f(n)$ to tyle, co rozstrzygnąć wszystkie pytania typu „Czy $f(n)=m$?". I odwrotnie, gdy mowa o obliczaniu, można zarazem mówić o rozstrzyganiu, bo rozstrzyganie problemu masowego „Czy $P(x)$ zachodzi?" to tyle co obliczenie funkcji $f_P(x)$, zdefiniowanej na przykład tak: $f_P(x)=1$, gdy $P(x)$ zachodzi, natomiast $f_P(x)=0$, gdy $P(x)$ nie zachodzi. Rozstrzyganie (w sensie węższym) i obliczanie to dwa aspekty tego samego.

Co to są efektywne metody rozstrzygania i obliczania? Można to uznać za problem filozoficzny. Różne proponowano odpowiedzi. Wynikały one z analizy efektywności, mechaniczności, procedury formalnej itp. Chodzi o wielokrotne (dowolnie wiele razy) wykonywanie prostych kroków. Różne określenia tych kroków dały różne pojęcia programów, maszyn idealnych, funkcji obliczalnych, teorii formalnych, algorytmów, systemów produkcji znaków. I okazało się, że są one wszystkie równoważne! Zwykle na określenie tego ścisłego pojęcia stosuje się termin „rekurencyjność". Pojęcie efektywności jest potoczne. Jest nieoczekiwane, a nawet zdumiewające, że różne jego formalne odpowiedniki są sobie równoważne. Nie musimy kłopotać się, jaki formalizm wybierzemy. A takiego absolutnego pojęcia, niezależnego od formalizacji, nie mamy ani dla definiowalności, ani dla dowodliwości — podkreślał Gödel. Tę sytuację określił jako cud! „Po raz pierwszy udało się sformułować absolutną definicję dla ciekawego pojęcia epistemologicznego."[2]

Wyrazem wiary w to, że te ścisłe pojęcia oddają w pełni sens potocznego, intuicyjnego pojęcia metody efektywnej jest tzw. Teza Churcha: efektywność jest tożsama z rekurencyjnością. Nazywa się też tę hipotezę Tezą Churcha—Turinga, lub Churcha—Posta, bo wszystkie te osoby przyczyniły się do jej sformułowania. Pierwszy opublikował ją Church w roku 1935. Zrobił to zresztą po rozmowach z Gödlem.

Nieliczni są oponenci tej tezy. Oczywiście nie możemy mieć pewności, że nigdy nie pojawi się procedura nierekurencyjna, którą będziemy skłonni uznać za efektywną. Jednak całe nasze doświadczenie wskazuje na co innego. Jest to więc udana eksplikacja, przykład znalezienia formalnej definicji, która daje ścisły odpowiednik problemu potocznego: co to jest efektywna procedura postępowania? A więc mamy chyba nieoczekiwane rozwiązanie problemu o charakterze filozoficznym.

---

[2] Kurt Gödel, „Remarks Before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics", 1946, [w:] M. Davis (red.) *The Undecidable*, Raven Press, Hewlet, N.Y. 1965, s. 84.

5. TWIERDZENIE GÖDLA

Twierdzenie o niezupełności zostało dowiedzione przez Gödla przez niezmiernie przemyślną konstrukcję (dla danej teorii T — np. arytmetyki, teorii mnogości) zdania G_T, które jest niezależne, o ile ta teoria jest niesprzeczna. Niektórzy wyobrażają sobie, że Gödel pokazał zdanie jakoś absolutnie niedowodliwe. Tak nie jest. To zdanie jest równoważne naturalnemu wyrażeniu niesprzeczności teorii T (czyli tego, że nie dowodzi dwu zdań sprzecznych). Ponieważ mamy przekonanie, że arytmetyka i każda rozsądna teoria T, którą możemy zaproponować, jest niesprzeczna, zdanie G_T jest prawdziwe.

Na czym polega jego szczególność? Otóż jest niedowodliwe w T, choć mówi tylko o pewnych relacjach między liczbami. Jeśli uważamy, że w T da się odwzorować wszelkie metody elementarnej matematyki, to G nie może być dowiedzione elementarnie. Metody metamatematyki Hilberta, czyli manipulacje konkretnymi znakami, metody oparte na „naoczności symbolu", zawierają się — jak się wydaje ludziom doświadczonym w podstawach matematyki — w arytmetyce aksjomatycznej i zawierających ją teoriach T. Niesprzeczności arytmetyki, a tym bardziej bogatszych teorii, nie da się dowieść metodami dopuszczanymi przez metamatematykę Hilberta. Dlatego twierdzenie Gödla było ciosem w program Hilberta.

Sam dowód, że niesprzeczność teorii pociąga zdanie Gödla dla niej, nie jest łatwy, ale da się wyrazić tak, by korzystał tylko ze środków prostych, jeśli idzie o stopień komplikacji logicznej. Da się mianowicie wyrazić w odpowiedniej aksjomatycznej arytmetyce, tym bardziej więc W SAMEJ TEORII T, że jeśli T jest niesprzeczna, to G_T, czyli symbolicznie: $\mathrm{Cons}_T \rightarrow G_T$.

Zdanie Gödla to nie jest jedno szczególne zdanie. Jest ono zrobione *dla* danej teorii T. Jest zawsze inne, choć sposób konstrukcji jest zawsze taki sam. Czy da się wyróżnić jedno z tych zdań? Na przykład dla największej możliwej teorii T? Otóż gdyby była teoria aksjomatyczna, która obejmuje całą matematykę, to zdanie Gödla dla niej, jako w niej niedowodliwe, byłoby niedowodliwe matematycznie (bo wszelkie metody matematyki byłyby zawarte w T), czyli w pewnym sensie absolutnie niedowodliwe. Oczywiście zakładamy w tym wywodzie, że ta hipotetyczna, wszechogarniająca teoria T jest niesprzeczna. Zdanie Gödla dla niej byłoby prawdziwe, ale absolutnie niedowodliwe.

Czy taka teoria istnieje? Zwykle mówi się, że nie. I to nie tylko dlatego, że nasze doświadczenie matematyczne przemawia raczej za tym, że pojawiają się coraz to nowe pojęcia i metody, które w praktyce wykraczają poza zastane teorie matematyczne. Nieistnienie wszechobejmującej teorii całej matematyki opiera się zwykle właśnie na twierdzeniu Gödla. Skoro mamy jakąś teorię trafnie formalizującą znaną matematykę, to jest ona niesprzeczna, a więc zdanie Gödla dla niej jest prawdziwe, ale nie jest dowodliwe w tej teorii. Znana nam matematyka ulega więc rozszerzeniu. Rozszerzeniu o to zdanie, które mówi o jakichś dziwnych zależnościach między liczbami, albo, co na jedno wychodzi, o zdanie Cons, wyrażające niesprzeczność tej dotychczas znanej matematyki.

Tę sytuację Gödel w 1951 roku nazwał „niewyczerpywalnością matematyki".[3]

Natomiast nie da się dowieść — jak twierdził już sam Gödel, wbrew niektórym późniejszym próbom, dokonywanym przez niespecjalistów — że nie może być teorii, która zawiera całą DOSTĘPNĄ NAM matematykę. Ona być może istnieje, ale jest tak skomplikowana, że nie możemy poznać jej niesprzeczności, a więc tym bardziej trafności. Niewykluczone jest więc, a przynajmniej nie wyklucza tego twierdzenie Gödla, że jesteśmy — co do potencji matematycznych — maszyną, ale taką, której sami nie możemy zrozumieć, czyli stwierdzić niesprzeczności jej «zasady działania».[4]

6. MATEMATYKA A FILOZOFIA

Czy osiągnięcia Gödla i im pokrewne wnoszą coś do rozważania tradycyjnych problemów filozoficznych? Przykład wyjaśnienia pojęcia efektywnej procedury (p. 4) jest godny uwagi, ale raczej odosobniony. Ponadto nie jest to problem ważny dla tradycji filozoficznej.

Stwierdziliśmy (p.1), że rozstrzyganie, w ścisłym a nie potocznym sensie, odnosi się do problemów masowych. Otóż w filozofii na pierwszy rzut oka nie ma problemów masowych. Nie pytamy, czy da się rozstrzygnąć, czy jakaś cecha przysługuje dowolnie zadanemu zdaniu, czy dowolnie wskazanemu człowiekowi, czy też nie. Zadajemy raczej pytanie o cechy wspólne wszystkim ludziom, o istotę: „Czym jest człowiek?". Jednak możemy ten problem wyrazić, używając pojęcia problemu masowego i rozstrzygalności. Zamiast definicji człowieka możemy rozważać problem „Czy dany (dowolnie) obiekt jest człowiekiem?". Wszyscy znamy nieudaną próbę odpowiedzi: człowiek to zwierzę dwunogie, bezpióre. Poszukiwanie takich odpowiedzi wygląda trochę na niepotrzebną igraszkę. Jednak rzecz powoli przestaje być pustą spekulacją. Mamy teraz możliwość utrzymywania przy życiu noworodków bardzo głęboko uszkodzonych. Ponadto jest coraz większa szansa, że pojawią się roboty, które będą wykazywać pewne cechy ludzkie. Jak traktować te istoty? Czy stosować w stosunku do nich zasady etyczne? Kwestia definicji człowieka może mieć zatem praktyczne znaczenie. Trudno jednak oczekiwać, że osiągniemy cokolwiek innego niż zmieniającą się w czasie definicję, w którą będziemy inkorporować nasze kolejne doświadczenia z człowieczeństwem i czymś, co może przypomina człowieczeństwo, ale nim nie jest.

---

[3] O „inexhaustibility" Gödel mówi w tak zwanym *Gibbs lecture* z 1951 roku, zamieszczonym w *Collected Works*, (red. S. Feferman *et al.*), Oxford University Press, Oxford 1995, vol. III, s. 305.

[4] Teza, że choć cała matematyka nie może być jedną teorią, to cała dostępna nam matematyka — owszem, jest zaskakująca. Wyjaśnienie wymaga dłuższego wywodu. (Mam zamiar to zrobić w osobnej publikacji.)

Pytamy: czym jest prawda? Tu rzecz tylko do pewnego stopnia możemy sprowadzić do pytania „Czym jest zdanie prawdziwe?". W tym stopniu, w jakim to jest możliwe, możliwe jest ujęcie kwestii prawdy jako zadania rozstrzygania problemu masowego; „Czy zdanie *p* jest prawdziwe?", a zapewne raczej: „Czy zdanie *p* jest prawdziwe w warunkach *w*?". W ten sposób pozbywamy się jednak zapewne możliwości analizy takich kwestii dotyczących prawdy jak: „Prawda jest cenniejsza niż fałsz", „Dla prawdy warto jest się poświęcić" itp.

Czym jest czas? Tu niemożliwe wydaje się stosowanie takiej kategorii jak problem masowy. Ta kategoria może więc mieć zastosowanie do niektórych tradycyjnych problemów filozoficznych, a do innych tylko w pewnym stopniu, natomiast do jeszcze innych — wcale. Zresztą nawet gdy ma, nie wydaje się, by posuwało to rozważania istotnie naprzód.

Stwierdziliśmy również (p. 1(b)), że należy określić, jakie środki mają być używane do rozstrzygania problemu. To też wydaje się nie mieć zastosowania do prawdziwie filozoficznych problemów. Jakie środki można stosować? Oczywiście wszystkie!

Czym jest człowiek? Czym jest prawda, czym czas? Kwestia rozwiązalności (czyli rozstrzygalności w sensie potocznym) takich tradycyjnych problemów jest chyba dość podobna właśnie do problemu wyjaśnienia pojęcia efektywności. Czy w innych wypadkach można liczyć na podobny sukces? Czyli — przypomnijmy — cud?

A może kwestia definicji efektywności to problem raczej matematyczny, a nie filozoficzny w ścisłym sensie? Może jest istotny tylko dla matematyki czy informatyki? Mógłby koś rzec: może w matematyce jest inaczej, daje się zrobić ścisłe definicje, ale przecież prawdziwie filozoficzne problemy nie dadzą się tak rozwiązać. Otóż nie! W matematyce bywa podobnie trudno. Najlepiej to widać na przykładzie pojęcia zbioru.

7. ZBIORY

Gödel zauważył, że w matematyce występuje jeszcze inna niewyczerpywalność. Dotyczy ona pojęcia zbioru. Pojęcie zbioru jest potoczne. Łatwo podać przykłady, trudno definicję. Twórca teorii mnogości Georg Cantor mówił, że zbiór to „wielość ujmowana przez nas jako jedność." Już na samym początku Cantor próbował dowieść, że nie ma zbioru mocy większej niż moc zbioru liczb naturalnych, ale mniejszej niż moc zbioru liczb rzeczywistych. Od ponad stu lat ta „hipoteza kontinuum" (w skrócie: CH) jest otwartym problemem. W międzyczasie bardzo wiele osiągnięto. Mianowicie wiemy, że CH jest niezależna na gruncie znanych aksjomatycznych teorii mnogości, czyli bez sprzeczności może być dołączona ona (tego dowiódł Gödel w 1938 r.), albo jej negacja (Paul J. Cohen, w 1963 r.). Jak więc jest naprawdę?

Są różne matematyczne uściślenia pojęcia zbioru, czyli różne aksjomatyzacje. One eksplikują pojęcie zbioru. Ale przyjmując, jak Gödel, istnienie zbiorów, rodzaj matematycznego platonizmu, musimy pytać, jak Cantor, o to, jak jest naprawdę: czy zachodzi CH? Rozstrzygnięcie (czyli rozwiązanie) problemu prawdziwości CH jest jak na razie poza naszymi możliwościami. Może zawsze będzie poza naszymi możliwościami? Dla wielu matematyków i filozofów to pytanie nie ma sensu. Zbiorów nie ma, mówią oni, są tylko nasze wyobrażenia, które wyrażane są w różnych teoriach zbiorów. Wiemy, że w znanych nam teoriach CH jest niezależna, czyli nie da się rozstrzygnąć (tu używamy pojęcia rozstrzygania w jeszcze jednym sensie: dowodliwości danego stwierdzenia lub jego negacji w ramach ustalonej teorii). Wedle tego wstrzemięźliwego podejścia, kojarzonego z nominalizmem i formalizmem, wiemy więc wszystko, co da się wiedzieć.

Można więc powiedzieć, że pytanie „Co to jest zbiór?" jest otwarte, dokładnie tak jak w filozofii. Są różne próby odpowiedzi i wszystkie okazują się częściowe. A przez niektórych autorów samo pytanie odrzucane jest jako bezsensowne — dokładnie tak jak w filozofii.

Wspomniana niewyczerpywalność pojęcia zbioru dotyczy nie tyle najogólniejszego pojęcia zbioru, co koncepcji tzw. kumulatywnej hierarchii zbiorów. Nie wchodząc w szczegóły, można ją opisać jako strukturę powstającą przez kolejne dołączanie zbiorów złożonych ze zbiorów już uzyskanych i tak dalej w nieskończoność, a właściwie w pozaskończoność. Otóż można postulować coraz mocniejsze aksjomaty nieskończoności, i to jak się wydaje bez sprzeczności. Jest to technicznie skomplikowane. Idea polega na tym, że częściowe uniwersum zbiorów (uzyskane do pewnego momentu) ma już pewne cechy, które przedtem uznawaliśmy za cechy całego uniwersum zbiorów. Tego, że z żadnego z tych aksjomatów nie wynika sprzeczność, nie da się dowieść przy użyciu słabszych założeń, tzn. metod elementarnych lub metod, które mogą się zawierać w którejś ze słabszych teorii mnogości, czyli teorii z którymś ze słabszych aksjomatów nieskończoności. Ta niedowodliwość wynika z twierdzenia Gödla. Nasza intuicja zbioru, a ściślej mówiąc kumulatywnej hierarchii zbiorów, sugeruje, że kolejne aksjomaty nieskończoności są niesprzeczne i, co więcej, że można tworzyć kolejne takie aksjomaty bez ograniczeń. To byłaby też niewyczerpywalność. «Przyglądanie się» rzeczywistości prowadzi do jej coraz głębszego opisu. Znowu widzimy pełną analogię do pojęć potocznych lub filozoficznych.

Opisana niewyczerpywalność mówi coś o naszym (intuicyjnym) pojęciu zbioru. Niewyczerpywalność wynikającą z twierdzenia Gödla można widzieć jako pogłębianie opisu naszego (intuicyjnego) pojęcia liczb naturalnych. Nie jest jasne, czy podobną sytuację można mieć w odniesieniu nie do liczb i zbiorów, ale do innych obiektów matematycznych. Innymi słowy, czy można mieć nieograniczoną hierarchię teorii dotyczącą innych obiektów, które wydają się dobrze określone? George Boolos w komentarzu do wykładu Gödla z 1951 roku.[5] zadał wprost pytanie, czy jest inny przykład niewyczerpywalności w matematyce, inny niż pogłębianie opisu liczb wskutek twierdzenia o niezupełności i zbiorów poprzez aksjomatyzowanie hierarchii kumulatywnej zbiorów?

---

[5] *Ibidem*, s. 295.

8. CZAS

Dyskusje o tym czym jest prawda trwają nadal i mimo osiągnięć Alfreda Tarskiego paradoks kłamcy ciągle niepokoi. Nie zatrzymując się przy tym temacie możemy podsumować, że uczynione dotąd uwagi o zbiorach, człowieku, prawdzie, prowadzą do tezy, którą trudno nazwać nieoczekiwaną: wielki problem filozoficzny nie nadaje się do rozwiązania raz na zawsze. Można go natomiast coraz głębiej rozumieć. Czy chodzi o zbiory, czy o czas.

O czasie mówi każdy. Mówią też fizycy. Ale ich koncepcja czasu nie daje tego poczucia cudu, który mamy przy okazji eksplikacji pojęcia efektywności, stosowanej do metod rozstrzygania i obliczania. W teoriach fizycznych czas jest niewiele więcej niż jednym z wymiarów odpowiedniej przestrzeni matematycznej, albo zmienną niezależną. Wbrew naszym życiowym doświadczeniom, czas jest u naukowców — i nieraz u filozofów — abstrakcją.

Tymczasem o czasie można pisać zupełnie inaczej, odwołując się wprost do naszego doświadczenia czasu, ale opisując nie to doświadczenie, ale sam czas. Czyni to na przykład Emanuel Lévinas w książce *Czas i to, co inne*:

„Czas jest relacją podmiotu do innego człowieka. ... Nie chodzi o naszą ideę czasu, ale o sam czas."[6] Chodzi o relację „paradoksalną, różną od wszystkich innych relacji naszej logiki ... Tutaj mamy relację bez członów."[7] Czas poprzez „erotyzm, ojcostwo, odpowiedzialność za bliźniego" jest „relacją do Całkowicie Innego, do Transcendentnego, do Nieskończoności. Relacją, czy też religią, która nie ma struktury wiedzy."[8]

Wyrwane z obszerniejszego opisu cytaty muszą budzić raczej zdziwienie niż poczucie zrozumienia. Ale tego typu opisy powszechnych ludzkich doświadczeń są niezbędne, jeśli chcemy wiedzieć, czym jest czas. Według Lévinasa nie chodzi o zwyczajne rozumienie, ale o „relację do tego, co będąc samo w sobie czymś nieskończonym, nie pozwalałoby się pojąć, ogarnąć." Po francusku „rozumieć" to „comprendre", czyli „com-prendre", a zatem również: wziąć, za-brać, czyli zawładnąć. A tego nie mamy czynić, bo zniszczymy Nieskończone. (Rozbiór słów może więc być cenny!)

---

[6] E. Lévinas, *Czas i to, co inne*, tł. J. Migasiński, Wydawnictwo KR, Warszawa 1999, s. 19 (oryginał wydany w 1948 r.).

[7] *Ibidem*, s. 10, ze wstępu (z 1979 r.).

[8] *Ibidem*, s. 7 (wstęp).