Filozofia Nauki
Rok IX, 2001, Nr 4(36)

Krzysztof Wójtowicz

Naturalizm matematyczny Penelope Maddy: próba analizy

Praca [Wójtowicz 2001a] zawiera prezentację koncepcji matematycznego naturalizmu Penelope Maddy. W tym artykule koncepcja Maddy zostanie poddana krytycznej analizie.

Przedmiotem rozważań będą następujące zagadnienia:

(i) argumenty Maddy na rzecz naturalizmu matematycznego;
(ii) teza Maddy, iż problematyka filozoficzna nie ma znaczenia dla rozwoju matematyki i decyzji metodologicznych podejmowanych przez matematyków;
(iii) analizy Maddy dotyczące argumentu z niezbędności Quine'a;
(iv) zasadność maksym MAKSYMALIZUJ i UNIFIKUJ;
(v) techniczne i metodologiczne aspekty podanych przez Maddy kryteriów i trudności związane z tymi kryteriami.

Problemom (i)—(iii) poświęcona jest część pierwsza. Problemy (iv)—(v) analizowane są w części drugiej.

1. PROBLEM ISTNIENIA OBIEKTÓW MATEMATYCZNYCH I STATUS ARGUMENTU Z NIEZBĘDNOŚCI

Tytuły poszczególnych paragrafów stanowią lapidarne sformułowania argumentów Maddy.

1.1. Naukowcy są «oszczędni» przy postulowaniu istnienia obiektów teoretycznych, a «rozrzutni» przy abstrakcyjnych. Dlatego fakt występowania w teoriach fizycznych odniesień do obiektów matematycznych nie stanowi argumentu na rzecz istnienia obiektów matematycznych.

Przy konstruowaniu teorii naukowych konieczne jest wprowadzanie pewnych postulatów egzystencjalnych. W szczególności postuluje się — w oparciu o eksplanacyjne kryterium istnienia — istnienie przedmiotów teoretycznych. Jednak naukowcy są bardzo ostrożni przy wprowadzaniu postulatów dotyczących istnienia przedmiotów teoretycznych. W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że naukowcy dołączają do swej teorii postulat dotyczący istnienia obiektu teoretycznego dopiero wtedy, gdy jest to absolutnie konieczne. Natomiast nie mają żadnych oporów przed posługiwaniem się dowolnie zaawansowanym instrumentarium matematycznym — czyli są gotowi postulować *ad hoc* istnienie nowych obiektów matematycznych, aby stworzyć lepszą, użyteczną teorię.[1] To — według Maddy — świadczy o tym, że kryteria istnienia w odniesieniu do obiektów fizycznych i matematycznych są istotnie różne. W wypadku matematyki standardy te są bowiem tak «rozluźnione», że nie można już poważnie mówić o istnieniu obiektów matematycznych. Sam fakt, że w danej teorii fizycznej posługujemy się instrumentarium matematycznym zakładającym istnienie obiektów matematycznych typu φ nie stanowi więc argumentu na rzecz istnienia tych obiektów. Dzieje się tak, ponieważ — w przeciwieństwie do postulatów egzystencjalnych dotyczących istnienia obiektów teoretycznych — matematyczne postulaty egzystencjalne wprowadzane są również wtedy, kiedy jest to wygodne, ale nie jest konieczne.

Obserwacja ta jest słuszna, jednak wniosek nie jest uprawniony. Aby argument tego typu miał moc, należałoby wykazać, że kiedy fizyk konstruuje teorię, to w sytuacji, gdy ma do wyboru albo wprowadzić do swojej teorii zdanie egzystencjalne głoszące istnienie obiektu teoretycznego; albo wprowadzić do teorii postulat dotyczący istnienia obiektu abstrakcyjnego, to decyduje się na drugą ewentualność, gdyż sądzi, że nie zobowiązuje go to ontologicznie. Czy jednak tak jest rzeczywiście? Czy faktycznie w fizyce można wskazać wypadki dokonywania takiego wyboru (tzn. czy faktycznie wzmocnienie matematycznych założeń egzystencjalnych prowadzi do «oszczędności» ontologicznej w odniesieniu do obiektów teoretycznych)? Maddy ogranicza się jedynie do ogólnikowego stwierdzenia, iż tak właśnie jest, nie podając żadnego przykładu. Rodzi to uzasadnione podejrzenie, iż argument Maddy jest argumentem czysto spekulatywnym, nie znajdującym potwierdzenia w praktyce naukowej.

Można zgodzić się z obserwacją, że fizycy czerpią swobodnie ze skarbca narzędzi matematycznych — posługują się taką teorią, która najlepiej nadaje się do matematycznego reprezentowania i opisania badanych zjawisk. Mechanika kwantowa po-

[1] Naukowiec, któremu w jego teorii potrzebne są wyniki dotyczące liczb naturalnych, korzysta z teorii liczb naturalnych. Jeśli potrzebne są liczby rzeczywiste — korzysta z teorii liczb rzeczywistych. Jeśli potrzebne są liczby rzeczywiste, wraz ze zbiorami liczb rzeczywistych, funkcjami rzeczywistymi, *etc.* — wykorzystuje bogatszą teorię matematyczną.

sługuje się całym aparatem analizy funkcjonalnej, zaś kosmologia aparatem geometrii różniczkowej, pomimo iż być może — z logicznego punktu widzenia — wystarczyłyby słabsze narzędzia. Jeśli reprezentujemy zjawiska kwantowe tylko w ośrodkowych przestrzeniach Hilberta, to nie jest potrzebna cała ogólna teoria przestrzeni Hilberta, wykorzystująca (poprzez ogólny lemat Kuratowskiego-Zorna) pewnik wyboru, ale wystarczyłby np. przeliczalny pewnik wyboru, albo aksjomat o wyborach zależnych. Fizyk rzeczywiście korzysta z wszelkich dostępnych narzędzi, nie dbając o to, że mógłby wykorzystać słabsze, ale mniej wygodne.

Rozważmy jednak następujące zagadnienie, które pozwoli na wyjaśnienie problemu zobowiązań ontologicznych teorii fizycznych w świecie abstraktów.

Niech T_1 i T_2 będą dwoma teoriami matematycznymi, wykorzystywanymi w teorii fizycznej F (oznaczmy przez $T^F{}_1$ i $T^F{}_2$ dwie zmatematyzowane teorie fizyczne, które różnią się między sobą w zakresie stosowanego matematycznego instrumentarium, w szczególności siłą założeń egzystencjalnych dotyczących obiektów matematycznych). Niech Φ będzie zbiorem relewantnych fizycznie zdań.[2] Rozważmy teraz następujące dwie sytuacje:

(i) $T^F{}_2$ jest TWÓRCZA nad $T^F{}_1$ względem Φ[3].
(ii) $T^F{}_2$ jest NIETWÓRCZA nad $T^F{}_1$ względem Φ.[4]

W sytuacji (i), jeśli $T^F{}_2$ wyjaśnia więcej niż $T^F{}_1$, to znaczy to po prostu, że konieczne było użycie właśnie teorii $T^F{}_2$. Skoro jednak użycie teorii $T^F{}_2$ było niezbędne, to nie ma sensu stwierdzenie, że posłużyliśmy się $T^F{}_2$ zamiast $T^F{}_1$, gdyż ma ona silniejsze założenia dotyczące obiektów matematycznych, co pozwala (być może) na «zaoszczędzenie na obiektach teoretycznych». Jest po prostu tak, że posłużyliśmy się teorią $T^F{}_2$, bo teoria $T^F{}_1$ nie pozwoliłaby na wyjaśnienie zjawisk. W tej sytuacji argumentacja Maddy staje się całkowicie bezpodstawna.

W sytuacji (ii), jeśli obie teorie $T^F{}_1$ i $T^F{}_2$ wyjaśniają te same zjawiska z klasy Φ, to $T^F{}_2$ można traktować jako narzędzie — pozwala ona bowiem jedynie na wyjaśnienie tej samej klasy zjawisk co $T^F{}_1$. Teoria $T^F{}_2$ może być natomiast wygodniejsza (bardziej ekonomiczna, prostsza, *etc.*). Pojawia się w tym momencie pytanie o zobowiązania ontologiczne teorii (zmatematyzowanej teorii fizycznej, przy założeniu, że klasą relewantnych zdań jest Φ). Sądzę, że w rozważanym tu przypadku można uznać, iż zobowiązania ontologiczne teorii koniecznej dla wyjaśnienia Φ ograniczają się do zobowiązań (słabszej) teorii $T^F{}_1$.

W ogólnym wypadku, problem ustalenia zobowiązań ontologicznych teorii fizycznej koniecznej dla wyjaśnienia Φ można sformułować następująco. Przypuśćmy,

---

[2] W języku teorii T_F można sformułować wiele zdań, ale sensowne jest założenie, że tylko niektóre spośród nich są istotne z punktu widzenia wyjaśniania hipotez empirycznych, a więc że wyróżniona jest pewna klasa takich zdań Φ.

[3] Można to rozumieć w ten sposób, że $T^F{}_2$ wyjaśnia więcej zjawisk niż $T^F{}_1$.

[4] Z teorii $T^F{}_1$ i $T^F{}_2$ wynikają te same zdania z klasy Φ, tj. $Cn(T^F{}_1)\cap\Phi=Cn(T^F{}_2)\cap\Phi$.

że teoria T^F wyjaśnia Φ. Należy ustalić, jakie teorie fizyczne T^F_i (tworzą one pewną klasę teorii $\mathbf{TF}=\{T^F_i:i\in I\}$) również pozwalają na wyjaśnienie Φ (innymi słowy: chodzi o znalezienie klasy teorii $\mathbf{TF}=\{T^F_i:i\in I\}$ takich, aby T^F była nietwórcza względem Φ nad każdą z teorii T^F_i).[5] Zobowiązania ontologiczne, jakie są konieczne dla skonstruowania teorii wyjaśniającej Φ, to po prostu zobowiązania najsłabszej spośród teorii z klasy **TF**[6]. Oczywiście, może się też okazać, że to właśnie badana przez nas teoria T^F ma najsłabsze zobowiązania.

Argumentacja Maddy jest więc pozbawiona podstaw. Jeśli teoria fizyczna T^F jest najsłabszą teorią, o minimalnych zobowiązaniach ontologicznych w świecie obiektów matematycznych, to bezzasadne jest stwierdzenie, iż fizycy byli «nieoszczędni» przy konstruowaniu tej teorii i że przyjmowali inne standardy w momencie wprowadzania postulatów egzystencjalnych dotyczących obiektów teoretycznych i abstrakcyjnych. To, iż fizycy mogą mieć poczucie, że można «bezkarnie» stosować dowolnie silne matematyczne instrumentarium nie ma znaczenia. W rozważanej sytuacji fizycy byli bez wyjścia — bowiem dla wyjaśnienia zjawisk z klasy Φ MUSIELI odwołać się do teorii T^F, z całym jej «dobrodziejstwem ontologicznego inwentarza». Jeśli natomiast okaże się, że teoria T^F nie jest najsłabsza, że można wskazać teorię T^F_i o słabszych zobowiązaniach, ale również wyjaśniającą zjawiska z klasy Φ (taką że T^F jest nietwórcza nad T^F_i względem Φ), to nie znaczy to bynajmniej, iż argumentacja Maddy jest słuszna. Znaczy to jedynie, że — dla ustalenia zobowiązań ontologicznych — konieczne było przeprowadzenie dodatkowych analiz metateoretycznych (wyjaśniających kwestie nietwórczości). Maddy słusznie zauważa, że fizycy korzystają ze wszelkich dostępnych narzędzi. Jednak jej argumentacja jest skuteczna tylko wobec naiwnej wersji argumentu z niezbędności, który należałoby może nazwać „argumentem z obecności". Nie ma on wiele wspólnego z argumentem z niezbędności i zarzuty Maddy trafiają w próżnię.

Jedyna sytuacja, w której argumentacja Maddy mogłaby mieć zastosowanie, przedstawia się następująco. Rozważmy dwie teorie T^F_1 i T^F_2 — obie wyjaśniają równie dobrze pewien zbiór danych, przy czym jedna z nich (np. T^F_1) przyjmuje więcej zobowiązań dotyczących obiektów teoretycznych, a druga (T^F_2) — obiektów matematycznych. Wtedy wybór T^F_2 ilustrowałby sytuację, o jakiej mówi Maddy. Jednak Maddy nie podaje ani jednego przykładu takiej sytuacji, i jest dość wątpliwe, czy faktycznie zdarza się tak, iż fizyk może zamiast postulatu egzystencjalnego dotyczącego obiektów teoretycznych wprowadzić dodatkowe założenia dotyczące obiektów

[5] Uwaga: klasa **TF** nie musi zawierać wszystkich teorii spełniających warunek nietwórczości. Można nakładać dodatkowe warunki dotyczące np. «naturalności» czy sensu fizycznego tych teorii. Jest to jednak poboczny problem — chodzi bowiem o to, że jest JAKAŚ klasa **TF** takich teorii.

[6] Na przykład takiego typu badania można prowadzić posługując się wynikami matematyki odwrotnej, por. np. [Wójtowicz 2001b]. Pomijam tu problem, że może się okazać, że w klasie teorii **TF** istnieją elementy minimalne, ale nie ma najmniejszego. Wtedy problem ustalenia zobowiązań się komplikuje — powstają bowiem alternatywne teorie wyjaśniające Φ, o «niekompatybilnych» zobowiązaniach ontologicznych.

matematycznych (czyli że może wyeliminować zobowiązania ontologiczne dotyczące obiektów teoretycznych na rzecz zobowiązań dotyczących obiektów matematycznych). Ciężar dowodu spoczywa w tym wypadku na Maddy.

1.2 Założenie o istnieniu świata fizycznego jest istotne z punktu widzenia fizyki. W wypadku matematyki jest inaczej.

Maddy twierdzi, że o ile realistyczne stanowisko jest istotne dla nauki — w tym sensie, że nauki przyrodnicze wygłaszają tezy egzystencjalne dotyczące istnienia i statusu ontologicznego przedmiotu jej badań — to nie jest ono istotne dla matematyki. Innymi słowy: o ile istnienie i status ontologiczny obiektów fizycznych (tzn. fakt, że obiekty fizyczne istnieją w czasoprzestrzeni) jest przedmiotem badań fizyki (i jest dla niej ważny), to istnienie i status ontologiczny obiektów matematycznych jest nieistotny z punktu widzenia matematyki. Maddy twierdzi więc, że pytania o istnienie mają inny status w wypadku fizyki i inny w wypadku matematyki. Tym samym problem istnienia obiektów matematycznych nie jest istotny.

Argument ten jest — moim zdaniem — wadliwy i opiera się na pewnym pomieszaniu pojęć. Rozważmy bowiem następujące cztery zagadnienia:

(F1) Czy dana teoria fizyczna T_F zakłada istnienie obiektów fizycznych typu P?

(F2) Czy dana teoria fizyczna T_F jest teorią adekwatnie opisującą rzeczywistość?

(M1) Czy z danej teorii matematycznej T_M wynika zdanie $\exists x\varphi(x)$ (istnienie obiektu typu φ)?

(M2) Czy teoria matematyczna T_M posiada interpretację?

Widoczne są analogie pomiędzy tymi pytaniami. Odpowiednikami są (F1) i (M1) oraz (F2) i (M2). Pytania (F1) i (M1) stanowią pytania wewnętrzne, dotyczące tego, jakie tezy egzystencjalne pojawiają się w tych teoriach. Są to więc pytania czysto techniczne. Natomiast pytania (F2) i (M2) dotyczą interpretacji teorii. Twierdzę, że argumentacja Maddy opiera się na bezzasadnym zestawieniu pytań z grup (F2) i (M1). Oto uszczegółowienie mojej tezy.

Rozważmy następujące trzy klasy: **E** — klasę (możliwych) zbiorów danych empirycznych, **M** — klasę (możliwych) zbiorów zasad (ograniczeń) metodologicznych i **T** — klasę (możliwych) teorii fizycznych, służących do reprezentowania, interpretowania i wyjaśniania danych. Rozważmy relację trójargumentową $R \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{M} \times \mathbf{T}$. Fakt, że R(E,M,T) (gdzie $E \in \mathbf{E}$, $M \in \mathbf{M}$, $T \in \mathbf{T}$) odczytywać będziemy jako: teoria T wyjaśnia zbiór danych empirycznych E i spełnia przy tym zasady metodologiczne M.[7] Z samego faktu, iż R(E,M,T) nie wynika oczywiście, że teoria T opisuje nasz świat — nie wiadomo bowiem, czy E stanowi zespół danych charakterystycznych dla naszego świata, ani czy zasady M są zasadami akceptowanymi w naszym świecie. Dla samego konstruowania teorii adekwatnie wyjaśniającej dane doświadczalne, założenie o tym,

[7] Nie analizuję tu problemu natury relacji R, tego, co znaczy, że teoria wyjaśnia dane, *etc.*

że te dane pochodzą „od świata zewnętrznego" nie jest jednak konieczne. Można tworzyć teorie fizyczne w oparciu o fikcyjne dane (np. jak wygląda Wszechświat, w którym tensor pola grawitacyjnego jest inny?). Pytania o to, jakie obiekty istnieją w myśl danej teorii T są pytaniami typu (F1). Udzielenie odpowiedzi na pytania typu (F2) wymaga zidentyfikowania danych dotyczących naszego świata oraz zasad metodologicznych przyjmowanych w naszym świecie.[8]

Podobna sytuacja jest w wypadku matematyki. Pytaniom typu (F1) odpowiadają pytania typu (M1).[9] W ramach (F1) i (M1) nie zadajemy pytań o obiektywne istnienie obiektów danego typu. Pytania takie zadajemy dopiero w ramach zagadnień (F2) i (M2) — gdyż są to pytania o to, czy analizowana teoria jest teorią zinterpretowaną. Tymczasem Maddy opiera swoją argumentację na zatarciu tych różnic i pomieszaniu poziomów pytań o istnienie, zestawiając ze sobą pytania (F2) i (M1). Stąd łatwo już wysnuć wniosek, że problem istnienia obiektów matematycznych jest pseudoproblemem.

Według Maddy, o ile fizyka mówi nam, że obiekty fizyczne istnieją w czasoprzestrzeni, to matematyka nie mówi nam nic na temat sposobu istnienia obiektów matematycznych. Tym samym — twierdzi Maddy — pytania o istnienie w fizyce są pytaniami naukowymi (istotnymi z punktu widzenia fizyki), zaś pytania o istnienie w matematyce — są pytaniami nieistotnymi z punktu widzenia matematyki, czyli nienaukowymi. Równie zasadne byłoby jednak stwierdzenie, że fizyka również nie mówi nam nic na temat sposobu istnienia obiektów fizycznych: czasoprzestrzeń jest bowiem areną, na jakiej rozgrywa się akcja teorii fizycznych, i definicyjną cechą teorii fizycznych jest to, iż opisują zjawiska i obiekty o charakterystyce czasoprzestrzennej. Każdy obiekt fizyczny jest czasoprzestrzenny — gdyż inaczej nie można byłoby go opisywać. Zatem — modyfikując nieco rozumowanie Maddy — można powiedzieć tak: teorie fizyczne opisują pewną klasę przedmiotów. Nazywamy je przedmiotami czasoprzestrzennymi. Znaczy to tyle, że znajdują się one w czasoprzestrzeni, gdyż wszystkie teorie naukowe formułowane są w „czasoprzestrzennym paradygmacie". W odpowiedzi na pytanie o to, czy jakiś obiekt istnieje, tkwi już stwierdzenie, że jest

[8] Rozważmy «fizyka idealistę». Gdyby np. Berkeley żył współcześnie, i był filozofującym fizykiem, mógłby — w spójny sposób — reprezentować stanowisko, iż obiekty materialne nie istnieją, a fizyka opisuje jedynie stały porządek, w jakim dostarczane są nam wrażenia. Dla ekonomicznego wyjaśnienia prawidłowości dotyczących tych wrażeń wprowadzamy pojęcia takie jak „czasoprzestrzeń", „przedmiot materialny", „oddziaływanie na nasze zmysły" *etc.* W idealistycznej interpretacji można byłoby zachować pojęcie „sensu fizycznego" danej hipotezy czy teorii — poprzez odwołania do zespołu danych empirycznych E oraz kryteriów M. Fizyka Berkeleya nie różniłaby się od fizyki zdroworozsądkowego realisty i Berkeley tak samo jak zdroworozsądkowy realista zastanawiałby się nad problemem istnienia takiej czy innej cząstki, nad własnościami danego pierwiastka, czy np. nad temperaturą topnienia wolframu. Taka teoria nie różniłaby się od naszej fizyki na poziomie pytań z grupy (F1), byłaby natomiast inaczej interpretowana z zewnątrz, czyli na poziomie (F2).

[9] Można nawet mówić o matematycznym odpowiedniku relacji R: danymi są pojęcia, jakie chcemy reprezentować w danej teorii, kryteria metodologiczne dotyczą np. ograniczeń jej siły, dopuszczalnych własności metalogicznych, *etc.*

to obiekt czasoprzestrzenny (czy inaczej: w samym pojęciu „obiektu fizycznego" tkwi jego czasoprzestrzenność). *Per analogiam* można byłoby powiedzieć, że opisywane przez matematykę obiekty mają charakter pozaczasoprzestrzenny, mnogościowy — wszystkie obiekty matematyczne dają się reprezentować poprzez zbiory, zatem ich sposób istnienia jest «mnogościowy». Oczywiście fakt, że matematykę można uprawiać w schemacie teoriomnogościowym jest bardzo istotny dla matematyki, podobnie jak fakt, iż fizykę uprawiamy w ramach „czasoprzestrzennego paradygmatu" jest istotny dla fizyki. Tym samym odróżnienie Maddy istotnych-dla-nauki pytań o istnienie obiektów w czasoprzestrzeni i nieistotnych-dla-matematyki pytań o istnienie obiektów matematycznych traci rację bytu. Sam bowiem fakt, że teorie fizyczne dotyczą obiektów fizycznych, a matematyczne obiektów matematycznych, nie mówi nic na temat tego, czy teorie te są teoriami zinterpretowanymi.

1.3. Nawet gdyby nie było obiektów matematycznych, to nadal rozwijałaby się matematyka. *Ergo*: nie ma powodu, aby przyjmować istnienie obiektów matematycznych.

Maddy, uzasadniając tezę, że znaczenie argumentacji filozoficznej dla analiz metodologicznych jest znikome, posługuje się następującym argumentem: gdyby nawet konkluzywnie wykazano, że realizm jest bezzasadny (czyli że żadne obiekty matematyczne nie istnieją), to matematycy i tak nadal zajmowaliby się matematyką i stawiali pytania o prawdziwość pewnych twierdzeń egzystencjalnych (np. czy istnieje $0^{\#}$, albo niemierzalny podzbiór prostej takiej czy innej klasy, albo przestrzeń funkcyjna o zadanych własnościach). A więc argumentacja filozoficzna nie jest dla matematyka istotna i matematyka rozwija się zgodnie ze swoimi własnymi standardami — niezależnie od takich czy innych rozstrzygnięć filozoficznych.

Należy zauważyć, że mamy tu do czynienia z dwoma grupami zagadnień. Pierwsza to:

(i) Jak rozwija się matematyka? Czy analizy filozoficzne mają wpływ na ten rozwój? Druga to:

(ii) Czy istnieją obiekty matematyczne?

Pytanie (i) ma charakter w gruncie rzeczy historyczny (socjologiczny) i można udzielić na nie odpowiedzi poprzez analizę danych historycznych. Pytanie (ii) ma natomiast charakter filozoficzny — i odpowiedź na pytanie (ii) nie musi być bezpośrednio uzależniona od odpowiedzi na pytanie (i).

Maddy natomiast obiera inną drogę. Tezę, iż matematyka rozwija się niezależnie od dyskusji filozoficznych stara się uzasadnić poprzez spekulatywne argumenty, dotyczące również filozoficznych pytań o istnienie obiektów matematycznych. Uważam za istotne przeanalizowanie jej argumentacji.[10] Ma ona następujące słabości:

---

[10] Nie analizuję tutaj tezy, iż rozwój matematyki uzależniony od dyskusji filozoficznej. Zajmuję

(1) Maddy odwołuje się do hipotezy, w myśl której „konkluzywnie wykazano by nieistnienie obiektów matematycznych". Co to znaczy?

Jest oczywiste, że gdyby wykazano metodami fizyki, że nie istnieje obiekt fizyczny typu P, to fizycy nie zadawaliby już sobie pytania o jego własności. Ale podobnie, gdy wykazuje się metodami MATEMATYCZNYMI że nie istnieje obiekt matematyczny typu φ (np. kwadratowe koło, albo skończony gęsty porządek liniowy), to matematycy nie zadają oczywiście pytania o istnienie i własności tego obiektu. Maddy jednak nie precyzuje, jakimi metodami miałoby dokonać się konkluzywne wykazanie nieistnienia obiektów matematycznych. Oczywiście nie mogłoby to być wykazanie metodami matematycznymi — gdyż wówczas matematycy przestaliby się w ogóle zajmować tym zagadnieniem. Czy konkluzywne wykazanie nieistnienia obiektów matematycznych może być dokonane w ramach nauk przyrodniczych? Raczej nie — nauki przyrodnicze z definicji wypowiadają się tylko i wyłącznie na temat przedmiotów czasoprzestrzennych, są niejako obojętne wobec postulatów egzystencjalnych dotyczących obiektów abstrakcyjnych. Pytanie o to, czy matematyka stanowi jedynie instrument, czy też niefizyczny składnik rzeczywistości nie jest pytaniem analizowanym w ramach teorii fizycznych. A zatem konkluzywne wykazanie nieistnienia obiektów matematycznych, o którym mówi Maddy, musiałoby się opierać o argumentację natury filozoficznej. Tu jednak pojawiają się pewne trudności.

Po pierwsze, wydaje się być mało prawdopodobne, aby można było konkluzywnie rozstrzygnąć filozoficzny spór o istnienie przedmiotów matematycznych.[11]

Po drugie, podobnego argumentu można byłoby użyć w stosunku do fizyki. Oto jego przykładowe sformułowanie: gdyby konkluzywnie wykazano, że nie istnieje świat fizyczny, a jedynie wiązki wrażeń, to fizycy nadal uprawialiby fizykę (por. rozważania na temat fizyka-idealisty w paragrafie 1.2); stąd wynika, że problem istnienia świata jest nieistotny. Maddy nie wyjaśnia, dlaczego jej argument nie rozciąga się też na fizykę (a tymczasem takie rozszerzenie się tu jawnie narzuca).

(2) Niekiedy — w obronie stanowiska formalistycznego — formułuje się taki argument: „Wyobraźmy sobie, że pewnego dnia znikają liczby. Liczby niewątpliwie występują we wszelkich teoriach fizycznych. Czy ich zniknięcie spowoduje, że przestaną obowiązywać prawa fizyki, że samoloty zaczną spadać, *etc.*? Nie! A więc kwe-

---

się jedynie argumentacją Maddy.

[11] Argumentacja Maddy opiera się na pewnym eksperymencie myślowym. Maddy wychodzi od założenia, że konkluzywnie wykazano by nieistnienie obiektów matematycznych. Nie jest jednak oczywiste, jakiego typu eksperymenty myślowe są dopuszczalne, i czy opieranie eksperymentu myślowego na założeniu, które jest niemożliwe do spełnienia jest sensowne.

Dyskusja o problemie statusu eksperymentów myślowych w argumentacji filozoficznej wykracza poza ramy tego artykułu. Można jednak zgodzić się z tym, że nie wszystkie eksperymenty myślowe są dopuszczalne. Nie jest wcale oczywiste, po której stronie «linii demarkacyjnej» lokuje się argumentacja Maddy (i — prezentowana nieco dalej — argumentacja E. Nelsona).

stia istnienia liczb jest pseudoproblemem — i nie ma powodu zakładać, że liczby istnieją. Nasz świat bez liczb nie zmieniłby się" (por. np. [Nelson 1994, 571]).[12]

Argument ten jest chybiony — tak samo można byłoby bowiem argumentować na rzecz fenomenalizmu: wyobraźmy sobie, że znikają obiekty, a zostają tylko wrażenia. Czy znaczy to, że przestają obowiązywać prawa fizyki, że samoloty spadają (przy czym oczywiście stwierdzenie to znaczyłoby: „nasze wrażenia zmieniają się i wydaje się nam, że samoloty spadają")? Oczywiście nie! Naukowcy nadal posługiwaliby się pojęciami takimi jak „cząstka elementarna", „gen", „półprzewodnik", *etc.* Zmieniła by się jedynie interpretacja pojęcia „istnienia". Pozostałoby ono pojęciem wewnętrznym dla danej teorii fizycznej. Dlatego nie ma potrzeby, aby zakładać istnienie obiektów poza danymi. Nie można jednak tego sposobu argumentacji uznać za poważny argument na rzecz fenomenalizmu.

1.4. W praktyce matematycznej matematycy nie korzystają z argumentu z niezbędności.

Maddy twierdzi, iż matematycy przy uzasadnianiu istnienia obiektów matematycznych nie odwołują się do argumentu z niezbędności, tylko do formalnych dowodów twierdzeń egzystencjalnych. Z kolei aksjomaty matematyczne (w oparciu o które dowodzone są twierdzenia matematyczne) też nie są uzasadniane przez odwołanie się do argumentu z niezbędności, ale przez odwołanie do poczucia oczywistości, intuicyjności czy naturalności. Standardy uzasadniania istnienia w matematyce nie mają więc nic wspólnego ze standardami uzasadniania istnienia poprzez argument z niezbędności. Tym samym — twierdzi Maddy — argument z niezbędności nie odgrywa żadnej roli w praktyce matematycznej. Ponieważ jednak punktem wyjścia analiz filozoficznych winna być praktyka matematyczna, znaczy to, że argument z niezbędności nie powinien być (jako odległy od praktyki matematycznej) stosowany w dyskusji problemu istnienia obiektów matematycznych. W takim ujęciu argument z niezbędności nie stanowi *de facto* żadnego argumentu pozytywnego na rzecz istnienia obiektów matematycznych.

Argumentacja Maddy ma następujące słabości:

(1) Opiera się na pomieszaniu różnych pojęć „istnienia": w sensie «wewnętrznym» — matematycznym (tzn. relatywnie do teorii matematycznej T istnieje obiekt typu φ, jeśli T implikuje[13] $\exists x\varphi(x)$) i w sensie «zewnętrznym» — przypisania pewnym teoriom matematycznym interpretacji (por. rozróżnienie na pytania typu (M1) i (M2) z paragrafu 1.2). Matematycy zajmują się tylko sensem technicznym — i tu nie ma

---

[12] Maddy nie formułuje swojego argumentu w dokładnie ten sam sposób. Analizuję tutaj jednak także argumentację Nelsona, gdyż widoczne są analogie z argumentacją Maddy.

[13] Nie podejmuję tu problemu, czy chodzi o wynikanie semantyczne, czy syntaktyczne, które różnią się w tych systemach logicznych, gdzie nie zachodzi twierdzenie o pełności, np. w logice drugiego rzędu).

oczywiście miejsca na argument z niezbędności (ani żaden inny argument filozoficzny), tylko na dowody formalne. Argument z niezbędności pojawia się dopiero wtedy, kiedy okaże się, że pewna teoria jest używana do opisu świata. Dopiero wtedy sensowne jest stawianie pytań dotyczących ontologii tej teorii.[14] Ale oczywiście zwolennik argumentu z niezbędności nie twierdzi, że matematyk, przy uzasadnianiu twierdzeń egzystencjalnych, powinien odwoływać się do argumentu z niezbędności, zamiast do dowodów. To byłoby pomieszanie porządków: po prostu argument z niezbędności odnosi się do problemu (M2), a twierdzenia egzystencjalne matematyki do problemu (M1). Maddy miesza różne sensy terminu „istnieć" — i jej argumentacja, odwołująca się rzekomo do praktyki matematycznej, opiera się na zwykłym pomieszaniu pojęć

(2) Maddy twierdzi, że matematycy przy uzasadnianiu aksjomatów czy postulatów swych teorii odwołują się do pewnych intuicji, czy wręcz do poczucia oczywistości, (piękna, harmonii, *etc.*) — jednak źródłem tych intuicji nie jest argument z niezbędności. Tym samym rola argumentu z niezbędności w matematyce jest znikoma. Wobec tej argumentacji można wysunąć następujące zastrzeżenia:

Przede wszystkim dotyczy ona tylko psychologicznych efektów pracy matematyka — tego, że «czuje» on matematyczną rzeczywistość, będącą przedmiotem opisu jego teorii, że ma poczucie, iż bada coś faktycznie istniejącego, a nie tylko przekształca ciągi symboli. Argument z niezbędności nie dotyczy jednak kwestii psychologicznych, a problemu istnienia, który nie jest z nimi związany.

Co więcej, nawet gdyby zaakceptować ten sposób argumentacji, nietrudno użyć go przeciwko Maddy. Można bowiem wskazać przykłady fizyków matematycznych, którzy swoje poczucie «obecności» obiektów matematycznych czerpią nie z badania teorii matematycznych, ale z faktu, że tak dobrze nadają się one do opisu świata fizycznego. Argumentowi temu można nadać następującą postać: to, że teorie matematyczne w tak skuteczny sposób opisują świat fizyczny (tzn. że tak dobrze dają się zastosować w teoriach fizycznych) świadczy o tym, że między światem fizycznym a matematycznym jest pewna harmonia, że świat matematyczny stanowi odbicie struktury świata fizycznego.[15] Taka argumentacja w istotny sposób opiera się na fakcie, że matematyka stosuje się do opisu świata, że jest narzędziem wykorzystywanym

---

[14] Nie twierdzę, że tak przedstawia się porządek chronologiczny. Proces konstruowania teorii fizycznej jest często równoczesny z tworzeniem narzędzi matematycznych dla tej teorii — i nie da się oddzielić tych etapów. Logiczna struktura przedstawia się jednak następująco:

1. Fizyk «składa zamówienie» na pewne narzędzia matematyczne.

2. Matematyk konstruuje teorię o danej własności (często fizyk = matematyk; często też fizyk korzysta z już istniejących narzędzi. Można powiedzieć, że jego zamówienie zostało zrealizowane, zanim je złożył).

3. Fizyk stosuje matematyczne instrumentarium.

4. Filozof interpretuje całą sytuację.

[15] Argument ten celowo sformułowany jest nieprecyzyjnie; chodzi tu tylko o ukazanie pewnego kierunku myślenia. Wydaje się, że pod tego typu rozumowaniem podpisaliby się np. Penrose i Heller.

w tym opisie. Intuicjom matematyka, który ignoruje zastosowania (na którego przykład powołuje się Maddy) można więc przeciwstawić intuicje fizyka-platonika, który właśnie w fakcie istnienia zastosowań upatruje argument na rzecz istnienia świata matematycznego. Maddy zdaje się twierdzić, że intuicje jej matematyka stanowią poważny argument, w przeciwieństwie do intuicji platonizującego fizyka (nie twierdzi tego wprawdzie *explicite*, ale takie stanowisko musiałaby konsekwentnie zająć). Jednak równie zasadny (a ściśle: równie bezzasadny) byłby przeciwny punkt widzenia. Argument Maddy nie jest więc poprawny.

2. TRUDNOŚCI KONCEPCJI MADDY. ZASADY METODOLOGICZNE UNIFIKUJ I MAKSYMALIZUJ. KRYTERIA TECHNICZNE

2.1. Maddy przy uzasadnianiu tezy naturalizmu, a także przy uzasadnianiu zasady MAKSYMALIZUJ *de facto* odwołuje się do roli matematyki w naukach przyrodniczych.

Maddy omawiając problem hipotetycznego naturalizmu astrologicznego wskazuje na fakt, że matematyka — w przeciwieństwie do astrologii — jest przydatna w naukach przyrodniczych. Aby uprawiać i rozumieć naukę, trzeba rozumieć matematykę. Dlatego warto badać matematykę, a nie warto badać astrologii. Jednak użyteczność nie ma wpływu — według Maddy — na sam rozwój matematyki i opis matematyki nie może się odwoływać do kategorii stosowalności matematyki. Maddy dostrzega więc związek między nauką a matematyką, ale twierdzi, że nie ma on znaczenia dla samego rozwoju matematyki. Prawa rozwoju matematyki mają bowiem charakter wewnętrzny, nie odwołują się do kategorii takich jak „stosowalność matematyki".

Podobnie, zasadę MAKSYMALIZUJ[16] Maddy uzasadnia powołując się na fakt, że matematyka dostarcza narzędzi dla nauk empirycznych, tym samym powinna mieć możliwie duży «zapas» takich narzędzi. Dlatego należy zadbać o to, aby tworzona przez nas teoria mnogości była możliwie bogata. Motywuje więc tę zasadę poprzez odwołanie się do roli matematyki w naukach przyrodniczych. Jest to niekonsekwentne wobec deklaracji Maddy, iż wprowadzanie standardów z nauk przyrodniczych byłoby obcym „wtrętem" w naturalistycznej metodologii. Tymczasem nie bardzo widać, w jaki sposób można byłoby wyróżnić matematykę jako dyscyplinę zasługującą na analizy metodologiczne (i odróżnić ją od astrologii, ogólnej teorii hodowli smoków, psychologii krasnoludków, *etc.*) bez odwoływania się do faktu, iż matematyka (w przeciwieństwie do w/w wymienionych dyscyplin) znajduje zastosowanie w nauce. Maddy zatem faktycznie dopuszcza argumentację, od której się odżegnuje, i to zarówno na metapoziomie (jest sens badać matematykę a nie astrologię), jak i przy formułowaniu poszczególnych zasad metodologicznych (należy maksymalizować bogactwo matematyki, bo w fizyce potrzeba dużo różnorodnych narzędzi).

---

[16] Por. [Wójtowicz 2001a, 37—38], gdzie opisana jest ta zasada.

Tu pojawia się kolejny problem: jeśli pewne fragmenty matematyki nie znajdują zastosowań, to nie ma mocy argument Maddy, że warto się nimi zajmować ze względu na to, że matematyka jest przydatna w nauce. Z punktu widzenia tego argumentu, niestosowane fragmenty matematyki mają status astrologii. Tymczasem Maddy chce badać całą matematykę. Konsekwentnie więc, jej argument musiałby zostać przeformułowany w następujący sposób: wprawdzie pewna część matematyki jest odległa od zastosowań, ale pewna część niewątpliwie jest przydatna w naukach przyrodniczych. Matematyka jednak rozwija się jako pewna całość i tak też należy ją badać. Taka argumentacja miałaby więc następującą strukturę:

(1) matematyka stosuje się w nauce;

(2) matematyka czysta dopełnia stosowaną;

(3) a zatem warto badać całą matematyką.

Jest to jednak po prostu powielenie argumentu Quine'a, od którego Maddy się odżegnuje. Stanowi to wyraźną niekonsekwencję.

2.2. Jaki poziom unifikacji jest niezbędny z punktu widzenia praktyki matematycznej?

Unifikująca rola teorii mnogości w matematyce opiera się na dwóch zasadniczych faktach:

Po pierwsze, wszelkie pojęcia i problemy matematyczne można sformułować w języku teorii mnogości.

Po drugie, aksjomaty teorii mnogości ZFC są na tyle silne, że umożliwiają udowodnienie ogromnej klasy twierdzeń matematycznych — w szczególności udowodnienie w zasadzie wszystkich zdań pojawiających się w «zwykłej matematyce».

Czy — z punktu widzenia praktyki matematycznej (tj. z punktu widzenia analityka, różniczkowca, topologa, *etc.*, a nie z punktu widzenia teoriomnogościowca) — zachodzi potrzeba, aby pojawiające się zdania niezależne były wszystkie rozstrzygnięte w ramach jednej teorii mnogości? Czy w matematyce nie wystarczy ten poziom unifikacji, jaki zagwarantowany jest dzięki rekonstrukcji matematyki w ZFC, i konieczne jest poszukiwanie teorii silniejszej?[17]

---

[17] Tu należy zauważyć, iż argument, że ZFC wiele pytań zostawia otwartych, a my chcemy mieć teorię rozstrzygającą wszystkie pytania jest nie do końca poprawny. Żadne skończone rozszerzenie ZFC (a stosowanie kryteriów Maddy może nam dać tylko takie skończone rozszerzenia) oczywiście nie rozstrzyga wszystkich zdań niezależnych. Nie jest więc możliwe podanie zupełnej — rozstrzygającej wszystkie kwestie — teorii mnogości. (Przyjmuję tutaj dość naturalne założenie, że teoria, która ma być podstawą dla matematyki powinna być efektywnym rozszerzeniem ZFC. Do takich teorii stosuje się I twierdzenie Gödla o niezupełności.) Pojawia się więc problem, jaki poziom precyzji opisu uniwersum mnogościowego chcemy osiągnąć. Aby analizy Maddy miały sens, konieczne jest oczywiście uznanie, że poziom precyzji oferowany przez ZFC nie jest wystarczający. Należy jednak też określić, czego oczekujemy, tzn. jakiego typu zdania chcielibyśmy móc rozstrzygnąć, i gdzie należy postawić granicę. Maddy nie podejmuje tego istotnego problemu.

Zasadne jest postawienie następujących pytań:

Czy można wskazać matematyczne powody, dla których np. specjalista od równań różniczkowych cząstkowych czy analizy zespolonej żądałby podania rozwiązań wszystkich problemów matematycznych w ramach jednej teorii unifikującej?[18]

Jakie powinny być kryteria wyboru między teoriami (czyli rozstrzygania zdań niezależnych)? Czy są to te kryteria, które podaje Maddy?

Sądzę, że odpowiedź na oba pytania jest negatywna.

Rozważmy przykład liczb rzeczywistych. Liczby rzeczywiste i związane z nimi konstrukcje (funkcje rzeczywiste, przestrzenie funkcyjne związane z $\mathbb{R}$, rzeczywiste przestrzenie Hilberta, *etc.*) stanowią jeden z podstawowych obiektów badań matematyki. Tym samym ważny jest ich możliwie dokładny opis. W szczególności zasadna wydaje się być teza, że zdania niezależne od ZFC, dotyczące (bezpośrednio lub pośrednio) $\mathbb{R}$, powinny być rozstrzygnięte poprzez poszukiwanie odpowiednich wzmocnień ZFC.

Liczby rzeczywiste można zrekonstruować w ZFC. Można je jednak reprezentować także w słabszych teoriach, np. w arytmetyce drugiego rzędu Z_2. Z_2 jest teorią, w ramach której można odtworzyć znaczące fragmenty klasycznej matematyki, reprezentować wiele pojęć klasycznej matematyki i udowodnić szereg klasycznych twierdzeń, takich jak np. twierdzenie Arzeli—Ascoliego, Bolzano—Weierstrassa, Cauchy'ego—Peano, Hahna—Banacha i wiele innych (por. np. [Simpson 1999]). Można teraz postawić pytanie: które liczby rzeczywiste są tymi «prawdziwymi» liczbami rzeczywistymi? Jakie jest kryterium wyboru teorii T, w ramach której przeprowadzimy formalną rekonstrukcję naszej (historycznie ukształtowanej i częściowo nieformalnej) teorii liczb rzeczywistych? W ramach Z_2 nie da się sformułować tylu zdań (i pytań) dotyczących $\mathbb{R}$, ile w ZFC — bo w Z_2 nie ma tak silnych środków definiowania obiektów. Jest to teoria słabsza. Czy jednak należy w związku z tym twierdzić, że prawdziwe liczby rzeczywiste to liczby rzeczywiste opisywane w ZFC, a te opisywane w Z_2 nie są prawdziwe, czy też już liczby rzeczywiste zrekonstruowane w Z_2 można uznać za prawdziwe? Argumentem na rzecz drugiej interpretacji byłby fakt, że liczby rzeczywiste w sensie Z_2 są wystarczające z punktu widzenia «matematyka z ulicy», zaś «teoriomnogościowe $\mathbb{R}$» wykracza poza «codzienną» praktykę matematyczną. Może jednak należy stwierdzić, że dla opisu obiektu matematycznego takiego jak $\mathbb{R}$ należy sięgać po możliwie najsilniejsze środki? Może «prawdziwe» liczby rzeczywiste są opisywane dopiero w ZFC, albo wręcz dopiero w jakimś wzmocnieniu ZFC?

Teoria mnogości jest tak mocna, że pojawiają się w niej nowe pojęcia i nowe pytania dotyczące podzbiorów $\mathbb{R}$, zdecydowanie wykraczające poza to, co się pojawia w «zwykłej» matematyce. Stosowanie teorii mnogości ZFC do rekonstrukcji matematyki powoduje pojawienie się NOWYCH pojęć (które nie są naturalne z punktu wi-

[18] Oczywiście nie jest tu dopuszczalny argument postaci: ponieważ liczby rzeczywiste istnieją, więc należy je opisać jednoznacznie, w jednej teorii. Taki argument miałby charakter filozoficzny, byłby więc — z punktu widzenia Maddy — niedopuszczalny.

dzenia praktyki analizy funkcjonalnej, analizy zespolonej, topologii algebraicznej czy geometrii różniczkowej). W związku z pojawieniem się tych nowych pojęć, pojawiają się oczywiście także nowe problemy, mające charakter teoriomnogościowy, w szczególności nowe zdania niezależne.[19]

Problem «naturalności» pytań matematycznych jest trudny do precyzyjnego opisania. Zgódźmy się (tymczasem), że można wyróżnić taką klasę naturalnych, przedteoriomnogościowych pytań matematycznych P_M.[20] Wprowadzenie pojęć teoriomnogościowych (tzn. rekonstrukcja pojęć matematycznych w tak silnej teorii, jaką jest teoria mnogości) powoduje poszerzenie klasy zadawanych pytań do klasy T_M ($P_M \subseteq T_M$). Wśród zdań klasy T_M będą np. zdania dotyczące kombinatoryki nieskończonej, relatywnej niesprzeczności, pytania dotyczące struktury modeli dla teorii mnogości, dowodów niezależności, *etc.* Takich pytań nie będzie w klasie P_M. «Konkretnego» matematyka interesuje głównie P_M, teoriomnogościowca T_M.

Rozważmy zatem zdanie $\varphi \in P_M$ niezależne od ZFC i dwie sytuacje:

(1) Przypuśćmy, że nasze matematyczne intuicje, związane z uprawianiem danej dyscypliny matematycznej (np. analizy funkcjonalnej) podpowiadają nam, że bardziej naturalne, bardziej wiarygodne jest φ. Przypuśćmy jednak, że kryterium Maddy klasyfikuje teorię ZFC+φ jako restryktywną, natomiast ZFC+$\neg\varphi$ jako tę właściwą. Co w tej sytuacji powinien zrobić matematyk? Grozi mu swoiste rozdwojenie jaźni: jako matematyk (np. analityk funkcjonalny) «czuje», że to właśnie zdanie φ jest bardziej wiarygodne z punktu widzenia jego dyscypliny. Z drugiej jednak strony, metodolog ustanawia kryteria, w myśl których ZFC+φ jest teorią restryktywną, więc należy odrzucić φ.

W tym momencie pojawia się rozbieżność pomiędzy praktyką danej dyscypliny, a teoriomnogościowymi kryteriami sformułowanymi przez Maddy.[21] Jest to z pewno-

---

[19] Oczywiście, każda dostatecznie bogata teoria (spełniająca dodatkowe założenia) jest niezupełna. W szczególności tak jest z teorią liczb rzeczywistych. Niezależność pojawia się więc jeszcze przed wprowadzeniem pojęć teoriomnogościowych. Chodzi jednak o to, że zdania niezależne pojawiające się po wprowadzeniu technik teoriomnogościowych mogą nie być naturalne.

[20] Pojawia się pytanie, co to znaczy „zwykła matematyka". Simpson, jeden ze współtwórców programu matematyki odwrotnej, odpowiada na to pytanie w sposób następujący:

„Mówiąc ogólnie, przez zwykłą matematykę rozumiemy będącą w głównym nurcie badań matematycznych matematykę nie-teoriomnogościową, tj. matematykę, z jaką mieliśmy do czynienia, zanim zabrali się za nią specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości. (Lub raczej: matematykę taką, jaką byłaby, gdyby nie zabrali się do niej specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości.) Zwykła matematyka obejmuje zatem geometrię, teorię liczb, rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, analizę rzeczywistą i zespoloną, przeliczalną algebrę, topologię zupełnych ośrodkowych przestrzeni metrycznych, logikę matematyczną i teorię obliczeń. Nie obejmuje ona abstrakcyjnej teorii mnogości, abstrakcyjnej analizy funkcjonalnej, topologii ogólnej i algebry nieprzeliczalnej" [Simpson 1984, 783].

[21] Te rozważania stosują się nie tylko do podanego przez Maddy technicznego kryterium restryktywności. Mają charakter ogólny — niezależnie od tego, jaką konkretną postać przyjmuje techniczne kryterium Maddy, powstają wątpliwości tego typu.

ścią sprzeczne z deklaracjami Maddy, że punktem wyjścia winna być praktyka matematyczna.

(2) Rozważmy drugą sytuację, w której intuicje matematyków «milczą» na temat konkretnego zdania niezależnego $\varphi \in P_M$. Pojawiają się dwa pytania:

Czy w ogóle konieczne jest dokonywanie wyboru między φ i jego negacją?

W oparciu o jakie kryteria należy dokonać tego wyboru?

Brak jest — jak założyliśmy — kryterium matematycznego, wywodzącego się bezpośrednio od naszych intuicji, pochodnych w stosunku do praktyki badawczej naszej dziedziny. Maddy proponuje kryterium, które ma charakter metateoretyczny: z teorii ZFC+φ, ZFC+$\neg\varphi$ lepiej wybrać tę, w której druga daje się rzetelnie interpretować.

Jednak to kryterium nie jest naturalne z punktu widzenia praktyki matematycznej. Matematyk chce wiedzieć, JAKIE TAK NAPRAWDĘ SĄ LICZBY RZECZYWISTE. Sądzę, że ewentualne uznanie, iż liczby rzeczywiste mają własność φ, ponieważ teoria ZFC+φ ma lepsze własności metodologiczne niż ZFC+$\neg\varphi$, nie ma nic wspólnego z praktyką matematyczną. Matematyk, zastanawiając się np. nad tym, czy istnieje zbiór typu ψ, nie odwołałby się do argumentu: „tak, uważam że taki zbiór istnieje, ponieważ gdybyśmy interesowali się teorią, w myśl której taki zbiór nie istnieje (czyli teorią ZFC+$\neg\varphi$, gdzie $\varphi = \exists x \psi(x)$), to można byłoby ją rzetelnie interpretować w teorii ZFC+φ (tzn: zbiór typu ψ istnieje), ale nie na odwrót". Matematyk stwierdziłby raczej, że mało go interesuje metodologiczne, metateoretyczne kryterium teoriomnogościowca (tym bardziej, że ów teoriomnogościowiec sam go zbyt dobrze nie sprecyzował!). Pytanie o metateoretyczne zależności między teorią ZFC+φ oraz ZFC+$\neg\varphi$ byłoby mu — jako pytanie *stricte* teoriomnogościowe — całkiem obce. Pojęcie „intepretowania jednej teorii w drugiej" nie jest bowiem pojęciem związanym ze sposobem widzenia liczb rzeczywistych przez «konkretnego matematyka». Nie ma związku z jego intuicjami wykształconymi przy prowadzeniu badań w swojej dziedzinie. Wydaje mi się mało prawdopodobne, aby matematycy, badający np. równania różniczkowe w ogóle brali pod uwagę pojęcia „modelu wewnętrznego" czy „rzetelnej interpretacji".[22] Gdyby pojawiło się jakieś zdanie niezależne, dotyczące równań różniczkowych, to sięgnięcie po kryterium Maddy byłoby OSTATNIĄ rzeczą, jaką zrobiłby specjalista od równań różniczkowych.

Analizy prowadzone w tym paragrafie kończę ogólną uwagą. W [Wójtowicz 200?], w kontekście dyskusji nad argumentem przeciwko CH (wychodzącym od pewnej probabilistycznej intuicji), stawiam tezę, że różne gałęzie matematyki mają swoje własne systemy pojęć i że ich mieszanie nie jest zasadne.[23] ZFC umożliwia unifikację matematyki i co do tego nikt nie ma wątpliwości. Jednak specyficzne intuicje

[22] Nie chodzi mi tutaj o socjologiczny fakt, że zapewne większość specjalistów od równań różniczkowych nie zna pojęcia „modelu wewnętrznego". To samo w sobie nie stanowi jeszcze rozstrzygającego argumentu. Chodzi mi o to, że nie zaakceptowaliby oni tego sposobu argumentacji.

[23] Oczywiście pojawia się tu problem, czy można dobrze scharakteryzować znaczenie terminu „gałąź matematyki", czy „system pojęć". Każda próba definicji byłaby obarczona słabościami. Posługuje się więc tym terminem w potocznym sensie (potocznym w społeczności matematyków).

pojawiające się w poszczególnych działach matematyki mogą być zawodne, jeśli chcielibyśmy za ich pomocą uzasadniać zdania z innych gałęzi matematyki.[24] Sądzę, że właśnie taka sytuacja ma miejsce w wypadku argumentacji Maddy. Kryteria relatywnej interpretowalności, oparte na pojęciu „modelu wewnętrznego" i „rzetelnej interpretacji" mogą mieć zastosowanie do rozstrzygania pytań *stricte* teoriomnogościowych, gdzie takie pojęcia są naturalne. Natomiast rozstrzyganie pytań dotyczących «konkretnych» obiektów matematycznych w oparciu o wyrafinowane pojęcia teoriomodelowe nie musi być więc wcale zasadne. Pytanie o to np., czy istnieje nietrywialne elementarne włożenie V w V,[25] jest pytaniem bardzo odległym od codziennej praktyki matematycznej. Jeśli okaże się, że rozwiązanie jakiegoś zagadnienia «zwykłej» matematyki $\varphi \in P_M$ zależne jest od założeń natury *stricte* teoriomnogościowych, to wtedy OSTATNIĄ rzeczą, którą zrobi matematyk, to jest skorzystanie z technicznego kryterium Maddy. Bardziej prawdopodobne jest, że postawi sobie następujące pytania:

Czy zdania φ, $\neg\varphi$ są naturalne z punktu widzenia praktyki?

Jakie znaczenie dla całej teorii ma decyzja? Czy wybór wniesie coś istotnego dla mojej dyscypliny?

Jeśli badane pytania są ciekawe i naturalne, to raczej intuicje, poczucie «naturalności» będą stanowić kryterium. Jest mała szansa, że specjalista od analizy matematycznej będzie się zastanawiał nad problemem interpretacji teorii i modeli wewnętrznych.

Kryterium Maddy jest więc nienaturalne z punktu widzenia praktyki matematycznej. Tym samym program Maddy staje się *de facto* programem wykraczającym poza praktykę matematyczną (co oczywiście nie znaczy, że nie jest to interesujący problem z punktu widzenia samej teorii mnogości).[26] Koncepcja Maddy może mieć więc zastosowanie CO NAJWYŻEJ do rozstrzygania problemów teoriomnogościowych, gdzie kwestie istnienia modeli czy wzajemnej interpretowalności teorii są na porządku dziennym. Pojęcia, na jakich Maddy opiera swoje kryteria są nienaturalne z punktu widzenia «codziennej», nie-teoriomnogościowej praktyki matematycznej.

---

[24] Mówię nie o stosowaniu wyników technicznych z innych działów matematyki w dowodach, ale o uzasadnianiu niezależnych zdań w oparciu o pewne intuicje, czy — mówiąc swobodnie — o «transferze intuicji». W dowodach, techniki z innych działów matematyki są z powodzeniem stosowane.

[25] Jest to pytanie równoważne pytaniu o istnienie liczby mierzalnej.

[26] To sformułowanie jest oczywiście nieprecyzyjne — bowiem pojęcie „zwykłej praktyki matematycznej" jest pojęciem bardzo nieostrym. Można jednak próbować wskazać pewną «hierarchię zwykłości» konstrukcji matematycznych — i w tej hierarchii np. klasyczne problemy teorii funkcji rzeczywistych będą bardziej «zwykłe» niż problemy deskryptywnej teorii mnogości.

2.3. Niezależność a sens fizyczny i kwestia zastosowań.

Newton Da Costa i Francisco Doria podali przykłady zdań niezależnych od ZFC, którym można przypisać pewien sens fizyczny (w zmatematyzowanej teorii fizycznej T^F, opierającej się na ZFC mogą występować zdania niezależne $\varphi \in \Phi$, mające sens fizyczny).[27] Pojawia się pytanie: czy zasadność przyjęcia takich zdań należy rozstrzygać odwołując się do czysto matematycznej metodologii? Przypuśćmy, że uda się ustalić, zgodnie z pewnymi wewnątrzmatematycznymi kryteriami metodologicznymi $\underline{M}$, że dla danego zdania niezależnego φ (mającego pewien sens fizyczny), należy przyjąć dodatkowe teoriomnogościowe aksjomaty Γ, które rozstrzygną (np. potwierdzą) to zdanie niezależne. Jaki stąd płynie wniosek? Czy wynika stąd, że świat powinien być opisywany za pomocą teorii ZFC+φ?[28] Wniosek taki jest nienaturalny i nieuzasadniony. Jeśli bowiem zdanie φ ma sens fizyczny, to wtedy rozstrzyganie go na mocy metodologii czysto matematycznej jest pozbawione sensu. Jeśli bardziej adekwatna empirycznie, lepsza z punktu widzenia potrzeb nauki jest teoria ZFC+$\neg\varphi$, to jakie znaczenie dla naukowca ma fakt, że to właśnie ZFC+φ spełnia naturalistyczne standardy metodologiczne $\underline{M}$? Twierdzę, że nie ma on dla naukowca żadnego znaczenia, i że będzie się on po prostu posługiwał teorią ZFC+$\neg\varphi$.

Maddy popada w swoiste rozdwojenie jaźni: z jednej strony odrzuca stosowanie standardów nauk przyrodniczych w matematyce (są one obce praktyce matematycznej), ale z drugiej przyznaje, że warto zajmować się matematyką (a nie np. astrologią) właśnie dlatego, że pozwala ona na uprawianie i rozumienie nauki. Czy zatem matematyk powinien rozwijać potrzebną fizykowi, ale nie spełniającą kryteriów Maddy teorię ZFC+$\neg\varphi$, czy raczej niepotrzebną fizykowi, ale spełniającą kryteria Maddy teorię ZFC+φ?

Maddy konsekwentnie musiałaby zająć następujące stanowisko:

1. Teoria ZFC+φ wprawdzie się nie stosuje w fizyce, ale może znaleźć zastosowanie kiedyś w przyszłości.

2. Dobrze mieć tak bogatą teorię, żeby w razie potrzeby «odzyskać» z niej zarówno teorię ZFC+$\neg\varphi$ — która jest teraz potrzebna — jak i teorię ZFC+φ, która może być potrzebna w przyszłości.

---

[27] Da Costa i Doria podają następujące przykłady:

(1) Istnieje wyrażenie opisujące ruch *m(t)* na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, takie że zdanie „*m(t)* jest ruchem ergodycznym na $\mathbb{R}^2$" jest niezależne od ZFC .

Istnieje wyrażenie opisujące gładki układ dynamiczny *v*, takie że zdanie „nie istnieje podkowa Smale'a dla *v*" jest niezależne od ZFC.

Jeśli φ jest formułą, która charakteryzuje w nietrywialny sposób chaos w układzie dynamicznym, to istnieje układ dynamiczny *D*, taki że ani $\varphi(D)$, ani $\neg\varphi(D)$ nie są dowodliwe w ZFC (por. [Da Costa, Doria 1996])

[28] Mówiąc o tym, że świat ma być opisywany za pomocą ZFC+φ, mam na myśli fakt, że jako matematyczna podstawa teorii fizycznej ma być stosowana teoria ZFC+φ.

3. Dostęp fizyka do teorii ZFC+¬φ ma się więc odbywać *via* teorię ZFC+φ. Ma on bowiem do dyspozycji rzetelną interpretację (oznaczmy ją przez ψ), więc teorię ZFC+¬φ «odzyskiwać» będzie z ZFC+φ poprzez relatywizację kwantyfikatorów do warunku ψ.

Sądzę jednak, że fizyk w takiej sytuacji stwierdzi, iż stosowanym przez niego narzędziem pracy jest ZFC+¬φ. W tej teorii można dobrze reprezentować zjawiska. Natomiast teoria ZFC+φ jest bezużyteczna z punktu widzenia interpretacji zjawisk. Pojęcie „rzetelnej interpretacji teorii" nie ma żadnego sensu fizycznego, jest — z punktu widzenia praktyki — sztucznym pojęciem. Dlatego fizyk prosi matematyka o bezpośrednie «dostarczenie» teorii ZFC+¬φ, a nie ZFC+φ wraz z relatywizacją ψ. To byłoby bowiem (a) niewygodne, (b) nieuzasadnione — pojęcia teoriomnogościowe nie mają nic wspólnego z praktyką badawczą i stanowiłyby jedynie sztuczny wtręt. Z punktu widzenia fizyka, jedynym istotnym kryterium oceny teorii jest adekwatność do opisu danej grupy zjawisk.[29]

Rozważmy pewną trudność, mogącą stanowić potencjalny argument na rzecz zasadności ujęcia Maddy. W różnych teoriach fizycznych wykorzystywane bywają rożne teorie matematyczne $\{T_i: i \in I\}$, gdzie T_i są rozszerzeniami teorii mnogości (tzn. T_i = ZFC+Φ_i, $i \in I$). Teorie T_i mogą przy tym być wzajemnie sprzeczne. Jednak matematyk dąży do tego, aby badać jedną matematykę, a nie szereg wzajemnie sprzecznych teorii. Naturalne jest też dążenie, aby różne gałęzie fizyki oparte były na jednolitym matematycznym schemacie pojęciowym. Dlatego ważne jest poszukiwanie takiej jednej teorii T, w której dałyby się interpretować (poprzez odpowiednie rzetelne interpretacje φ_i) wszystkie teorie T_i (wtedy spełniona byłaby zasada UNIFIKUJ[30]). Taką teorię T można byłoby traktować jako podstawę dla matematyki. Byłaby ona (dzięki istnieniu interpretacji φ_i) teorią mogącą dostarczać narzędzi dla różnych nauk empirycznych.

Czy nie znaczy to więc, że faktycznie konieczna jest unifikacja poprzez znalezienie teorii T, w której dają się wspólnie interpretować poszczególne teorie T_i? Tak według mnie nie jest. W sytuacji, w której mamy do czynienia z różnymi teoriami T_i, możliwe jest przyjęcie dwóch wyjaśnień:

---

[29] Rozważmy tu prosty przykład: przypuśćmy, że do opisu pewnych zjawisk potrzebna jest teoria liniowego, dyskretnego porządku. Można taką teorię stosować bezpośrednio, można jednak także posługiwać się teorią gęstego porządku z dodatkową funkcją S, definiującą w tym gęstym porządku «następnik». Zbiór wartości funkcji S ma strukturę dyskretnego porządku, więc teoria gęstego liniowego porządku z kwantyfikatorami zrelatywizowanymi do warunku $\varphi(x) \Leftrightarrow \exists y(x=S(y))$ (i dodatkowymi aksjomatami gwarantującymi odpowiednie własności funkcji S) opisuje porządek dyskretny. Jednak bardziej naturalne jest posługiwanie się po prostu teorią porządku dyskretnego, nawet jeśli z punktu widzenia pewnych metodologicznych kryteriów to teoria gęstego porządku jest lepsza.

[30] Por. [Wójtowicz 2001a, 37—38], gdzie opisana jest ta zasada.

(i) Należy poszukiwać jednej teorii T i rodziny interpretacji φ_i (gdzie T_i będzie interpretowane w T poprzez φ_i).

(ii) Teorie T_i należy traktować jako wyspecjalizowane narzędzia, dla których wspólną bazą jest ZFC. Teorie te opisują po prostu pewne fragmenty świata matematycznego.

Sądzę, że naukowiec, posługujący się matematyką jako narzędziem za bardziej naturalną uzna interpretację (ii) — nie wprowadza ona bowiem żadnych zewnętrznych (z punktu widzenia jego dyscypliny) pojęć, takich jak „rzetelna interpretacja" czy „model wewnętrzny". Fakt, czy klasę teorii $\{T_i: i \in I\}$ daje się wspólnie interpretować w jednej teorii T, nie ma znaczenia z punktu widzenia stosowania matematyki w naukach przyrodniczych. Gdyby nie było takich wspólnych interpretacji, to fizycy i tak posługiwaliby się takimi, a nie innymi narzędziami.

Co więcej, nie ma gwaracji, że znaleziona teoria T byłaby teorią naturalną. Czy w sytuacji, gdyby istniały tylko dziwaczne teorie T, pozwalające na wspólne zinterpretowanie w nich teorii T_i (jak np. ZFC+¬Con(ZFC)), to czy nadal prawdą jest, iż należy realizować maksymę UNIFIKUJ poprzez uznanie takiej teorii jako podstawowej? Byłby to punkt widzenia niezgodny z deklaracjami Maddy, iż należy dbać o naturalność teorii stanowiącej podstawę dla matematyki. Rygorystyczne zastosowanie zasady UNIFIKUJ mogłoby prowadzić do uznania nienaturalnej teorii T za podstawę dla matematyki.

2.4. Kryteria Maddy — opis czy norma?

Maddy twierdzi, że nie można w matematyce stosować standardów zewnętrznych. Pojawia się więc pytanie, na ile jej zasady są czymś wewnętrznym dla praktyki matematycznej? Czy zasady UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ mają pełnić rolę regulatywną — w tym sensie, że matematycy, próbujący rozstrzygnąć pewien problem winni posłużyć się kryterium Maddy i na jego podstawie wybrać tę a nie inną teorię? Sądzę że — w świetle przeprowadzonych wyżej analiz — jest to mało prawdopodobne. Ewentualna zgoda w społeczności matematyków w tego typu kwestiach opierać się będzie na innych kryteriach, niezależnych od propozycji Maddy. Opis podany przez Maddy może być tak naprawdę CO NAJWYŻEJ opisem socjologicznym (historycznym), którego celem jest ukazanie mechanizmów obecnych w rozwoju matematyki. Być może więc analizy Maddy pozwalają zidentyfikować nieuświadomione kryteria, które faktycznie leżą u podłoża decyzji matematyków. Teoria Maddy — i sformułowane przez nią zasady metodologiczne — mogłaby być w takim ujęciu pewną «historiozofią matematyki». Jednak nawet to jest wątpliwe — nie sądzę, że podane przez nią zasady i kryteria faktycznie opisują mechanizmy rozwoju matematyki. Czy V=L jest odrzucane przez matematyków WŁAŚNIE DLATEGO, że nie spełnia kryteriów, których jawną formalizację podaje Maddy, czy też raczej jest odrzucane z innych powodów? Sądzę, że zachodzi druga ewentualność. Powody, dla których odrzucany jest aksjomat konstruowalności, nie zostały wprawdzie zidentyfikowane dokładnie, ale myślenie o zagadnieniu V=L w kategoriach kryterium Maddy jest błędne. Kryterium Maddy nie pozwala bowiem na identyfikację racji, dla których matematycy odrzucają V=L, nie «chwyta» intuicyjnych motwów wyboru takiej czy innej teorii, nie może zatem stanowić narzędzia opisu ewolucji pojęć matematycznych.

2.5. Pewne kwestie techniczne związane z kryterium Maddy.

Zasadniczą rolę w koncepcji Maddy odgrywa pojęcie „modelu wewnętrznego". Pojęcie „rzetelnej intepretacji", kluczowe dla sformułowania kryterium Maddy definiowane jest bowiem z użyciem pojęcia „modelu wewnętrznego". W definicji modelu wewnętrznego zasadnicze znaczenie ma fakt, że T dowodzi $\forall\alpha\varphi(\alpha)$ (tzn. model wewnętrzny musi zawierać wszystkie liczby porządkowe). Oczywiście, fakt, że teoria T dowodzi $\forall\alpha\varphi(\alpha)$ jest (na mocy twierdzenia o pełności) równoważny stwierdzeniu, że w każdym modelu M dla T, zachodzi $\forall\alpha\varphi(\alpha)$. Również fakt, że T dowodzi σ^φ dla $\sigma\in$ ZFC, oznacza po prostu, że tak jest w każdym modelu dla T (tzn. każdy model M dla T spełnia σ^φ).

Jednak modele dla T mogą być nienaturalne, «dziwaczne». Czy jest istotne, co się dzieje w tych modelach? Czy ma znaczenie fakt, że w tych właśnie modelach spełnione jest zdanie $\forall\alpha\varphi(\alpha)$? Czy raczej nie należałoby się ograniczyć do pewnej klasy modeli zamierzonych ZAM(T)$\subseteq$Mod(T) i żądać jedynie, aby każdy model zamierzony spełniał $\forall\alpha\varphi(\alpha)$? Wtedy zamiast o formule φ, o której można udowodnić w T, że w każdym modelu wyznacza pewien model wewnętrzny, mówilibyśmy o formule φ, która w ZAMIERZONYCH modelach dla T wyznacza modele wewnętrzne.[31]

W takich rozważaniach przechodzimy na poziom modeli, a kryterium restryktywności miało odnosić się do teorii. Maddy podnosi ten problem, twierdząc, że analizy powinny odnosić się jedynie do teorii, a nie do modeli. Moim zdaniem, takie postawienie sprawy nie jest właściwe. Konieczne jest uwzględnienie faktów dotyczących modeli. Samo kryterium techniczne Maddy odwołuje się przecież do pojęcia „modelu wewnętrznego", a zatem Maddy uwzględnia pojęcia teoriomodelowe w swoich analizach.[32] Sądzę więc, że teza, iż należy w analizach posługiwać się pojęciami „naturalności teorii" czy „naturalności interpretacji", ale odrzucić pojęcie „naturalności modeli", jest nieuzasadniona.

---

[31] Zatem zamiast warunku: T dowodzi odpowiednich twierdzeń (relatywizacji zdań teorii mnogości do warunku φ, zdania $\forall\alpha\varphi(\alpha)$, *etc.*), żądalibyśmy, aby odpowiednie zdania były spełnione w klasie modeli zamierzonych ZAM(T).

[32] Można także posłużyć się argumentem, że wszystkie definicje Maddy (na mocy twierdzenia o pełności) można od razu wysłowić w języku modeli. Definicje Maddy nie dotyczą bowiem żadnych pojęć *stricte* teoriodowodowych, które nie mają swoich odpowiedników w języku modeli.

Posługując się pojęciem „modelu zamierzonego", można przeformułować kryterium Maddy, zachowując zasadę, że z dwóch teorii T_1, T_2 wybrać należy taką, która daje lepsze możliwości interpretowania w niej tej drugiej. Oto robocza propozycja:

Niech $ZAM(T_i)$ oznacza klasę modeli zamierzonych dla teorii T_i ($ZAM(T_i) \subseteq Mod(T_i)$).

DEF 1. φ stanowi model wewnętrzny dla teorii T, wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) dla dowolnego $\sigma \in ZFC$ i $M \in ZAM(T)$, M spełnia σ^{φ};

(ii) dla dowolnego $M \in ZAM(T)$, M spełnia $\forall\alpha\varphi(\alpha)$ lub dla dowolnego $M \in ZAM(T)$, M spełnia $\exists\kappa(Inacc(\kappa) \wedge \forall\alpha(\alpha<\kappa \Rightarrow \varphi(\alpha))$;[33]

(iii) dla dowolnego $M \in ZAM(T)$, M spełnia $\forall x \forall y(x \in y \wedge \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x))$.[34]

DEF 2. φ jest rzetelną interpetacją T_1 w T_2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) φ stanowi model wewnętrzny dla T_2;

(ii) dla dowolnego P, $M \in ZAM(T_2)$ PM spełnia σ^{φ} dla $\sigma \in T_1$.[35]

DEF 3: T_2 jest maksymalizacją T_1 wtedy i tylko wtedy, gdy:

(i) istnieje φ taka, że jest rzetelną interpretacją T_1 w T_2;

(ii) dla dowolnego P, $M \in ZAM(T_2)$ PM spełnia $\exists x \neg\varphi(x)$.

Dalsze uogólnienia są również naturalne.

DEF 4. T_2 jest właściwą maksymalizacją teorii T_1, wtedy, i tylko wtedy, gdy T_2 jest maksymalizacją T_1, ale T_1 nie jest maksymalizacją T_2.

DEF 5: T_2 jest sprzeczną maksymalizacją T_1, gdy T_2 jest właściwą maksymalizacją T_1 i $ZAM(T_1) \cap ZAM(T_2) = \varnothing$.[36]

DEF 6. T_2 jest silną maksymalizacją T_1 wtedy, i tylko wtedy, gdy

(i) T_2 jest sprzeczną maksymalizacją T_1;

---

[33] Inacc(x) znaczy „x jest liczbą nieosiągalną".

[34] Intuicyjnie: φ jest formułą, która w zamierzonych modelach M dla teorii T wyznacza klasę zbiorów M^{φ}, taką że:

(i) $\langle M^{\varphi}, \in \rangle$ jest modelem dla ZFC;

(ii) M^{φ} zawiera wszystkie liczby porządkowe lub wszystkie liczby porządkowe poniżej pewnej liczby nieosiągalnej;

(iii) M^{φ} jest modelem przechodnim.

[35] Idea: w modelach zamierzonych dla T_2 są modele wewnętrzne dla T_1.

[36] Oryginalny warunek, mówiący, że teorie T_1 i T_2 są sprzeczne znaczy po prostu, iż $Mod(T_1) \cap Mod(T_2) = \varnothing$. Jego przeformułowaniem na wypadek, gdy rozważamy tylko modele zamierzone, jest po prostu warunek $ZAM(T_1) \cap ZAM(T_2) = \varnothing$.

(ii) nie ma niesprzecznej teorii T_3, takiej, że $ZAM(T_3) \subseteq ZAM(T_1)$, która jest właściwą maksymalizacją T_2.[37]

Powyższy ciąg definicji odwoływał się więc nie do bezpośredniej relacji między teoriami, ale do relacji między modelami zamierzonymi tych teorii. Zaletą tej definicji jest większa «elastyczność» — pozwala na porównywanie teorii z uwzględnieniem tego, co się dzieje w zamierzonych modelach dla tych teorii. Ta zaleta jest też wadą — kryterium to przestaje mieć czysto techniczny charakter, gdyż pojawia się w nim — nietechniczne i nieprecyzyjne — pojęcie „modelu zamierzonego". Aby definicje te mogły zostać zastosowane, konieczne jest uznanie, że pojęcie „modelu zamierzonego" może być w rozsądny sposób doprecyzowane. To może budzić pewne wątpliwości. Jednak sformułowanie tych definicji w podanej tu postaci zwraca uwagę na pewien ważny aspekt zagadnienia, pomijany przez Maddy.

2.6. Jakie problemy można faktycznie rozstrzygnąć posługując się kryterium Maddy?

Jednym z najważniejszych problemów otwartych w teorii mnogości jest hipoteza *continuum*. Określenie „problem otwarty" nie dotyczy oczywiście metamatematycznego statusu CH — ten znany jest od prac Gödla i Cohena (por. [Gödel 1940], [Cohen 1966]). Jednak problem, czy CH stanowi hipotezę wiarygodną, czy nie, zajmował wielu badaczy i znana jest bogata literatura na ten temat.[38] Naturalne jest oczekiwanie, że w tych analizach będzie można wykorzystać formułowane zasady metodologiczne. Jednak Maddy nie podejmuje problemu CH — co najwyżej w bardzo pośredni sposób, odrzucając V=L, który implikuje CH, ale przecież odrzucenie V=L nie pociąga za sobą odrzucenia CH! Maddy w swoich analizach nie podejmuje problemu, czy przyjęcie (bądź odrzucenie) CH prowadziłoby do teorii restryktywnej. Jest to — w świetle rangi problemu CH — rozczarowujące i stanowi kolejny argument na rzecz tezy, że tworzone przez Maddy narzędzia tak naprawdę stosować się mogą tylko do aksjomatu konstruowalności. Tym samym nie przysługuje im walor ogólności.

2.7. Maksymy UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ a kryteria techniczne.

Trudności związane z kryteriami Maddy są dwojakiej natury: (i) dotyczące uzasadnienia metodologicznych zasad UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ; (ii) dotyczące sformułowania konkretnych kryteriów technicznych w oparciu o te zasady. Problem (i) został już obszernie przedyskutowany wcześniej. Trudności związane z technicz-

[37] Warunek, iż T_3 jest rozszerzeniem T_1, oznacza po prostu, iż $Mod(T_3) \subseteq Mod(T_1)$. Przeformułowany w języku modeli zamierzonych oznacza po prostu $ZAM(T_3) \subseteq ZAM(T_1)$.

[38] Por. np.: [Feferman 1996], [Freiling 1986], [Simms 1991].

nymi aspektami kryterium Maddy pokazują, że nie jest wcale jasne, jaka jest konkretna «implementacja» zasad metodologicznych Maddy na poziomie ścisłych definicji. Zasady UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ są płynne, mogą być interpretowane na różne sposoby. Co więcej, nie jest nawet jasne, czy dla problemu wyboru między konkretnymi dwoma teoriami T_1 i T_2 zasady UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ «generują» jednoznaczne kryterium techniczne. Może się więc okazać, że kryteria techniczne Maddy nie tylko nie są uniwersalne (tzn. nie determinują wyboru między dowolnymi dwoma teoriami), ale nawet i w wypadku konkretnego problemu mogą być różnie interpretowane.[39]

3. PODSUMOWANIE

3.1.1. Teza Maddy, iż naukowcy dbają o «oszczędność ontologiczną» w wypadku obiektów teoretycznych, natomiast nie jest tak w wypadku obiektów matematycznych, jest tylko pozornie słuszna. Jest prawdą, że naukowcy posługują się najwygodniejszymi — z ich punktu widzenia — narzędziami matematycznymi. Jednak ustalenie faktycznych, minimalnych zobowiązań ontologicznych możliwe jest poprzez przeprowadzenie odpowiednich analiz metateoretycznych (dotyczących kwestii nietwórczości teorii). Nie ma to nic wspólnego z psychologicznymi efektami ubocznymi (np. takimi, że naukowiec ma poczucie, że może być «rozrzutny» w matematycznym fragmencie ontologii). To nie ma znaczenia dla ustalenia, jakie minimalne założenia są konieczne dla skonstruowania danej teorii. Obserwacja Maddy jest słuszna, ale oparty na niej argument obala jedynie bardzo naiwną formę argumentu z niezbędności.

3.1.2. Uzasadniając tezę, że kwestie istnienia obiektów są nieistotne dla matematyki, a istotne dla nauk przyrodniczych, Maddy dokonuje pomieszania zewnętrznego i wewnętrznego pojęcia istnienia.

3.1.3 Maddy posługuje się także argumentem, w myśl którego matematyka rozwija się niezależnie od wyników dyskusji filozoficznych. Stąd wyciąga wniosek, iż stanowisko realistyczne jest bezzasadne. Jednak tutaj Maddy miesza dwie grupy zagadnień: (a) pytanie o mechanizmy rozwoju matematyki; (b) pytanie o istnienie obiektów matematycznych. Tym samym jej argument nie ma wielkiej mocy.

3.1.4. Obserwacja Maddy, iż matematycy przy dowodzeniu twierdzeń w swojej praktyce badawczej nie posługują się argumentem z niezbędności, jest niewątpliwie słuszna. Nie dowodzi ona jednak tezy, iż w związku z tym argument z niezbędności

[39] Jeśli przez Σ oznaczymy zbiór możliwych kryteriów metodologicznych, służących do rozstrzygania pomiędzy dwoma teoriami T_1 i T_2, to tezę Maddy można sformułować jako:

$\exists!\sigma\in\Sigma\forall T_1, T_2$ (σ rozstrzyga między T_1 i T_2).

Nie jest to prawda, ale może prawdą jest przynajmniej:

$\forall T_1,T_2\ \exists!\sigma\in\Sigma$ (σ rozstrzyga między T_1 i T_2).

Jednak nawet to nie jest pewne.

nie może stanowić argumentu na rzecz istnienia obiektów matematycznych. Argument z niezbędności dotyczy innego typu problemów — argumentacja Maddy opiera się na pomieszaniu pojęć, o którym mowa w punkcie 1.2 i 3.1.2.

3.2.1. Maddy — wbrew swoim deklaracjom — przy uzasadnianiu swojego naturalistycznego stanowiska, a także przy uzasadnianiu zasad UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ, faktycznie powołuje się na zastosowania matematyki w naukach przyrodniczych.

3.2.2. Maddy przyjmuje jako oczywisty fakt, że «zwykli matematycy» odczuwają potrzebę unifikacji, i że gotowi są stosować tu kryteria metodologiczne opierające się na analizach i pojęciach teoriomnogościowych. Tymczasem zdecydowanie bardziej wiarygodna jest hipoteza, że: (*i*) niezależne problemy teoriomnogościowe $\varphi \in T_M$ będą przez matematyków uważane za nieistotne z punktu widzenia ich dziedziny, (ii) niezależne «konkretne» zdania $\varphi \in P_M$ będą — jeśli będzie to ważne z punktu widzenia danej dyscypliny — rozstrzygane przez odwołania do intuicji charakterystycznych dla danej dziedziny, a nie w oparciu o kryteria teoriomnogościowe.

3.2.3. Maddy nie podejmuje problemu niezależnych zdań, mających interpretację fizyczną. Tymczasem teza (którą Maddy konsekwentnie winna utrzymywać), że przyjęcie takich zdań winno być rozstrzygane przez odwołanie się do ustanowionych przez nią kryteriów metodologicznych, wydaje się być zdecydowanie sprzeczna z praktyką naukową.

3.2.4. Kryteria Maddy nie mogą mieć — w związku z ich licznymi wadami — charakteru normatywnego. Nie stanowią jednak też wiarygodnego opisu mechanizmów faktycznie rządzących rozwojem matematyki.

3.2.5. Kryteria Maddy można zmodyfikować, uwzględniając aspekty semantyczne. Maddy nie podejmuje tego zagadnienia.

3.2.6. Kryteria Maddy nie dają się zastosować do fundamentalnego problemu w teorii mnogości, jaką jest hipoteza *continuum*.

3.2.7. Zasady metodologiczne UNIFIKUJ i MAKSYMALIZUJ mogą być «implementowane» na najrozmaitsze sposoby. Brak jest jednoznacznego przełożenia tych zasad na konkretne kryteria techniczne.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

W artykule przedstawiłem argumenty na rzecz następujących tez:

(1) Argumentacja filozoficzna Maddy opiera się na uproszczeniach, jej analiza argumentu z niezbędności Quine'a jest niekonsekwentna.

(2) Maddy, uzasadniając swoje zasady metodologiczne, *de facto* odwołuje się do kategorii, które werbalnie odrzuca.

(3) Podane przez Maddy techniczne definicje nie stanowią faktycznie zadowalającego kryterium wyboru między teoriami. Maddy nie uwzględnia szeregu istotnych

pojęć i faktów. Tym samym nakład środków technicznych użytych przez Maddy pozostaje w rażącej dysproporcji do efektów.

Należy jednak przyznać, że Maddy porusza niezmiernie istotną problematykę. Zagadnienie uzasadniania aksjomatów, poszukiwania (czy też identyfikowania) nieformalnych, preteoretycznych argumentów na rzecz ich prawdziwości, jest — potencjalnie — bardzo owocnym przedmiotem analiz. To, iż koncepcja Maddy (zwłaszcza w sferze dyskusji filozoficznej) nie jest zadowalająca, nie znaczy, iż podjęta przez nią problematyka nie zasługuje na uwagę.

BIBLIOGRAFIA

Cohen, P. J.

[1966] *Set theory and the continuum hypothesis*, W. A. Benjamin, Inc., New York — Amsterdam.

Da Costa, N. C. A., Doria, F. A.

[1996] „Structures, Suppes Predicates, and Boolean-Valued Models in Physics", [w:] Bystrov, P. I., Sadovsky, V. N. (red.), *Philosophical Logic and Logical Philosophy*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, s. 91—118.

Feferman, S.

[1996] „Gödel's program for new axioms: Why, where, how and what?", [w:] Hajek, P. (red.), *Gödel '96*, Springer-Verlag, s. 3—22.

Freiling, C.

[1986] „Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line", *Journal of Symbolic Logic*, 51, s. 190—200.

Gödel, K.

[1940] „The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the axioms of set theory", *Annals of Mathematical Studies* #3, Princeton University Press, Princeton. Przedrukowane w: *Kurt Gödel. Collected Works*, vol. 2, Feferman, S. (red.), Oxford University Press, Oxford 1990, s. 33—101.

Nelson, E.

[1994] „Taking formalism seriously", [w:] Prawitz, D., Skyrmms, B., Westerstahl, D. (red.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science* IX, Elsevier Science B.V., Amsterdam, s. 571—577.

Simms, J. C.

[1991] „Why the Continuum Hypothesis Is False", *Jahrbuch 1990 der Kurt-Gödel-Gesellschaft*, Wien, s. 11—35.

Simpson, S. G.

[1984] „Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?", *Journal of Symbolic Logic*, 49, s. 783—802.

[1999] *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin.

Wójtowicz, K.

[2001a] „Naturalizm w filozofii matematyki", *Filozofia Nauki*, 1, s. 29—52.

[2001b] „Die *Reverse Mathematics* und ihre philosophische Relevanz", *Philosophia Naturalis*, 1 (38), s. 121—144.

[200?] „On an alleged „philosophical proof" of the negation of the *continuum* hypothesis", (w przygotowaniu).