Filozofia Nauki
Rok IX, 2001, Nr 4(36)

Krzysztof Wójtowicz

Kilka uwag o twierdzeniu Gödla i intensjonalności

1. WSTĘP

W pracy [Krysztofiak 2000] Autor podejmuje problematykę intensjonalności w kontekście twierdzenia Gödla. Zasadnicza teza Autora głosi, iż język, w którym dowodzi się twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki liczb naturalnych jest językiem intensjonalnym. Tym samym „jeśli akceptuje się stanowisko ekstensjonalizmu, mówiące, że jedynie ekstensjonalne procedury dowodowe są akceptowalne w matematyce, to dowód Gödla jest nie do zaakceptowania" (s. 79).

Celem niniejszego artykułu jest analiza tej argumentacji, wykazanie, iż niektóre z przesłanek, na jakich się opiera, są niejasne, inne zaś fałszywe i że tym samym główna teza nie została uzasadniona.

Terminy techniczne, takie jak np. „rozstrzygalny", „reprezentowalny", „zupełny", „niezupełny", „dowód", „kodowanie", „efektywny", „model", „zdanie prawdziwe w modelu", *etc.* będą tutaj rozumiane w sposób standardowy (tak jak w podręcznikach logiki, np. [Adamowicz, Zbierski 1991], [Murawski 1990]). Mówiąc o „arytmetyce" będę miał na myśli arytmetykę Peano, oznaczaną dalej przez PA. Zbiór liczb naturalnych oznaczam jako ω, model standardowy dla PA jako $\mathbb{N}$. $[\alpha]$ oznacza numer gödlowski formuły α, L_{PA} — język arytmetyki Peano.

W mojej argumentacji będę niekiedy odwoływał się do pewnych faktów, które wchodzą w skład standardowego kursu logiki. Z nielicznymi wyjątkami rezygnuję tu więc z podawania szczegółowych odsyłaczy bibliograficznych. Bibliografia obejmuje kilka pozycji, w których te fakty można znaleźć.

2. KONSTRUKCJA ROZSTRZYGALNEGO, LECZ NIEREPREZENTOWALNEGO ZBIORU LICZB NATURALNYCH $H\subseteq\omega$

Jednym z faktów, na jaki powołuje się Autor w swej argumentacji jest istnienie rozstrzygalnego, lecz niereprezentowalnego w arytmetyce zbioru liczb naturalnych. Oto prezentowana przez Autora konstrukcja takiego zbioru:

(1) Formuły PA z jedną zmienną wolną ustawiane są w ciąg $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$,... Jest ich przeliczalnie wiele.

(2) Zbiór $H\subseteq\omega$ jest zdefiniowany jako: $n\in H \Leftrightarrow$ PA nie dowodzi $\alpha_n(\underline{n})$ (gdzie $\underline{n}$ oznacza liczbę n).

(3) Zbiór ten jest rozstrzygalny, gdyż aby stwierdzić, czy dana liczba n należy do H wystarczy sprawdzić, czy PA dowodzi $\alpha_n(\underline{n})$.

(4) Zbiór ten jednak nie jest reprezentowalny.

Jednak każdy zbiór rozstrzygalny jest reprezentowalny — i jest to jeden z podstawowych faktów wykorzystywanych w dowodzie twierdzenia Gödla (por. np [Adamowicz, Zbierski 1991, 136], [Cutland 1980, 145], [Grzegorczyk 1981, 423], [Hunter 1982, 200], [Kaye 1991, 34], [Murawski 1990, 82]).

Twierdzenie Autora, iż istnieje rozstrzygalny, ale niereprezentowalny podzbiór ω jest fałszywe. Fakt ten nie wymaga dalszej dyskusji, warto jednak uświadomić sobie, jakie jest źródło tego typu nieporozumień. Gdzie tkwi błąd? Zdania (1) i (4) są prawdziwe.[1] Natomiast zdanie (3) jest fałszywe — zbiór H nie jest bowiem zbiorem rozstrzygalnym (nie może nim oczywiście być na mocy twierdzenia, iż każdy zbiór rozstrzygalny jest reprezentowalny). Do pomyłki dochodzi w momencie uznania, że istnieje efektywna procedura sprawdzenia, czy dana liczba $n\in H$, a więc czy PA dowodzi $\alpha_n(\underline{n})$. Relacja „τ jest dowodem formuły φ na gruncie PA" jest relacją rozstrzygalną (por. np. [Adamowicz, Zbierski 1991, 144], [Cutland 1980, 146-7]). Zbiór $A=\{n\in\omega$: istnieje dowód τ dla $\varphi=\alpha_n(n)\}$ jest więc zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym. Intuicyjnie: jeśli dowód dla φ ISTNIEJE, to możemy go efektywnie znaleźć (wyliczając po kolei wszystkie dowody, aż trafimy na właściwy). Jeśli jednak NIE ISTNIEJE dowód dla danej formuły φ, to nie ma efektywnej metody stwierdzenia nieistnienia tego dowodu. Nie możemy przerwać poszukiwań dowodu na żadnym etapie, bo nigdy nie wiadomo, czy dowodu nie znaleźliśmy dlatego, że on nie istnieje, czy

---

[1] Zbiór H rzeczywiście nie jest reprezentowalny. Przypuśćmy bowiem, że istnieje formuła α taka, że

(i) $n\in H \Rightarrow$ PA dowodzi $\alpha(n)$

(ii) $n\notin H \Rightarrow$ PA dowodzi $\neg\alpha(n)$.

Niech $[\alpha]=k$. Wtedy: jeśli $k\in H$ to PA nie dowodzi $\alpha(k)$ (definicja H), ale zarazem $k\in H\Rightarrow$PA dowodzi $\alpha(k)$ (reprezentowalność H), co prowadzi do sprzeczności.

Podobnie: jeśli $k\notin H$, to PA dowodzi $\alpha(k)$ (definicja H), ale $k\notin H \Rightarrow$ PA dowodzi $\neg\alpha(k)$ (reprezentowalność H), co również prowadzi do sprzeczności. A zatem taka formuła α nie istnieje.

dlatego, że za krótko szukamy i poszukiwania należy kontynuować. W szczególności nie ma efektywnej, ogólnej metody stwierdzenia, że PA nie dowodzi $\alpha_n(\underline{n})$.[2]

Dowodzone przez Autora twierdzenie o istnieniu rozstrzygalnego lecz niereprezentowalnego zbioru $H \subseteq \omega$ jest więc fałszywe. Autor powołuje się jednak na nie w dalszej argumentacji.

3. KODÓW GÖDLOWSKICH JEST NIEPRZELICZALNIE WIELE

Według Autora kodów gödlowskich jest nieprzeliczalnie wiele, co uzasadnia w sposób następujący:

(1) Jest nieprzeliczalnie wiele nieskończonych podzbiorów ω

(2) Każdy nieskończony podzbiór ω może być wykorzystany do numeracji gödlowskiej

(3) A więc istnieje nieprzeliczalnie wiele numeracji gödlowskich.

Ad (1). Jest to prawda (dokładnie: takich podzbiorów jest *continuum*).

Ad (2). Nie jest to prawda. Kodowanie gödlowskie musi być EFEKTYWNE.[3] W szczególności znaczy to, że kodowany język musi być reprezentowany w odpowiedni sposób. Aby kodowanie było efektywne, zbiory liczb naturalnych przypisane zbiorom symboli logicznych i pozalogicznych muszą być rekurencyjne. Takich zbiorów jest jednak tylko przeliczalnie wiele (gdyż każdy z nich jest reprezentowany pewną formułą arytmetyczną, których jest przeliczalnie wiele).

Ad (3). Obiekty syntaktyczne (termy, formuły, dowody, *etc.*) kodujemy w rekurencyjny sposób, tzn.: funkcje przypisujące termom, formułom, dowodom, *etc.* liczby naturalne są funkcjami rekurencyjnymi. Jest ich przeliczalnie wiele (np. na mocy reprezentowalności tych funkcji formułami arytmetycznymi).[4]

A zatem numeracji gödlowskich istnieje tylko przeliczalnie wiele. Twierdzenie Autora, iż istnieje nieprzeliczalnie wiele kodowań gödlowskich jest fałszywe. Autor powołuje się jednak na nie w dalszej argumentacji.

---

[2] Zbiór (numerów) zdań dowodliwych jest rekurencyjnie przeliczalny, ale nie jest rekurencyjny. Tym samym jego dopełnienie nie jest zbiorem rekurencyjnie przeliczalnym.

[3] Por. np. [Kaye 1991, 37], gdzie autor opisuje w następujący sposób warunki nakładane na kodowania gödlowskie danego języka:

(i) Kodowanie musi być funkcją obliczalną.

(ii) Przeciwobraz musi być zbiorem obliczalnym (tzn. zbiór $K \subseteq \omega$ kodów gödlowskich musi być zbiorem obliczalnym).

(iii) Odwrotność kodowania też musi być funkcją obliczalną (tzn.: znajomość kodu pozwala na efektywne («mechaniczne») odtworzenie formuły).

[4] Intuicyjny argument ma postać: funkcje te powstają z przeliczalnej liczby funkcji bazowych poprzez zastosowanie skończenie wielu operacji. Może ich zatem być co najwyżej przeliczalnie wiele.

4. LICZBY NATURALNE JAKO OBIEKTY EPISTEMICZNIE NIEZUPEŁNE

Autor podaje następującą definicję pojęcia „epistemicznej niezupełności na gruncie teorii T":

Df. 6 $x \in (\text{Ep.Nzpl}_T) \Rightarrow \exists\alpha[\sim T \vdash \alpha(v/x) \wedge \sim T \vdash \sim\alpha(v/x)]$ (s. 71).

Idea jest następująca: obiekt x jest epistemicznie niezupełny (na gruncie teorii T), jeśli jest jakaś własność α taka, że T nie rozstrzyga, czy x ma własność α czy nie.[5] Autor następnie twierdzi, że dla każdego kodu gödlowskiego istnieje liczba naturalna, która jest epistemicznie niezupełna na gruncie arytmetyki. Dalej analizuje problem, ile jest — w świetle fałszywego (por. poprzedni punkt) twierdzenia o istnieniu nieprzeliczalnie wiele kodowań gödlowskich — epistemicznie niezupełnych liczb naturalnych.

Zauważmy, że — w myśl przyjętej tu (po stosownych poprawkach, por. przypis 5) definicji — każda liczba naturalna n jest epistemicznie niezupełna na gruncie PA. Niech bowiem σ będzie dowolnym zdaniem niezależnym od PA. Zdefiniujmy formułę z jedną zmienną wolną α: $\alpha(x):=\sigma\wedge(x=n)$. Wówczas:

(i) PA nie dowodzi $\alpha(n)$ (bo wtedy dowodziłoby $\sigma\wedge n=n$ a tym samym dowodziłaby σ, (wbrew założeniu, że σ jest zdaniem niezależnym).

(ii) PA nie dowodzi $\sim\alpha(n)$ bo wtedy dowodziłoby zdania $\sim\sigma\vee n\neq n$ (a wtedy dowodziłoby $\sim\sigma$).

Zdefiniowana przez Autora własność „epistemicznej niezupełności na gruncie PA" przysługuje więc każdej liczbie naturalnej. Fakt nie ma związku z wyborem konkretnego kodowania gödlowskiego, ani z ilością tych kodowań, a jedynie z faktem, że PA jest niezupełna.

---

[5] Uwaga notacyjna: definicja w tej postaci jest niepoprawna. Jeśli x jest obiektem o którym mówimy w języku, a więc elementem pewnego modelu M, to wyrażenie $\alpha(v/x)$ nie ma sensu, gdyż x nie jest obiektem językowym. Nie można także interpretować $\alpha(v/x)$ w terminach wartościowania w pewnym modelu M (takim, że $x\in M$), gdyż mowa jest nie o spełnianiu w modelu M, ale o dowodliwości w teorii T. Ponieważ jednak zasadniczo w rozważaniach Autora chodzi o liczby naturalne, to prawdopodobnie intencją Autora było stwierdzenie, iż liczba $n\in\omega$ jest obiektem epistemicznie niezupełnym, gdy jest formuła $\alpha\in L_{PA}$ taka, że PA nie rozstrzyga $\alpha(\underline{n})$ (gdzie $\underline{n}$ jest liczebnikiem 1+1+...+1, którego interpretacją jest liczba $n\in\omega$.) W wypadku liczb naturalnych definicję tę można więc w prosty sposób poprawić (bo każda liczba naturalna $n\in\omega$ ma swoją nazwę $\underline{n}$). Tak też interpretuję definicję podaną przez Autora. W ogólnym wypadku definicja będzie miała sens tylko dla obiektów, które są definiowalne w języku.

Ponieważ (gdy ograniczymy się do liczb $n\in\omega$) nie prowadzi to do nieporozumień, będę dalej używał notacji $\varphi(n)$, zamiast $\varphi(\underline{n})$.

5. LICZBY NATURALNE JAKO BYTY CZYSTO INTENCJONALNE

Autor przytacza Ingardena definicję przedmiotów czysto intencjonalnych jako takich, które „posiadają tak zwane miejsca niedookreślenia; są to takie przedmioty, o których nie można powiedzieć zgodnie z prawdą, że posiadają pewną własność lub że jej nie posiadają". Autor twierdzi dalej, że obiekty epistemicznie niezupełne są czysto intencjonalne, skąd wyprowadza wniosek, że „W procedurze dowodowej twierdzenia o niepełności arytmetyki liczb naturalnych, liczbom naturalnym nadaje się w sposób implicytny status bytów czysto intencjonalnych" (s. 72).

Autor odwołuje się do pojęcia prawdy. Aby móc dyskutować o tym, czy liczby naturalne posiadają miejsca niedookreślenia, należy więc doprecyzować sens, w jakim będzie to pojęcie używane. Możliwy jest tu szereg interpretacji:

(1) Zdanie $\varphi(n)$ jest prawdziwe, jeśli $\mathbb{N}\models\varphi(n)$ (gdzie $\mathbb{N}$ jest modelem standardowym).

(2) Zdanie $\varphi(n)$ jest prawdziwe, jeśli PA $\vdash \varphi(n)$

(3) Zdanie $\varphi(n)$ jest prawdziwe, jeśli T $\vdash \varphi(n)$, gdzie T jest odpowiednio dobraną teorią (np. odpowiednim rozszerzeniem PA).

Ad (1). To rozumienie opiera się na następujących założeniach:

(i) Definiowana jest pewna (wyróżniona) struktura — a mianowicie $\mathbb{N}$. Elementy tej struktury (czyli $\{1,2,3,\dots\}$) nazwiemy liczbami naturalnymi. Należy pamiętać, że $\mathbb{N}$ nie jest scharakteryzowana w PA, a w teorii mnogości ZFC, będącej metateorią dla PA. Pojęcie liczby naturalnej jest więc zdefiniowane za pomocą środków metateoretycznych.[6]

(ii) Skoro pojęcie liczby naturalnej zadane jest poprzez podanie charakterystyki struktury $\mathbb{N}$, tym samym pojęcie prawdy o liczbach naturalnych jest utożsamione z pojęciem prawdziwości w strukturze $\mathbb{N}$.

Mówienie o tym, że dana liczba $n\in\omega$ posiada pewną własność φ ma — w tym ujęciu — sens jedynie w kontekście wyróżnionej struktury $\mathbb{N}$ (czyli modelu standardowego dla PA).[7] Jednak wówczas dla każdej liczby $n\in\omega$ i każdej własności φ (z języka L_{PA}) zachodzi $\mathbb{N}\models\varphi(n)$ albo $\mathbb{N}\models\neg\varphi(n)$. O każdej liczbie $n\in\omega$ i o każdej własności φ można więc powiedzieć, że n ma własność φ lub że n ma własność $\neg\varphi$. Tym samym definicja Ingardena nie ma zastosowania do liczb naturalnych i nie ma podstaw, aby liczby naturalne uznać za byty czysto intencjonalne. Jednak teza o ich czysto intencjonalnym charakterze jest wykorzystywana dla uzasadnienia głównej tezy analizowanej rozprawy.

---

[6] Redukuje się ono do pojęcia „skończonej liczby porządkowej"; operacje arytmetyczne redukują się do odpowiednich operacji na zbiorach.

[7] Ogólnie: jeśli $a\in M$, (gdzie M jest pewnym modelem) to mówienie o własnościach obiektu a ma sens jedynie w relatywizacji do danego modelu M. Nie można — w ogólnym wypadku — mówić o „własnościach jako takich", w oderwaniu od modelu M.

Ad (2), (3). Przyjęcie interpretacji (2) lub (3) wymagałoby uzasadnienia, że „powiedzieć zgodnie z prawdą iż $n \in \omega$ posiada własność φ" znaczy to samo, co „udowodnić w pewnej teorii T, iż $\varphi(n)$". Konieczne jest więc utożsamienie pojęcia prawdy o liczbach naturalnych z pojęciem „twierdzenia pewnej teorii T" (gdzie T jest sformułowana w L_{PA} i jest nie słabsza niż PA). Jednak wówczas pojawia się problem natury dość zasadniczej: nie jest jasne, jak zadane jest pojęcie liczby naturalnej.[8] Rozważmy dwie możliwości:

(i) Pojęcie liczby naturalnej jest zdefiniowane poprzez wykorzystanie środków teorii ZFC i wskazanie struktury $\mathbb{N}$ jako struktury liczb naturalnych (por. pkt. 1).

(ii) Pojęcie liczby naturalnej jest zadane wyłącznie aksjomatycznie, poprzez aksjomaty pewnej teorii (np. PA).

Ad (i). W tej sytuacji bezzasadne będzie utożsamienie pojęcia prawdy o strukturze $\mathbb{N}$ z pojęciem twierdzenia PA. (Np. zdanie gödlowskie jest prawdziwe w strukturze $\mathbb{N}$, ale nie jest dowodliwe w PA.)

Ad (ii). Jeśli uznamy, że pojęcie liczby naturalnej jest opisane wyłącznie w ramach aksjomatów PA (czyli, w gruncie rzeczy, że znaczenie terminu „liczba naturalna" jest zdefiniowane przez postulaty w postaci aksjomatów PA, a nie poprzez wykorzystanie silniejszych środków, jakie daje ZFC[9]), to brak jest podstaw do utożsamiania liczb naturalnych z elementami zbioru ω (czyli ze skończonymi liczbami porządkowymi). PA ma wiele modeli, zaś każdy obiekt $a \in M$, (gdzie M jest modelem dla PA) jest — „z punktu widzenia M" — liczbą naturalną. Zbiór ω stanowi odcinek początkowy dowolnego modelu dla arytmetyki M, ale zbiór ω nie jest definiowalny w żadnym modelu M żadną formułą arytmetyczną.[10] Tym samym nie bardzo jest jasne, co by miało być tworzyć klasę obiektów posiadających miejsca niedookreślenia. Konieczne byłoby zawsze rozpatrywanie tego problemu w relatywizacji do danego modelu M — ale wówczas problem znika (por. pkt. 1).

Sam Autor nie precyzuje używanego pojęcia. Ponieważ jednak pisze *explicite* o „prawdziwej, lecz niedowodliwej formule" (s. 63), to tym samym wydaje się odrzucać stanowisko, w myśl którego prawdziwość redukuje się do dowodliwości. W tej

---

[8] Można tu jednak jeszcze wymienić dodatkowe trudności (mniejszej wagi):

(i) Każdy wybór teorii T jako „tej właściwej teorii opisującej klasę obiektów" będzie arbitralny. Dlaczego za teorię opisującą liczby naturalne należy uznać PA, a nie PA+Con(PA), albo PA+Con(PA)+Con(PA+Con(PA)), albo PA+G, gdzie G jest prawdziwym w modelu $\mathbb{N}$ ale niedowodliwym w PA zdaniem Gödla „ja nie mam dowodu"?

(ii) Istnieją teorie T takie, że żadna liczba $n \in \omega$ nie będzie epistemicznie niezupełna - np. Th($\mathbb{N}$) (teoria modelu $\mathbb{N}$). Dla dowolnej $n \in \omega$ i φ zachodzi $\varphi(n) \in Th(\mathbb{N})$ lub $\neg\varphi(n) \in Th(\mathbb{N})$. Z punktu widzenia teorii Th($\mathbb{N}$) liczby naturalne nie posiadają miejsc niedookreślenia. Oczywiście, dowolne zupełne rozszerzenie PA spełnia warunek $T \vdash \varphi(n)$ lub $T \vdash \neg\varphi(n)$. Teoria Th($\mathbb{N}$) wydaje się być jednak — spośród zupełnych rozszerzeń PA — najbardziej naturalna.

Tym samym, aby uzasadnić tezę, konieczne jest ograniczenie się do teorii niezupełnych.

[9] Ściśle: aksjomaty PA definiują znaczenia pierwotnych terminów PA.

[10] Z wyjątkiem oczywiście modelu standardowego $M = \mathbb{N}$.

sytuacji winien wybrać stanowisko (1). Jednak wówczas teza o posiadaniu przez liczby naturalne „miejsc niedookreślenia" upada.

6. FUNKTOR NUMERACJI GÖDLOWSKIEJ JAKO FUNKTOR INTENSJONALNY

Autor przedstawia następujące rozumowanie (s.73):

> [O] liczbach naturalnych można mówić zarówno na gruncie języka arytmetyki, jak i na gruncie każdego metajęzykowego rozszerzenia tego języka. Język arytmetyki jest językiem ekstensjonalnym i wobec tego liczby naturalne, jeżeli są opisywane w pryzmacie swoich własności tylko na gruncie język przedmiotowego arytmetyki nie mogą być przedmiotami intencjonalnymi. W procedurze dowodowej twierdzenia o niepełności[11] użyty jest metajęzyk arytmetyki liczb naturalnych. Jeśli więc jednym z założeń ontologicznych procedury dowodowej twierdzenia o niepełności arytmetyki jest to, że liczby naturalne są obiektami czysto intencjonalnymi, to metajęzyk użyty w tej procedurze dowodowej musi mieć charakter intensjonalny. Co więc decyduje o jego intensjonalnym charakterze?

Według Autora, o takim intensjonalnym charakterze metajęzyka decyduje w tym wypadku „funktor numeracji gödlowskiej", co Autor uzasadnia w sposób następujący:

(i) Istnieją równoważne, ale różne formuły arytmetyczne $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

(ii) Jeśli „Ng(φ)" oznacza numer gödlowski formuły, to $Ng(\alpha) \neq Ng(\beta)$.

(iii) A więc formuły α i β nie są wymienialne *salva veritate* we wszystkich kontekstach. Skoro bowiem $Ng(\alpha) \neq Ng(\beta)$, to prawdą jest, że $Ng(\alpha)=n$, ale fałszem jest, że $Ng(\beta)=n$. A zatem formułą, w której nie można wymienić α za β jest formuła „$Ng(x)=n$").

(iv) A więc Ng jest funktorem intensjonalnym.

Wątpliwości budzi wyciąganie z przytoczonych wyżej faktów tak daleko idących wniosków. $Ng(\alpha)=n$ wyraża fakt, iż zdanie $\alpha \in L_{PA}$ ma numer n. Intensjonalność funktora Ng wyraża się — według Autora — tym, że równoważne, ale składniowo różne zdania α i β mają różne numery gödlowskie, a zatem nie są wymienialne w metajęzykowej formule $\varphi(x)$:= „$Ng(x)=n$", odnoszącej się do formuł L_{PA}. To — według Autora — stanowi argument na rzecz tezy o intensjonalności metajęzyka w którym dowodzone jest twierdzenie Gödla.

Jeśli jednak metajęzyk, w którym można wyrazić fakt, że w języku L występują różne, ale równoważne formuły uznamy za intensjonalny, to niemal każdy metajęzyk okaże się intensjonalny. Ściśle: każdy metajęzyk, w którym można wyrazić fakt, że w języku są dwa składniowo różne, ale równoważne zdania, okaże się metajęzykiem intensjonalnym. W metajęzyku L_{PA} można np. wyrazić fakt, że równoważne sobie

[11] Standardowo mówi się o niezupełności, gdyż „pełność" jest terminem opisującym pewną relację między konsekwencją syntaktyczną i semantyczną danej logiki.

zdania σ_1=„2+3=5" oraz σ_2=„5=2+3" są składniowo różne. W metajęzyku klasycznego rachunku zdań można wyrazić fakt, że równoważne zdania α=„$p\wedge q$"oraz β=„$q\wedge p$" różnią się symbolem znajdującym się na pierwszym miejscu, *etc*. Jednak nie jest to moim zdaniem powód, aby twierdzić, że te metajęzyki są intensjonalne. Wystarczy po prostu powiedzieć, że da się w nich wyrazić fakt, że σ_1 i σ_2 czy α i β są różnymi ciągami symboli i jednocześnie istnieje formalny dowód zdania $\sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_2$ ($\alpha \Leftrightarrow \beta$). Jeśli zgodzimy się z punktem widzenia Autora, to będziemy musieli zaakceptować niezwykle szerokie pojęcie intensjonalności — i wówczas w zasadzie nie będzie w ogóle metajęzyków nieintensjonalnych. Jednak wówczas teza o intensjonalności metajęzyka będzie prawdziwa nie tylko w odniesieniu do metajęzyka PA, ale niemal każdego metajęzyka i stanie się tezą analityczną, opartą o zbyt szeroką — moim zdaniem — definicję pojęcia „intensjonalności".

Na koniec tych rozważań chciałbym zwrócić uwagę na fakt, że metateorią dla PA (w której dowodzone jest twierdzenie Gödla) jest teoria mnogości ZFC, która jest teorią ekstensjonalną.

7. JAK KREOWANE SĄ (I CZYM SĄ) INTENSJONALNE ŚWIATY ARYTMETYCZNE?

Autor zauważa, że istnieje przeliczalnie wiele formuł L_{PA} z jedną zmienną wolną, które definiują odpowiedni (przeliczalny) ciąg zbiorów liczb naturalnych. Autor następnie twierdzi, że

> na mocy operacji ponumerowania wszystkich formuł zdaniowych języka arytmetyki, formuły zdaniowe złożone z jednej zmiennej wolnej można uporządkować w ciąg. Każda z tych formuł konceptualizuje jakiś zbiór liczb naturalnych. Stąd z analizowanym ciągiem formuł skorelowany jest pewien ciąg zbiorów liczb naturalnych. O każdym z tych zbiorów można powiedzieć, że istnieje na gruncie świata wykreowanego na mocy procedury numeracji gödlowskiej. Sposób konstrukcji tego świata ma charakter intencjonalny, gdyż nie każdy element zbioru potęgowego, generowanego przez dziedzinę tego świata, istnieje na gruncie tego świata (s. 77).

Skonstruowany uprzednio zbiór H_i (zbiór H dla danej numeracji gödlowskiej **i**) należy do zbioru potęgowego, ale jako zbiór niereprezentowalny

> nie istnieje na gruncie świata wyznaczonego przez skonstruowany ciąg formuł. Z drugiej jednak strony, analizowany zbiór jest efektywnie (kryterialnie) zdefiniowany. To sugeruje, że zbiór H_i istnieje na gruncie jakiegoś świata arytmetycznego. Ale jakiego? Czy istnieją takie światy arytmetyczne, konstruowane sposobem intensjonalnym, na gruncie których zbiór H_i istnieje? (s. 77).

Czym jest omawiany przez Autora „intensjonalny świat arytmetyczny"? Modele intensjonalne to modele generowane przez funkcję numeracji — model standardowy $\mathbb{N}$

> wzbogacany jest o elementy wyróżnione, będące zbiorami liczb naturalnych, przy czym tych elementów jest przeliczalnie nieskończenie wiele. Każdy z tych elementów jest korelatem jakiejś formuły o jednej zmiennej wolnej; elementy te tworzą ciąg [...]. W procedurze dowodowej twierdzenia o niepełności arytmetyki konstruuje się taki zbiór H_i, który nie jest elementem

ciągu wyróżnionych zbiorów i którego nie da się wprowadzić do modelu, gdyż taki zabieg przekształcałby intensjonalny model w „model sprzeczny" (s. 78).

„Model intensjonalny" jest to obiekt skorelowany z danym modelem dla arytmetyki (przy czym chodzi tu — jak sądzę — o model standardowy $\mathbb{N}$), postaci (ω,D), gdzie $D\subseteq P(\omega)$ jest klasą zbiorów definiowalnych za pomocą pewnej formuły arytmetycznej φ (z jedną zmienną wolną). Zauważmy, że zbiór $A\subseteq\omega$ definiowalny formułą φ to $A=\{n\in\omega: \mathbb{N}\vDash\varphi(n)\}$. To, czy dana liczba $n\in\omega$ należy do A, nie zależy od tego, jaki numer zostanie nadany formule φ przy numeracji gödlowskiej. Klasa D nie zależy więc od numeracji gödlowskiej, tym samym wszystkie wykreowane w ten sposób światy intensjonalne są identyczne — dokładnie: istnieje jeden „świat intensjonalny" (jest nim (ω,D)) i problem postawiony przez Autora znika.[12]

Pozostając przy terminologii Autora należy się oczywiście zgodzić ze stwierdzeniem, że zbiór H_i nie istnieje na gruncie świata wyznaczonego przez skonstruowany ciąg formuł, gdyż H nie jest definiowalny żadną formułą φ. Jest również wyznaczony kryterialnie — w tym sensie, że jest on zdefiniowany w metateorii jako $H = \{[\alpha]$: PA nie dowodzi $\alpha([\alpha])\}$. Nie jest on jednak zbiorem zdefiniowanym efektywnie, gdyż nie istnieje algorytm stwierdzający, czy $n\in H$. Pojęcie efektywności ma ścisły sens techniczny, zaś pojęcie kryterialności nie ma sensu technicznego i nie należy ich mieszać. Zauważmy, że zbiór numerów zdań prawdziwych w modelu standardowym jest wyznaczony kryterialnie w tym sensie, że można go zdefiniować w metateorii jako $Th(\mathbb{N})=\{[\alpha]: \mathbb{N}\vDash\alpha\}$, ale (zgodnie z twierdzeniem Tarskiego o niedefiniowalności prawdy) nie istnieje formuła $\varphi(x)\in L_{PA}$ taka, że $\alpha\in Th(\mathbb{N})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{N}\vDash\varphi([\alpha])$).

Mam wrażenie, że źródłem nieporozumień tego typu związanych z pojęciem światów intensjonalnych jest nie dość jasne wskazanie różnicy pomiędzy definowalnością podzbioru $A\subseteq\omega$ za pomocą formuły języka L_{PA}, a definiowalnością takiego zbioru za pomocą środków metateoretycznych (pozwalających np. na zdefiniowanie — niedefiniowalnego w L_{PA} — zbioru numerów zdań prawdziwych w standardowym modelu dla arytmetyki czy innych zbiorów związanych z kodowaniami gödlowskimi).

W samym sformułowaniu problemu tkwi zresztą dość istotna nieścisłość. Autor twierdzi mianowicie, iż „jeśli zbiór H_i ma istnieć na gruncie świata W_j, to formuła '$n\in H_i$' (zawierająca jedną zmienną wolną n) musi występować pośród wyrazów ciągu formuł zdaniowych o jednej zmiennej wolnej, wyznaczonego przez kod gödlowski j." (s. 77). Jednak formuła „$n\in H_i$" nie jest formułą arytmetyczną, więc problem tego,

[12] Być może przyczyny tego nieporozumienia tkwią w niedostrzeżeniu faktu, że dany zbiór $A\subseteq\omega$ może (przy różnych numeracjach gödlowskich) reprezentować różne zjawiska składniowe — np. przy jednym kodowaniu zbiór zmiennych może być reprezentowany jako zbiór liczb parzystych, a przy innym — nieparzystych, a przy jeszcze innym — jako zbiór liczb podzielnych przez 2001, *etc.* A zatem ten sam zbiór liczb naturalnych może — przy różnych reprezentacjach języka w $\mathbb{N}$ i różnych kodowaniach gödlowskich, reprezentować różne zbiory formuł. Jednak to, jaka jest ekstensja formuły $\varphi\in L_{PA}$ w danym modelu M nie ma związku z numeracją gödlowską.

na jakim miejscu w ciągu formuł arytmetycznych się znajduje, jest po prostu źle postawiony.[13]

8. DOWODÓW I METOD EFEKTYWNYCH JEST NIEPRZELICZALNIE WIELE

Autor podaje w wątpliwość argument, w myśl którego istnieje tylko przeliczalnie wiele metod efektywnych, gdyż każda metoda efektywna daje się opisać za pomocą ciągu symboli danego języka formalnego. „Jeśli tak, to każdej metodzie efektywnej w istocie odpowiada jakiś ciąg symboli alfabetu, czyli pewna formuła zdaniowa danego języka. Wydaje się jednak, że ten ostatni wniosek jest nie do zaakceptowania" — pisze Autor (s. 80).

Przy standardowym (tzn. występującym w teorii obliczeń) rozumieniu pojęcia efektywności (lub obliczalności) metody efektywne (pojawiające się w kontekście liczb naturalnych) to po prostu metody odpowiadające funkcjom rekurencyjnym (równoważnie: maszynom Turinga). Jest ich przeliczalnie wiele.

Autor odwołuje się również do następującego argumentu:

> [D]owody mogą być potraktowane jako paradygmatyczne przykłady metod efektywnych. Dowody nie są jednak formułami, tylko ciągami formuł (czyli zbiorami formuł). Ponadto dowody są zawsze dowodami na gruncie danego systemu logicznego. System logiczny można zaś ująć jako zbiór dowodów wyznaczonych przez określoną operację konsekwencji logicznej. [...] Jeśli więc liczba formuł danego języka jest przeliczalna nieskończona, to zbiór wszystkich zbiorów formuł danego języka jest nieprzeliczalny.

Według Autora istnieje nieprzeliczalna wielość dowodów, a tym samym nieprzeliczalna wielość metod efektywnych (jako że dowody są efektywne). Jeśli jednak mówimy o logice predykatów pierwszego rzędu (a w takim języku sformułowana jest np. arytmetyka Peano i jej metateoria, będąca przedmiotem analizy), to dowody są zawsze SKOŃCZONYMI ciągami formuł, a takich jest przeliczalnie wiele.[14]

---

[13] Błąd ten ma charakter zasadniczy, nie jedynie stylistyczny. Można byłoby — traktując to jako skrótowy sposób mówienia — powiedzieć np., że formuła „$n \in$ PAR", (gdzie PAR oznacza zbiór liczb parzystych), ma pewne miejsce w ciągu formuł arytmetycznych. Jednak tutaj *de facto* mówimy o tym, że n spełnia formułę DEFINIUJĄCĄ liczby parzyste (tj. np. formułę $\exists x(x+x=n)$) i — o ile jest to jasne z kontekstu — tego typu nieścisły sposób mówienia można uznać za dozwolony pod warunkiem, że mamy świadomość tego, O KTÓREJ z (nieskończenie wielu) formuł definiujących zbiór liczb parzystych mówimy. Ten sposób mówienia byłby więc dość kłopotliwy, ale dopuszczalny. Należy pamiętać, że w języku L_{PA} w ogóle nie mówi się o podzbiorach ω — mówi się jedynie o indywiduach (liczbach), pewnych operacjach (+, ·) pewnych relacjach (<) oraz o pewnych indywiduach wyróżnionych (0 i 1).

Jednak zdania „$n \in H$" nie można uznać za tego typu skrót notacyjny, gdyż zbiór H nie jest definiowalny w ogóle żadną formułą arytmetyczną. Tym samym błąd w sformułowaniu problemu ma charakter zasadniczy.

[14] Cutland omawiając pojęcie systemu formalnego, do którego odnosi się twierdzenie Gödla,

9. KONKLUZJA

Autor podsumowuje swoje analizy stwierdzeniem:

> Oczywiście, jeśli akceptuje się stanowisko ekstensjonalizmu, mówiące, że jedynie ekstensjonalne procedury dowodowe są akceptowalne w matematyce, to dowód Gödla jest nie do zaakceptowania. Ekstensjonalista musi bowiem zrezygnować z procedury numerowania formuł, w której używa się funktora intensjonalnego, oznaczającego funkcję numeracji (s. 79).

Zaprezentowane przez Autora uzasadnienie tej tezy nie jest — w świetle wskazanych wyżej wad — przekonujące.

BIBLIOGRAFIA

Adamowicz, Z., Zbierski, P.
[1991] *Logika matematyczna*, Warszawa, PWN.

Cutland, N.
[1980] *Computablility: An Introduction To Recursive Function Theory*, Cambridge, Cambridge University Press.

Grzegorczyk, A.
[1981] *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa, PWN.

Hunter, G.
[1980] *Metalogika*, Warszawa, PWN.

Kaye, R.
[1991] *Models of Peano Arithmetic*, Oxford, Clarendon Press.

Krysztofiak, W.
[2000] „Twierdzenie Gödla, możliwe światy i intensjonalność", [w:] J. Hartman (red.), *Filozofia i logika. W stronę Jana Woleńskiego*, Kraków, Aureus.

Murawski, R.
[1990] *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki*, Poznań, Wydawnictwa UAM.

---

wymienia następujące warunki:

(a) dowody są obiektami skończonymi.

(b) pojęcie dowodu jest zdefiniowane tak, że relacja „p jest dowodem zdania σ z aksjomatów A" jest relacją rozstrzygalną [Cutland 1980, 145].