Filozofia Nauki
Rok XVI, 2008, Nr 1(61)

ARCHIWUM

Kazimierz Ajdukiewicz

Główne zasady logiki i metodologii
Wykłady z roku 1949/1950 w Uniwersytecie Poznańskim (na podstawie notatek Henryka Wiśniewskiego)

Dzięki uprzejmemu pośrednictwu Profesora Andrzeja Wiśniewskiego — Ojciec Jego, Profesor Henryk Wiśniewski, udostępnił mi swoje notatki z wykładów Kazimierza Ajdukiewicza w Uniwersytecie Poznańskim, gdzie Ajdukiewicz w latach 1945-1954 kierował Katedrą Teorii i Metodologii Nauk.

Oto fragmenty listu Profesora Henryka Wiśniewskiego do mnie — z 4 marca 2004 roku — w którym zawarte są istotne informacje dotyczące okoliczności powstania tych notatek:

> *Po […] pobieżnym […] przeczytaniu [notatek sprzed ponad pół wieku] uznałem, że […] nie są one kompletne i mogą zawierać usterki. Z tego względu postanowiłem skonfrontować je z notatkami kolegów, z którymi w tym czasie studiowałem i którzy jeszcze żyją. […] Rozmawiałem z prof. Henrykiem Ratajskim (matematykiem), z prof. Franciszkiem Kaczmarkiem (fizykiem), z prof. Jerzym Albrychtem (matematykiem) — lwowianinem, który tuż po wojnie zamieszkał i studiował w Poznaniu — oraz z prof. Julianem Musielakiem (matematykiem). Niestety, wszyscy oni, po przejrzeniu w swoich domach różnych materiałów, nie znaleźli (już) żadnych notatek z tego zakresu. […] Tak więc nie miałem możliwości dokonania korekty i uzupełnienia moich notatek. […]*
>
> *Prof. Ajdukiewicz był w tym czasie rektorem Uniwersytetu Poznańskiego.*[1] *Bywał bardzo zajęty. […] Wykłady odbywały się o 19-tej lub 20-tej, w zależności od jego rozkładu zajęć. Patrząc na daty wygłoszonych wykładów, można przypuszczać, że niektóre z zaplanowanych wykładów nie odbyły się ze względu na inne obowiązki prof. Ajdukiewicza.*
>
> *[…] Studia podjąłem w roku akademickim 1948/1949. […] Mój rocznik był ostatnim, który*

[1] Ajdukiewicz sprawował tę funkcję w latach 1948-1952 (przyp. mój, JJJ).

> *studiował według programu przedwojennego. W owym czasie wykłady dzieliły się na «obowiązkowe» (ściśle związane z kierunkiem studiów) i wykłady «do wyboru». Te ostatnie nie były prowadzone w każdym roku [...]; [ich otwarcie było] uzależnione od liczby osób, które wyraziły chęć ich wysłuchania. Do tej ostatniej grupy należała filozofia. Na wykłady prof. Ajdukiewicza zapisała się dość znaczna liczba słuchaczy, głównie z uwagi na osobę wykładowcy, który był w środowisku poznańskim bardzo szanowany i uznawany za wybitnego naukowca. Zapisując się na te wykłady, pierwotnie zakładaliśmy, że będą one dotyczyły filozofii (o czym świadczy nagłówek [...] zeszytu-notatek: „wykłady z filozofii"), lecz ku naszemu zdumieniu okazało się, że przedstawione będą „główne zasady logiki i metodologii". Zrozumieliśmy gremialnie, że decyzja Ajdukiewicza była swoistym wybiegiem, umożliwiającym uniknięcie zajmowania się «filozofią marksistowską», co spotkało się z naszą aprobatą. Z drugiej strony, jako przyszłych adeptów nauk ścisłych, ucieszyło nas, że wykłady dotyczyć będą zagadnień dla nas ważnych i być może przydatnych. Okazało się zresztą później, że na ostatnim roku studiów musieliśmy uczestniczyć w — uprzednio nie zaplanowanych — wykładach z «filozofii marksistowskiej» oraz «ekonomii politycznej», a także zdać egzaminy z tych «przedmiotów».*

Zamieszczona poniżej rekonstrukcja notatek Profesora Henryka Wiśniewskiego wymaga kilku komentarzy.

1. Podzieliłem cykl wykładów na grupy tematyczne — na ogół wyzyskując tytuły, które Autor umieścił w swoich notatkach i zaznaczając daty, w których odbyły się poszczególne wykłady.

2. Rozwinąłem wszystkie skróty wyrazowe i dopełniłem — do całych zdań — elipsy i równoważniki.

3. W paru miejscach uzupełniłem wywody zgodnie z poglądami Ajdukiewicza znanymi z jego prac opublikowanych — tak, aby tekst dał się «wygodnie» czytać i był bardziej jednolity redakcyjne (dodałem np. brakujące nazwy praw rachunku zdań i rachunku funkcyjnego). W kilku innych miejscach — z podobnego powodu — usunąłem zbędne powtórzenia (np. definicji „formuły logicznej" i „prawa logicznego").

4. Pominąłem pewne fragmenty (w szczególności paragrafy dotyczące geometrycznej interpretacji kwantyfikatorów i paradoksu zbioru podzbiorów) — ze względu na ich szkicowość trudne do wiernego zrekonstruowania.

5. Poprawiłem kilka oczywistych przeoczeń — dziś trudno powiedzieć: Wykładowcy czy Słuchacza.

6. Zrezygnowałem z zaznaczania (np. za pomocą odpowiednich nawiasów) dopełnień, uzupełnień i zmian, gdyż uczyniłoby to tekst bardzo trudnym w odbiorze — a byłoby konieczne chyba tylko w wypadku rekonstrukcji oryginalnego zapisu Ajdukiewiczowskiego.

Chciałbym bardzo podziękować Profesorowi Henrykowi Wiśniewskiemu za wyrażenie zgody na rekonstrukcję i publikację udostępnionych mi notatek, a Jego Synowi, Profesorowi Andrzejowi Wiśniewskiemu, za liczne wnikliwe uwagi (i propozycje sformułowań), które umożliwiły nadanie ostatecznego kształtu dokonanej przeze mnie rekonstrukcji.

Jacek Juliusz Jadacki

Warszawa, 12 grudnia 2007 roku.

1. KATEGORIE SYNTAKTYCZNE
(11.10.1949)

1.1. Zdania i nazwy

Twierdzenia (w sensie logicznym) formułuje się za pomocą zdań orzekających. Są one bądź prawdą, bądź fałszem. Przykładem zdania orzekającego jest zdanie „Słońce świeci".

Ogół wyrażeń można podzielić ze względu na wartości składniowe (*scil.* Syntaktyczne) na zdania, nazwy i funktory.

Dwa wyrażenia mają tę samą wartość składniową, jeżeli po zastąpieniu w zdaniu jednego z tych wyrażeń drugim — otrzymujemy znowu zdanie. O takich wyrażeniach mówi się też, że są tej samej kategorii semantycznej.

Weźmy zdanie „Słońce świeci". Gdy zastąpimy wyrażenie „Słońce" wyrażeniem „Ziemia", otrzymamy zdanie „Ziemia świeci". Wyrażenia „Słońce" i „Ziemia" mają zatem tę samą wartość składniową. Podobnie gdy zastąpimy wyrażenie „świeci" wyrażeniem „tańczy", otrzymamy zdanie. Dlatego również wyrażenia „świeci" i „tańczy" mają tę samą wartość składniową.

Wyrażeniami o tej samej wartości składniowej są nazwy, występujące zarówno *in suppositione materiali*, jak i (w innym wypadku) *in suppositione formali.*

Wartości składniowe zaznaczamy za pomocą odpowiednich symboli. Jeżeli dane wyrażenie jest zdaniem, to piszemy pod nim znak 'z'. Zob. np.:

Słońce świeci.
z

Jeżeli wyrażenie jest nazwą, piszemy pod nim znak 'n'. Zob. np.:

Ziemia
n

1.2. Funktory i argumenty

Odrębną wartość składniową mają funktory.

Przykładem funktora jest wyraz „świeci". Wyraz ten — połączony z nazwą — tworzy zdanie; dlatego też nazywamy go „funktorem zdaniotwórczym od jednej nazwy": w tym wypadku od nazwy „Słońce". Funktor tego rodzaju oznaczamy symbolem '$\frac{z}{n}$'.

Innym przykładem funktora zdaniotwórczego jest wyraz „lubi" w zdaniu:

Piotr lubi Jana.

$$n \quad \frac{z}{nn} \quad n$$

W zdaniu tym wyraz „lubi” jest funktorem zdaniotwórczym od dwóch nazw.

Funktorem zdaniotwórczym od dwóch nazw jest również wyraz „jest” w zdaniu:

Jan jest mężczyzną.

$$n \quad \frac{z}{nn} \quad n$$

Rolę, którą spełnia funktor „jest”, można zobrazować następująco:

]– jest –[

Funktory odnoszą się do czegoś — to zaś, do czego się odnoszą, nazywamy „argumentami”.

Wyraz może być też funktorem od trzech i więcej nazw.

Poza funktorami zdaniotwórczymi są też funktory nazwotwórcze. Rozważmy zdanie:

Dobry pies jest czujny.

$$\underbrace{\frac{n}{n} \quad n}_{\downarrow \; n}$$

W zdaniu tym „dobry” jest wyrazem dającym z nazwą „pies” nową nazwę: „dobry pies”. Zatem „dobry” jest funktorem nazwotwórczym od jednej nazwy. Taki funktor oznaczamy za pomocą symbolu ‘ $\frac{n}{n}$ ’.

Przykładem funktora nazwotwórczego od dwóch nazw jest wyraz „logarytm” występujący w nazwie:

$\log_{10} 100$

$$\frac{n}{nn}\; n \;\; n$$

Rozważmy teraz następujące zdanie:

Liczba kluczy w tym pęku jest parzysta albo liczba kluczy w tym pęku nie jest parzysta.

W zdaniu tym „albo” jest funktorem zdaniotwórczym od dwóch zdań.

Jak widać funktory mogą być jedno- ($\frac{z}{n}$, $\frac{n}{n}$, $\frac{z}{z}$), dwu- ($\frac{z}{nn}$, $\frac{n}{nn}$, $\frac{z}{zz}$) i trój-argumentowe ($\frac{z}{nnn}$). Szczególnym rodzajem funktorów są funktory funktorotwórcze. W zdaniu:

Słońce jasno świeci.

$$n \quad \underbrace{\frac{\;\frac{z}{n}\;}{\frac{z}{n}} \quad \frac{z}{n}}_{\downarrow}$$

$$\frac{z}{n}$$

wyraz „jasno” jest funktorem funktorotwórczym od jednego argumentu funktorowego.

1.3. Wyrażenia dobrze i źle zbudowane

Jeśli wyrażenie jest dobrze sformułowane, symbole wskazujące kategorię syntaktyczną członów tego wyrażenia powinny dać się uprościć do jednego indeksu. Tak jest np. w wypadku zdania:

Jan jest mężczyzną.

$$n\frac{z}{nn}n$$

$$\cancel{n}\frac{z}{\cancel{nn}}\cancel{n}$$

$$z$$

Natomiast wyrażenie:

Jan jest śpiewa

$$n \quad \frac{z}{nn} \quad \frac{z}{n}$$

jest źle sformułowane, gdyż nie daje się uprościć do jednego indeksu:

$\cancel{n}\frac{z}{\cancel{n}n}\quad\frac{z}{n}$

2. FUNKCJE SEMANTYCZNE NAZW
(11 i 18.10.1949)

2.1. Desygnaty nazw

Nazwy pełnią funkcję nazywania (*scil.* oznaczania) pewnych rzeczy. Dana nazwa oznacza każdy i tylko taki przedmiot, o którym tę nazwę można zgodnie z prawdą orzec. Przedmiot taki jest desygnatem tej nazwy. Na przykład:

(1) nazwa „człowiek" oznacza Kopernika, gdyż Kopernik jest człowiekiem;
(2) nazwa „gwiazda" oznacza Słońce, gdyż Słońce jest gwiazdą.

Ogólnie:

Nazwa '*N*' oznacza $x \equiv x$ jest *N*.

Są nazwy, które można orzec o nich samych; nazwijmy je „wyrażeniami autosemantycznymi" i oznaczmy za pomocą symbolu '*A*'. „Wyrażeniami heterosemantycznymi" nazwijmy wyrażenia, których nie można orzec o nich samych i oznaczmy je za pomocą symbolu '*H*'. Mamy więc:

x jest $A \equiv x$ oznacza x
x jest $H \equiv x$ nie oznacza x.

Wyraz „stół" jest *H*; natomiast wyraz „rzeczownik" jest *A*. Zapytajmy, czy sam wyraz '*H*' jest *H*.

Otóż wyraz '*H*' jest *H* pod warunkiem, że '*H*' nie oznacza wyrazu '*H*', a to jest równe temu, że '*H*' nie jest *H*. Natomiast to, że wyraz '*H*' nie jest *H*, jest równe temu, że wyraz '*H*' nie oznacza wyrazu '*H*', czyli wyraz '*H*' jest *H*.

Jeżeli z jakiegoś zdania wynika jego zaprzeczenie, to zdanie to jest fałszywe. W tym wypadku zaprzeczenie wynika zarówno z twierdzącej, jak i przeczącej odpowiedzi na pytanie, czy wyraz '*H*' jest *H*. Mamy więc do czynienia z paradoksem. Przedmiot oznaczany przez daną nazwę jest to jej desygnat. Dwie nazwy, które nie różną się swymi desygnatami, są nazwami równoważnymi. Nazwy „$\sqrt{2500}$" i „3/2 · 100/3" oraz „największe miasto na Wisłą" i „stolica Polski" — są parami nazw równoważnych.

Dwie nazwy równoważne nie muszą być równoznaczne. Należy bowiem odróżniać to, co nazwa oznacza, od tego, co znaczy.

2.2. Zakres i znaczenie nazw

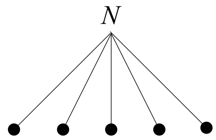
Przypomnijmy:

Przedmiot oznaczany przez jakąś nazwę — to tyle, co desygnat tej nazwy. Zbiór wszystkich desygnatów danej nazwy — to zakres tej nazwy. Nazwy równoważne zatem — to tyle, co nazwy równozakresowe.

To, co dana nazwa znaczy, jest to znaczenie tej nazwy. Inaczej mówiąc: znaczeniem danej nazwy jest ten sposób rozumienia, który tej nazwie przypisuje język.

Mówiąc o tym, co dany wyraz oznacza, relatywizujemy ten wyraz do pewnego znaczenia.

Pojęcie — to tyle, co znaczenie jakiejś nazwy. „Desygnatem pojęcia” nazywamy desygnat nazwy, której znaczeniem jest to pojęcie.



Pojęcie ogólne — to takie pojęcie, które posiada więcej niż jeden desygnat. Pojęcie jest jednostkowe, jeżeli posiada tylko jeden desygnat. Pojęcie puste — to takie pojęcie, którego desygnat nie istnieje.

Przykłady:
człowiek — pojęcie ogólne;
Poznań — pojęcie jednostkowe;
król szwajcarski — pojęcie puste.

Analogicznie rozróżniamy nazwy ogólne, jednostkowe i puste. Na przykład: nazwa „Wenus” wzięta jako oznaczająca piękność — jest nazwą ogólną; wzięta jako oznaczająca planetę — jest nazwą jednostkową; wzięta jako oznaczająca boginię — jest nazwą pustą. *Coś* jest pojęciem ogólnym, a *Wszechświat* — pojęciem jednostkowym.

2.3. Stosunki między zakresami nazw

Jeżeli każde A jest B, to zakres nazwy A zawiera się w zakresie nazwy B. W takim wypadku — nie ma takiego A, które by nie było B: nie ma A non B. Oznacza się to następująco:

$A \subset B$

Zakres pojęcia pustego zawiera się w zakresie każdego pojęcia ogólnego.

Za pomocą terminu „zawieranie się” można zdefiniować terminy odnoszące się do pozostałych stosunków między zakresami nazw.

(1) Jeżeli zakres nazwy *A* zawiera się w zakresie nazwy *B*, a zakres nazwy *B* zawiera się w *A*, to nazwa *A* jest zamienna względem nazwy *B*; inaczej mówiąc — nazwy *A* i *B* są równoważne:

$A \subset B$ i $B \subset A$

Na przykład — każdy trójkąt równoboczny jest równokątny i na odwrót. Nazwy „trójkąt równoboczny” i „trójkąt równokątny” są zatem zamienne.

(2) Jeżeli:

$A \subset B$ i $B \not\subset A$

to nazwa *A* jest podrzędna względem nazwy *B*. Na przykład — każdy koń jest ssakiem, ale nieprawda, że każdy ssak jest koniem. Nazwa „koń” jest zatem podrzędna względem nazwy „ssak”.

(3) Jeżeli:

$A \not\subset B$, a $B \subset A$

to nazwa *A* jest nadrzędna względem nazwy *B*. Na przykład — nazwa „część Europy” jest nadrzędna względem nazwy „Polska”.

(4) Jeżeli:

$A \not\subset B$, a $B \not\subset A$ i istnieją $A \cdot B$

to nazwa *A* krzyżuje się z nazwą *B*. Na przykład — nazwa „żołnierz” krzyżuje się z nazwą „blondyn”.

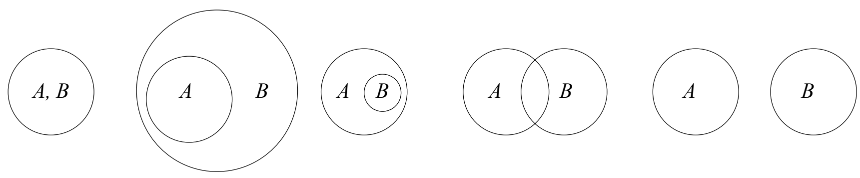
(5) Jeżeli:

$A \not\subset B$, a $B \not\subset A$ i nie istnieje $A \cdot B$

to nazwa *A* wyklucza się z nazwą *B*.

Na przykład — nazwa „Polska” wyklucza się z nazwą „Europa”.

Wskazane stosunki ilustrują poniższe diagramy.



zamienność podrzędność nadrzędność krzyżowanie się wykluczanie się

3. RACHUNEK ZDAŃ
(13.12.1949 i 3.01.1950[2])

3.1. Prawa rachunku zdań

3.1.1. Prawa dotyczące implikacji

Implikację — czyli okres warunkowy — oznaczamy za pomocą symbolu '$\supset$' i czytamy: „jeżeli…, to…". Przykład: jeżeli liczba jest podzielna przez 6, to jest ona podzielna przez 3. Implikację charakteryzuje następująca tabelka, w której '1' symbolizuje prawdę, a '0' — fałsz:

p	q	$p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Jak widać — okres warunkowy jest fałszywy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik jest fałszywy.

Należy odróżniać okres warunkowy od wnioskowania:

$A \rightarrow B$

W wypadku wnioskowania, stwierdziwszy A, wnioskujemy B.

Oto przykładowe prawa dotyczące implikacji:

$(p \supset q) \equiv \sim (p \cdot \sim q)$ (*prawo zastępowania implikacji*)
$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$ (*prawo transpozycji prostej*)
$(p \cdot q \supset r) \supset (p \cdot \sim r \supset \sim q)$ (*prawo transpozycji złożonej*)

Przykład: jeżeli jeśli liczba jest podzielna przez 3 i 4, to jest podzielna przez 12 — to jeśli jest podzielna przez 3, a nie jest podzielna przez 12, to nie jest podzielna przez 4.

Łatwo wykazać, że ponieważ:

$(p \cdot \sim r \supset \sim q) \supset (p \cdot \sim\sim q \supset \sim\sim r)$

więc też mamy:

$(p \cdot \sim r \supset \sim q) \supset (p \cdot q \supset r)$

Zachodzi również:

$(p \cdot q \supset r) \supset (\sim r \cdot q \supset \sim p)$

[2] Z 1, 8, 15, 22 i 29.11.1949 oraz z 6 i 20.12.1949 — brak notatek (przyp. mój, JJJ).

3.1.2. Prawa dotyczące alternatywy

Alternatywę oznaczamy za pomocą symbolu '$\vee$' i czytamy: „lub".
Oto przykładowe prawa dotyczące alternatywy:

$p \vee q \equiv q \vee p$ (*prawo przemienności alternatywy*)
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (*prawo łączności alternatywy*)
$(p \vee q) \cdot r \equiv p \cdot r \vee q \cdot r$ (*prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy*)

Prawa te wykazują analogię do odpowiednich twierdzeń algebry:

$a + b = b + a$
$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

3.1.3. Związek między implikacją a alternatywą

Między implikacją a alternatywą zachodzi następujący związek

$(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$ (*prawo zastępowania implikacji przez alternatywę*)

Widać to na podstawie następującej tabelki:

p	*q*	nie *p* lub *q*	jeżeli *p*, to *q*
prawda	prawda	prawda	prawda
prawda	fałsz	fałsz	fałsz
fałsz	prawda	prawda	prawda
fałsz	fałsz	prawda	prawda

Zarówno „jeżeli *p*, to *q*", jak i „nie *p* lub *q*" wykluczają „p i $\sim q$", a dopuszczają pozostałe możliwości: „p i q", „$\sim p$ i q" i „$\sim p$ i $\sim q$".

3.1.4. Prawa dotyczące koniunkcji (iloczynu logicznego)

Koniunkcję oznaczamy za pomocą symbolu '$\cdot$' i czytamy: „i". Oto przykładowe prawa dotyczące koniunkcji:

$p \cdot q \equiv q \cdot p$ (*prawo przemienności koniunkcji*)
$(p \cdot q) \cdot r \equiv p \cdot (q \cdot r)$ (*prawo łączności koniunkcji*)
$(p \cdot q) \vee r \equiv (p \vee r) \cdot (q \vee r)$ (*prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji*)

Dualność wzorów rachunku zdań:
Wszelka równoważność, w której członach występują znaki '$\vee$' oraz '$\cdot$', zachowuje swą wartość logiczną, gdy przestawimy znak koniunkcji ze znakiem alternatywy.

3.1.5. Negacja zdania złożonego

Oto przykładowe prawa dotyczące negacji zdania złożonego:

$\sim (p \supset q) \equiv (p \cdot \sim q)$ (*prawo zaprzeczania implikacji*)

Negacja okresu warunkowego sprowadza się do stwierdzenia jego poprzednika i zaprzeczenia następnika (co się wykorzystuje w dowodach nie wprost).

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \cdot \sim q$ (*prawo De Morgana dla alternatywy*)
$\sim (p \cdot q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (*prawo De Morgana dla koniunkcji*)

3.2. Systemy logik wielowartościowych

Tematem dotychchczasowych rozważań było dwuwartościowy rachunek zdań. Załóżmy teraz, że zdanie może być nie tylko prawdziwe lub fałszywe, lecz także niezdecydowane.

Rozważmy przykłady Profesora Jana Łukasiewicza:

(1) *3 stycznia roku 1950 jestem w Poznaniu.*
(2) *3 stycznia roku 1950 jestem w Krakowie.*
(3) *3 stycznia roku 1951 będę w Poznaniu.*

Zdania niezdecydowane — takie jak zdanie (3) — mają jakąś trzecią wartość logiczną. W wypadku rozważanych przykładów mielibyśmy więc następujący ciąg wartości: 1, 0 i 1/2 (wartość niezdecydowana).

Wartości logiczne negacji, implikacji, alternatywy i koniunkcji przedstawiałyby się wtedy następująco:

p	$\sim p$
1	0
½	½
0	1

$\supset$	1	½	0
1	1	½	0
½	1	½	½
0	1	1	1

$\vee$	1	½	0
1	1	1	1
½	1	½	½
0	1	½	0

$\cdot$	1	½	0
1	1	½	0
½	½	½	0
0	0	0	0

Każde twierdzenie logiki trójwartościowej jest słuszne w logice dwuwartościowej — lecz nie na odwrót. Na przykład:

$\sim (p \cdot \sim p)$ (*prawo sprzeczności*)
$\sim (½ \cdot \sim ½)$
$\sim (½ \cdot ½)$
$\sim (½)$
½

$p \vee \sim p$ (*prawo wyłączonego środka*)
$½ \vee \sim ½$
$½ \vee ½$
½

$\sim p \supset (p \supset q)$ (*prawo Dunsa Szkota*)

Prawo to stanowi argument ofensywny obrońców zasady sprzeczności. Jeżeli dla jakiejś pary zdań, A, $\sim A$, oba są fałszywe, to można by udowodnić, że każde zdanie jest słuszne lub prawdziwe.

$A, \sim A$
$\sim A \supset (A \supset q)$
$(A \supset q)$

Na gruncie logiki trójwartościowej mielibyśmy:

$\sim ½ \supset (½ \supset ½)$
$½ \supset (½ \supset ½)$
$½ \supset ½$
½

4. RACHUNEK FUNKCYJNY
(3, 10 i 17.01.1950)

4.1. Funkcje zdaniowe

Porównajmy następujące wyrażenia:

(1) *Słońce jest gwiazdą.*
(2) *Gerlach jest gwiazdą.*
(3) *x jest gwiazdą.*

Wyrażenia (1) i (2) są zdaniami; wyrażenie (3) jest funkcją zdaniową.

Funkcja zdaniowa jest to wyrażenie zawierające zmienną (jedną lub więcej), które nie jest prawdą ani fałszem, i które przechodzi w zdanie prawdziwe lub fałszywe w zależności od tego, co podstawimy za zmienną.

Z funkcji zdaniowej można otrzymać zdanie na drodze podstawienia — ale istnieją również inne sposoby osiągnięcia tego celu.

4.2. Kwantyfikatory

Rozważmy funkcję zdaniową:

$x + 4 = 7$

Gdybyśmy dołączyli do tej funkcji wyrażenie „dla wszelkich wartości zmiennej x", to przekształciłaby się ona fałsz — a więc w zdanie (fałszywe). Gdybyśmy zrobili to w wypadku funkcji zdaniowej:

$x + x = 2x$

to otrzymalibyśmy wyrażenie:

Dla wszelkich wartości x $(x + x = 2x)$

które jest zdaniem prawdziwym.

Wyrażenie „dla wszelkich wartości zmiennej x" — lub inaczej „dla każdego x" — to kwantyfikator ogólny (*scil.* wielki). Odpowiednio wyrażenie „dla pewnej wartości zmiennej x" — lub inaczej „dla pewnego x" bądź „istnieje takie x, że" to kwantyfikator szczegółowy (*scil.* mały). Oznacza się je symbolami kolejno: '(Πx)' lub czasami '(x)' — i '$(\exists x)$' lub czasami '$(\sum_x)$'. Mielibyśmy więc np.:

$(\Pi x)\ (x + 4 = 7)$
$(\exists x)\ (x + 4 = 7)$

Kwantyfikator ogólny jest jakby uogólnioną koniunkcją:

$(\Pi x)\ (fx) \equiv (fx_1) \cdot (fx_2) \cdot (fx_3) \cdot (fx_4) \cdot (fx_5) \ldots$

Natomiast kwantyfikator szczegółowy zastępuje uogólnioną alternatywę:

$(\exists x)\ (fx) \equiv (fx_1) \vee (fx_2) \vee (fx_3) \vee (fx_4) \vee (fx_5) \ldots$

Zmienna, do której odnosi się jakiś kwantyfikator, jest to zmienna związana (*scil.* pozorna); zmienna, do której nie odnosi się żaden kwantyfikator, jest to zmienna wolna (*scil.* rzeczywista). W funkcji zdaniowej:

$(\Pi x)\ (x > y)$

zmienna 'x' jest zmienną związaną, a zmienna 'y' — zmienną wolną.
Kwantyfikatorom można nadać interpretacje geometryczną […].

4.3. Prawa rachunku funkcyjnego

Oznaczmy symbolem 'φx' — dowolną funkcję zdaniową.

Oto przykładowe prawa rachunku funkcyjnego:

$(\Pi x)\ (\varphi x) \equiv \sim (\exists x)\ (\sim \varphi x)$ (*prawo De Morgana dla kwantyfikatorów*)
$(\exists x)\ (\varphi x) \equiv \sim (\Pi x)\ (\sim \varphi x)$ (*prawo De Morgana dla kwantyfikatorów*)
$\varphi y \supset (\exists x)\ (\varphi x)$ (*prawo generalizacji egzystencjalnej*)

Prawo to wykorzystuje się do przeprowadzania efektywnych dowodów istnienia:

$5 + y = 7 \supset (\exists x)\ (5 + x = 7)$
$5 + 2 = 7 \supset (\exists x)\ (5 + x = 7)$
$fy \supset (\exists x)\ (fx)$
$f5 \supset (\exists x)\ (fx)$

$(\Pi x)\ (\varphi x) \supset \varphi y$ (*prawo* dictum de omni)

Szczególnymi przypadkami są:

$(\Pi x)\ (fx) \supset fy$
$(\Pi x)\ (fx) \supset f5$
$\supset f1$
$\supset f48$
…

Z prawa *dictum de omni* i prawa generalizacji egzystencjalnej — otrzymujemy:

$(\Pi x)\ (\varphi x) \supset (\exists x)\ (\varphi x)$ (*prawo subalternacji*)
$[(\Pi x)\ (\varphi x \supset \psi x) \cdot (\Pi x)\ (\psi x \supset \xi x)] \supset (\Pi x)\ (\varphi x \supset \xi x)$ (*prawo sylogizmu klasycznego*)
$(\Pi x)\ ((\Pi y)\ (\varphi(xy)) \equiv (\Pi y)\ ((\Pi x)\ (\varphi(xy))$ (*prawo przestawiania kwantyfikatorów*)
$(\exists x)\ (\Pi y)\ (\varphi xy) \supset (\Pi y)\ (\exists x)\ (\varphi xy)$ (*prawo przestawiania kwantyfikatorów*)

Na podstawie tego prawa wolno przestawiać kwantyfikator szczegółowy z ogólnym. Nie wolno natomiast przestawiać kwantyfikatora ogólnego ze szczegółowym:

$(\Pi x)\ (\exists y)\ (\varphi xy) \not\supset (\exists y)\ (\Pi y)\ (\varphi xy)$

Takie niedozwolone przestawienie było źródłem paradoksu lecącej strzały. Jest prawdą, że:

Ciało C spoczywa w odstępie czasu między t_1 do t_2 ≡ istnieje takie miejsce m, że w każdej chwili t takiej, że $t_1 < t < t_2$, ciało C jest w miejscu m.

Jeżeli ciało C leci w odstępie czasu od t_1 do t_2, to w każdej chwili t takiej, że $t_1 < t < t_2$, istnieje takie miejsce m, że C jest w miejscu m w chwili t.

Z tego, że w każdej chwili t takiej, że $t_1 < t < t_2$, istnieje takie miejsce m, że ciało C jest w miejscu m w chwili t — nie wolno wyprowadzać wniosku, że istnieje takie miejsce m, że w każdej chwili t takiej, że $t_1 < t < t_2$, ciało C jest w miejscu m. Takie wnioskowanie opiera się bowiem właśnie na niedozwolonym przestawieniu:

$(\Pi t)\ (\exists m) \ldots \rightarrow (\exists m)\ (\Pi t) \ldots$

4.4. Zastosowania notacji kwantyfikatorowej

Rozważmy teraz wyrażenie:

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = g$

Możemy je określić następująco: dla każdego η dodatniego ($\eta > 0$) istnieje taka liczba naturalna n_0 ($n_0\ \varepsilon\ N$), że dla każdego n, gdzie $n > n_0$, zachodzi:

$|u_n - g| < \eta$

Za pomocą kwantyfikatorów zapiszemy to tak:

$(\Pi\eta)\{(\eta > 0) \supset (\exists n_0)\ [n_0\ \varepsilon\ N \cdot (\Pi n)\ (n > n_0 \supset |u_n - g| < \eta)]\}$

Umówmy się, że formułę postaci:

$(\Pi x)\ (\varphi x \supset fx)$

notujemy jako:

$\Pi_{\varphi x}\, fx$

a formułę:

$(\exists x)\ (fx \cdot \varphi x)$

zanotujmy:

$\exists_{fx}\ \varphi x$

Po użyciu tych skrótów zapiszemy:

$$\Pi_{\eta > 0} \exists_{n_0 \varepsilon N} \Pi_{n > n_0} |u_n - g| < \eta$$

4.5. Identyczność

Identyczność można zdefiniować następująco:

$(a = b) \equiv (\prod\varphi) [(\varphi a \supset \varphi b) \cdot (\varphi b \supset \varphi a)]$ (*gen-identyczność*)
$(a = b) \equiv (\prod\varphi) (\varphi a \equiv \varphi b)$ (*definicja identyczności według Leibniza*)

Identyczność jest stosunkiem zwrotnym i przechodnim:

$a = a$
$(a = b) \cdot (b = c) \supset (a = c)$.

5. TEORIA KLAS
(13.12, 17 i 31.01.1950[3])

5.1. Zbiór dystrybutywny i zbiór kolektywny

Rozważmy przykłady funkcji zdaniowych o postaci '$\varphi(x)$':

Złoci się x
x jest człowiekiem
$x + 4 > 16x$

Każda funkcja zdaniowa złożona z orzeczenia i podmiotu wyznacza nam swego rodzaju dwudział we wszechbycie: klasę przedmiotów, które tę funkcję spełniają, i klasę przedmiotów, które tej funkcji nie spełniają.

Klasę przedmiotów x spełniających daną funkcję oznacza się za pomocą symbolu '$(\hat{x})$'. Na przykład:

$(\hat{x})(3 < x < 12)$
$(\hat{x})(5 > x > 1)$
$(\hat{x})(2 + x = 13)$
$(\hat{x})(\varphi x = 4)$

Istnieje dystrybutywne i kolektywne rozumienie klasy.

Jeżeli chcemy poznać, czy posługujemy się pojęciem zbioru w sensie dystrybutywnym, czy w sensie kolektywnym, zastanówmy się, czy gotowi jesteśmy zgodzić się na następujące zdanie:

[3] Z 17 i 24.01.1950 — brak notatek (przyp. mój, JJJ).

zbiór x = zbiór $y \equiv$ każde x jest y i każde y jest x.

Jeśli tak — to mamy na myśli zbiór w sensie dystrybutywnym. W tym sensie zbiorem nie jest żadne ciało. Plik kartek papieru — to zbiór w sensie kolektywnym. Kiedy natomiast mówimy, że zając jest gryzoniem, lub że jest w Polsce pospolity, to chodzi nam o zbiór zajęcy w sensie dystrybutywnym. Taki sens mają także idee platońskie i uniwersalia.

Między klasami mogą zachodzić różne związki.

5.2. Związki między klasami

To, że klasa α zawiera się w klasie β, oznaczamy:

$\alpha \subset \beta$

a to, że przedmiot x jest elementem klasy α:

$x \, \varepsilon \, \alpha$

Stosunek zawierania się (*scil.* inkluzji) zachodzi, gdy spełniony jest następujący warunek:

$\alpha \subset \beta \equiv (\Pi x) \, (x \, \varepsilon \, \alpha \subset x \, \varepsilon \, \beta)$

Inkluzja jest zwrotna:

$(\Pi\alpha) \, (\alpha \subset \alpha)$

i przechodnia:

$(\alpha \subset \beta) \cdot (\beta \subset \gamma) \supset (\alpha \subset \gamma)$

Natomiast stosunek elementu do klasy nie jest stosunkiem przechodnim. Na przykład Sokrates jest elementem klasy Greków, klasa Greków jest elementem klasy narodów — ale Sokrates nie jest elementem klasy narodów.

Za pomocą pojęcia inkluzji można zdefiniować identyczność klas:

$\alpha = \beta =_{\text{def.}} (\alpha \subset \beta) \cdot (\beta \subset \alpha)$

Mówimy, że klasa α przecina się z klasą β, gdy klasy α i β mają wspólne elementy. To, że klasa α przecina się z klasą β, oznaczamy:

$\alpha \mid \beta$

Mamy więc:

$\alpha \mid \beta =_{\text{def.}} (\exists x) \, (x \, \varepsilon \, \alpha \cdot x \, \varepsilon \, \beta)$

Mówimy, że klasa α wyłącza się z klasą β, gdy klasy α i β nie mają wspólnych elementów.

5.2. Klasa pusta i klasa uniwersalna

Klasa pusta — to taka klasa, która nie posiada elementów. Klasę pustą oznacza się za pomocą symbolu ‘Λ‘. Mamy więc:

$\Lambda = (\hat{x})\ [(\exists\alpha)\,(x\ \varepsilon\ \alpha \cdot \sim x\ \varepsilon\ \alpha)]$

$\Lambda = (\hat{x})\ (\sim x = x)$

Klasa uniwersalna — to klasa, do której każdy przedmiot należy. Mamy więc:

$\mathrm{V} = (\hat{x})\,(x = x)$

Klasa pusta jest zawarta w każdej klasie. Mamy więc:

$(\Pi\alpha)\ (\Lambda \subset \alpha)$

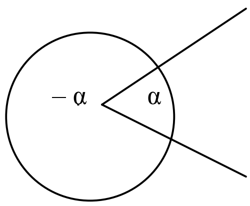
$(\Pi\alpha)\ (x\ \varepsilon\ \Lambda \supset x\ \varepsilon\ \alpha)$

5.3. Operacje na klasach

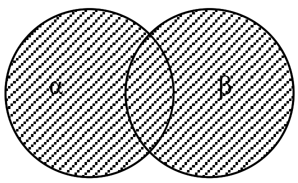
Na klasach można przeprowadzić następujące operacje: dopełniania klasy $(-\ \alpha)$, dodawania (*scil.* sumy) dwóch klas $(\alpha \cup \beta)$ i mnożenia (*scil.* iloczynu, przecięcia) dwóch klas $(\alpha \cap \beta)$.

Oto definicje rezultatów tych operacji:

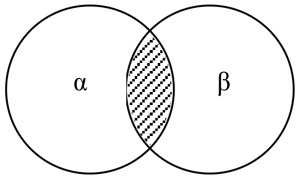
$(-\ \alpha) =_{\text{def.}} (\hat{x})\,(\sim x\ \varepsilon\ \alpha)$



$\alpha \cup \beta =_{\text{def.}} (\hat{x})\,(x\ \varepsilon\ \alpha \vee x\ \varepsilon\ \beta)$



$\alpha \cap \beta =_{\text{def.}} (\hat{x})\,(x\ \varepsilon\ \alpha \cdot x\ \varepsilon\ \beta)$



5.4. Algebra klas

Większość twierdzeń rachunku zdań daje się przełożyć na twierdzenia rachunku klas — tak, że wchodzą one w skład algebry klas. W tym celu zastępuje się symbole zdań symbolami klas, a symbole związków między zdaniami — symbolami związków między klasami. Przyporządkowania te wyglądają następująco:

— ‘$\supset$’ zamienia się na ‘$\subset$’;
— ‘$\vee$’ zamienia się na ‘$\cup$’;
— ‘$\cdot$’ zamienia się na ‘$\cap$’;
— ‘$\sim$’ zamienia się na ‘$-$’.

W ten sposób otrzymujemy np. następujące prawa algebry klas:

$p \vee \sim p$
$\alpha \cup - \alpha = \mathrm{V}$

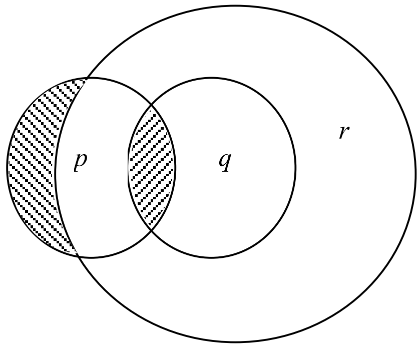
Suma jakiejś klasy i jej dopełnienia jest klasa uniwersalną.

$\sim (p \cdot \sim p)$
$-(\alpha \cap - \alpha) = \mathrm{V}.$

Dopełnienie iloczynu jakiejś klasy i jej dopełnienia jest klasą uniwersalną.

$(p \cdot q \supset r) \supset (p \cdot \sim r \supset \sim q)$
$(\alpha \cap \beta \subset \gamma) \supset (\alpha \cap - \gamma \subset -\beta)$

Jeżeli przecięcie klasy α i β zawiera się w klasie γ, to przecięcie klasy α i dopełnienia klasy γ zawiera się w dopełnieniu klasy β.



Częścią algebry klas jest logika tradycyjna — czyli sylogistyka.

6. LOGIKA TRADYCYJNA
(31.01 oraz 14 I 28.02.1950[4])

6.1. Kwadrat logiczny

Logika tradycyjna dotyczy funkcji zdaniowych o postaci:

(1) Każde *S* jest *P*.
(2) Żadne *S* nie jest *P* (*scil.* nie ma takich *S*, które by nie były *P*).
(3) (Przynajmniej) niektóre *S* są *P*.
(4) (Przynajmniej) niektóre *S* nie są *P*.

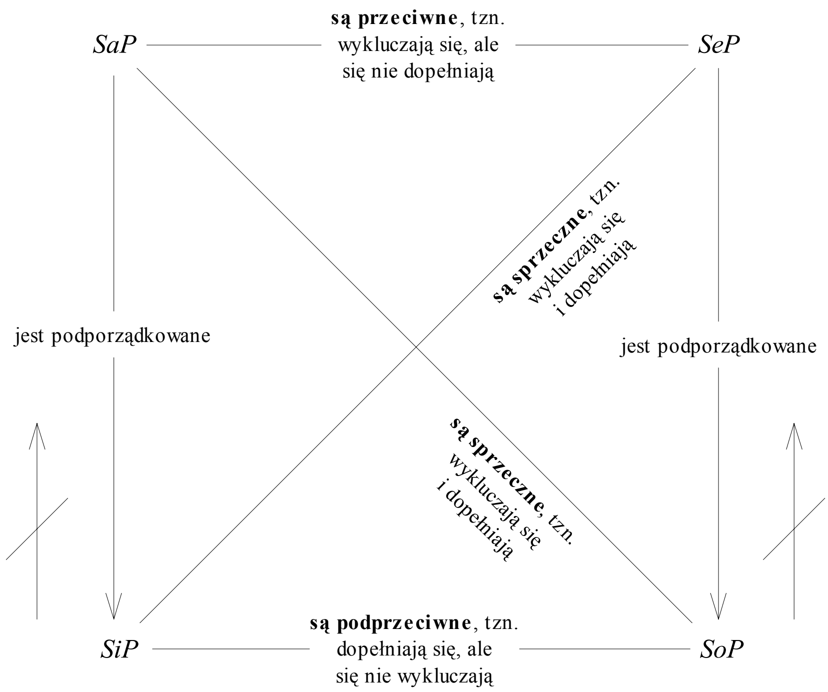
Funkcję (1) — czyli zdanie ogólnotwierdzące — zapisuje się za pomocą symbolu '*SaP*'; funkcję (2) — czyli zdanie ogólnoprzeczące — za pomocą symbolu '*SeP*'; funkcję (3) — czyli zdanie szczegółowotwierdzące — za pomocą symoblu '*SiP*'; funkcję (4) — czyli zdanie szczegółowoprzeczące — za pomocą symbolu '*SoP*'. Zdania te można zapisać w języku algebry klas w sposób następujący:

SaP: $\sim (\exists x)\ (x\ \varepsilon\ S \cdot \sim x\ \varepsilon\ P),\ S \subset P$
SeP: $\sim (\exists x)\ (x\ \varepsilon\ S \cdot x\ \varepsilon\ P),\ S \subset -P$
SiP: $(\exists x)\ (x\ \varepsilon\ S \cdot x\ \varepsilon\ P)$
SoP: $(\exists x)\ (x\ \varepsilon\ S \cdot \sim x\ \varepsilon\ P)$

O dwóch zdaniach, które nie mogą być zarazem prawdziwe, mówimy, że się wykluczają. O dwóch zdaniach, które nie mogą być zarazem fałszywe, mówimy, że się dopełniają.

[4] Z 21.02.1950 — brak notatek (przyp. mój, JJJ).

Logika tradycyjna jest oparta na milczącym założeniu, ze zbiory S i P nie są zbiorami pustymi. Przy tym założeniu — między zdaniami (1)-(4) zachodzą zależności obrazowane za pomocą kwadratu logicznego:



6.2. Konwersja

Oto przykładowe prawa kwadratu logicznego — zwane „prawami konwersji”:

$SiP \supset PiS$ (*prawo konwersji prostej dla zdań szczegółowotwierdzących*)
$PeS \supset SeP$ (*prawo konwersji prostej dla zdań ogólnoprzeczących*)

Prawa konwersji prostej dla zdań ogólnoprzeczących można dowieść dokonując transpozycji prawa konwersji prostej dla zdań szczegółowotwierdzących:

$$\sim (PiS) \supset \sim (SiP)$$

i korzystając z równoważności:

$$\sim (PiS) \equiv PeS$$
$$\sim (SiP) \equiv SeP$$

$SaP \supset PiS$ (*prawo konwersji złożonej*)

Prawa konwersji złożonej można dowieść w następujący sposób:

$$\begin{array}{l} SaP \supset SiP \\ \underline{SiP \supset PiS} \\ SaP \supset PiS \end{array}$$

Implikacja $SaP \supset SiP$ zachodzi, ponieważ wykluczamy nazwy puste.

Nie zachodzą następujące implikacje:

$SaP \supset PaS$
$SoP \supset PoS$
$SoP \supset PeS$
$SoP \supset PaS$
$SoP \supset PiS$

6.3. Sylogistyka

Sylogistyka jest teorią trybów sylogistycznych.

Tryb sylogistyczny jest to okres warunkowy formalny, którego poprzednik jest koniunkcją dwóch funkcji z kwadratu logicznego, mających dokładnie jeden termin wspólny i po dokładnie jednym terminie wspólnym z następnikiem tego okresu warunkowego. Przykładem trybu sylogistycznego jest:

$(MaP \cdot SaM) \supset (SaP)$

Termin M nazywa się „terminem średnim", termin P — „terminem większym", a termin S — „terminem mniejszym". Przesłanka zawierająca termin większy nazywa się „przesłanką większą", a przesłanka zawierająca termin mniejszy — „przesłanką mniejszą". Następnik trybu sylogistycznego nazywa się „konkluzją" lub „wnioskiem".

Każde podstawienie trybu sylogistycznego nazywa się „sylogizmem". Sylogizmem jest więc np. okres warunkowy:

Jeżeli każdy ssak jest zwierzęciem, a każdy pies jest ssakiem, to każdy pies jest zwierzęciem.

Powstał on bowiem z następującego podstawienia:

M = ssak;
P = zwierzę;
S = pies.

Zależnie od tego, jaką rolę spełnia termin średni, dzielimy tryby sylogistyczne na cztery figury (grupy).

Figura I	Figura II	Figura III	Figura IV
M a/e/i/o P	*P a/e/i/o M*	*M a/e/i/o P*	*P a/e/i/o M*
S a/e/i/o P	*S a/e/i/o M*	*M a/e/i/o S*	*M a/e/i/o S*
S a/e/i/o P	*S a/e/i/o P*	*S a/e/i/o P*	*S a/e/i/o P*

W każdej figurze mamy 64 tryby, co łącznie daje 256 trybów. Spośród nich tylko 24 są prawdziwe — po 6 w każdej figurze. Oto prawdziwe tryby figury I — wraz z ich tradycyjnymi nazwami:

MaP	*MaP*	*MeP*	*MeP*	*MaP*	*MeP*
SaM	*SaP*	*SaM*	*SaM*	*SiM*	*SiM*
SaP	*SiP*	*SeP*	*SoP*	*SiP*	*SoP*
Barbara	tryb osłabiony	*Celarnet*	tryb osłabiony	*Darii*	*Ferio*

Tryb sylogistyczny jest fałszywy, gdy dla pewnych podstawień otrzymujemy fałszywy sylogizm. Tryb *Darapti* (z figury III):

$MaP \cdot MaS \supset SiP$

jest prawdziwy przy zastrzeżeniu, że za zmienne podstawiamy wyłącznie terminy niepuste, staje się on fałszywy, gdy złamiemy to zastrzeżenie. Dokonajmy następującego podstawienia:

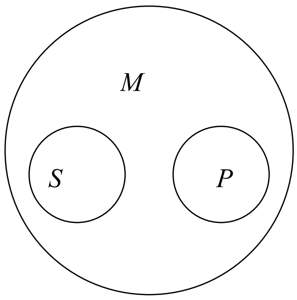
M = *Murzyn obecny na tej sali*;
P = *Murzyn*;
S = *jest obecny*.

Jeśli termin „Murzyn obecny na tej sali” jest terminem pustym, przesłanki sylogizmu są prawdziwe, a wniosek — fałszywy.

Aby udowodnić, że tryb jest fałszywy, należy znaleźć takie podstawienia, przy których poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Rozważmy tryb:

$PaM \cdot SaM \supset SiP$

i dokonajmy podstawienia:
S = *świnia*;
P = *pies*;
M = *zwierzę*.



Przy tym podstawieniu tryb przekształca się w sylogizm fałszywy.

Scholastycy podali pięć reguł, podających warunki, które muszą być spełnione, żeby tryb był prawdziwy:

(1) Obie przesłanki nie mogą być przeczące.

(2) Jeżeli jedna z przesłanek jest przecząca, to i wniosek musi być przeczący.

(3) Jeżeli obie przesłanki są twierdzące, to i wniosek musi być twierdzący.

(4) Termin średni musi być wzięty ogólnie przynajmniej w jednej przesłance.

(5) Termin, który nie jest wzięty ogólnie w przesłance, nie może być wzięty ogólnie we wniosku.

Termin jest przy tym wzięty ogólnie, gdy jest podmiotem zdania ogólnego lub orzecznikiem zdania przeczącego.

7. TEORIA RELACJI

(28.02 oraz 14 I 28.03.1950[5])

7.1. Stosunek, jego dziedzina, przeciwdziedzina i pole

Funkcja zdaniowa dwóch zmiennych wyznacza nam pewną relację czyli stosunek.

$x > y$ — stosunek większości
x *lubi* y — stosunek lubienia
$(\exists n)_{n \, \varepsilon \, N} \, (x = y + n)$

Zmienne x i y są tu zmiennymi wolnymi; symbolami relacji są '>', „lubi" itp. Na oznaczenie relacji dwuczłonowej będziemy używać symbolu:

$(\hat{x}\hat{y})(f(xy))$

Są także relacje trójczłonowe — np.:

x leży między y i z
$\log_a b = c$

Natomiast $(x = 1)$ $(y = 5)$ $(z = 9)$ $(t = 13)$ $(u = 17)$ nie jest relacją.

Ciąg również jest pewną relacją.

Dziedzina relacji — $D(R)$ — jest to klasa przedmiotów, które do czegoś pozostają w tej relacji:

$D(R) = (\hat{x})\,(\exists y)\, xRy$

W wypadku np. relacji ojcostwa dziedziną są wszyscy dzietni mężczyźni.

[5] Z 7 i 23.03.1950 — brak notatek (przyp. mój, JJ).

Przeciwdziedzina relacji — $\check{D}(R)$ — jest to klasa przedmiotów, do których coś w tej relacji pozostaje.

$\check{D}(R) = (\hat{x})\,(\exists y)\; yRx$

„Polem relacji” — $C(R)$ — nazywamy zbiór złożony z dziedziny i przeciwdziedziny, czyli sumę logiczną:

$C(R) = D(R) \cup \check{D}(R)$

„Relacją R ograniczoną lewostronnie do klasy K” — K/R — nazywamy relację spełniającą warunek:

$K/R = (\hat{x}\hat{y})\,(xRy \cdot x \,\varepsilon\, K)$

Z kolei „relacją R ograniczoną prawostronnie do klasy K” — R/K — nazywamy relację spełniającą warunek:

$R/K = (\hat{x}\hat{y})\,(xRy \cdot y \,\varepsilon\, K)$

Relacja R ograniczona do klasy K jest to relacja spełniająca warunek:

$(\hat{x}\hat{y})\,(xRy \cdot x \,\varepsilon\, K \cdot y \,\varepsilon\, K)$

7.2. Własności stosunków

Stosunek jest zwrotny (*scil.* refleksywny) w klasie K, jeżeli każdy przedmiot klasy K pozostaje do siebie w tym stosunku:

$\mathit{refl}\,(K)R \equiv (\Pi z)\,(z \,\varepsilon\, K \supset zRz)$

Stosunek jest symetryczny w klasie K, jeżeli dla wszystkich elementów klasy K jest tak, że jeśli stosunek ten zachodzi między pierwszym elementem a drugim, to zachodzi też pomiędzy drugim a pierwszym:

$\mathit{sym}\,(K)R \equiv (\Pi xy)[(z \,\varepsilon\, K \cdot y \,\varepsilon\, K) \supset (xRy \supset yRx)]$

Konwersem (odwróceniem) stosunku R jest stosunek $\check{R}$, spełniający warunek:

$x\check{R}y \equiv yRx$

Konwersem np. stosunku mniejszości w zbiorze liczb jest stosunek większości. Mamy bowiem:

$x < y \equiv y > x$

Można więc symetryczność zdefiniować następująco:

$\mathit{sym}\; R \equiv xRy \supset x\check{R}y$

Stosunek jest niesymetryczny, jeżeli z tego, że on zachodzi między x i y, nie wynika, że zachodzi w odwrotnym kierunku, ale też nie wynika, że to jest niemożliwe.

$nonsym\ R \equiv (xRy \not\supset yRx) \cdot (xRy \not\supset \sim yRx)$

Inaczej mówiąc:

$(\exists xy)\ (xRy \cdot \sim yRx) \cdot (\exists xy)\ (xRy \cdot yRx)$

Przykładem stosunku niesymetrycznego jest stosunek wynikania.

Stosunek jest asymetryczny wtedy, gdy jeśli zachodzi pomiędzy x i y, to nie może zachodzić między y i x.

$asym\ R \equiv xRy \supset \sim yRx$

Stosunek jest przechodni (*scil.* tranzytywny), gdy spełniony jest warunek:

$trans\ R \equiv (xRy \cdot yRz) \supset (xRz)$

Istnieją stosunki nieprzechodnie, aprzechodnie i przeciwprzechodnie.

7.3. Iloczyn względny stosunków i kwadrat stosunku

Iloczyn względny stosunków R i S — $R;S$ — jest to stosunek spełniający warunek:

$xR;Sy \equiv (\exists z)\ (xRz \cdot zSy)$

Na przykład stosunek szwagrostwa jest iloczynem względnym stosunku małżeństwa i bratostwa.

Kwadrat stosunku R — R^2 — jest iloczynem stosunku i jego samego:

$R^2 = R;R.$

Na przykład dziadek jest iloczynem ojcostwa, a wnuk — synostwa.

7.4. Stosunek jednoznaczny

Stosunek jest jednoznaczny — $R\ \varepsilon\ 1 \rightarrow cls$ — gdy spełniony jest warunek:

$R\ \varepsilon\ 1 \rightarrow cls =_{\text{def.}} (\Pi xyz)\ (xRz \cdot yRz \supset x = y)$

Relacjami jednoznacznymi są funkcje.

Relację nazywa się „odwrotnie jednoznaczną" — $R\ \varepsilon\ cls \rightarrow 1$ — gdy:

$R\ \varepsilon\ cls \rightarrow 1 =_{\text{def.}} (\Pi xyz)\ (zRx \cdot zRy \supset x = y)$

Relacja wzajemnie jednoznaczna — $R\ \varepsilon\ 1 \rightarrow 1$ — spełnia warunek:

$R \ \varepsilon \ 1 \rightarrow 1 =_{\text{def.}} R \ \varepsilon \ cls \rightarrow 1 \cdot R \ \varepsilon \ 1 \rightarrow cls$

Relacja R odwzorowuje jednoznacznie zbiór X na zbiorze Y, gdy do każdego elementu zbioru Y coś ze zbioru X w tej relacji pozostaje.

$X \sim_R Y =_{\text{def.}} (R \ \varepsilon \ 1 \rightarrow 1) \cdot [Y \subset \check{D}(R)] \cdot [X = R(Y)]$

gdzie $R(Y) = (\hat{x})[(\exists y)((y \in Y) \cdot (xRy))]$.

7.5. Liczby

Zbiory mają wiele cech. Jedną z nich jest liczebność (*scil.* liczba, moc) czyli — inaczej — liczba kardynalna. Liczbę kardynalną klasy α oznacza się za pomocą symbolu: $N_c\alpha$.

Dwa zbiory są liczebnie równe — $X \sim Y$ — jeżeli istnieje relacja wzajemnie jednoznaczna R, której dziedziną jest jeden z tych zbiorów, a przeciwdziedziną — drugi:

$X \sim Y =_{\text{def.}} (\exists R)\ (X \sim_R Y)$

Liczba kardynalna zbioru α jest to klasa zbiorów równej mocy co zbiór α:

$N_c\alpha =_{\text{def.}} (\hat{\beta})\ (\beta \sim \alpha)$

$\aleph \ \varepsilon \ N_c =_{\text{def.}} (\exists \alpha)(\aleph \ \varepsilon \ N_c\alpha)$

Liczby kardynalne mogą być skończone i nieskończone.

Zdefiniowane „liczby naturalnej” wymaga (1) zdefiniowania „zera” i (2) wprowadzenia pojęcia następnika.

Zdefiniujmy „zero” jako N_c zbioru pustego:

$0 =_{\text{def.}} N_c\Lambda$

Przyjmijmy następujące konwencje:

Jeżeli $\aleph = N_c\alpha$, to $\aleph^*$ jest N_c zbioru o jeden bogatszego od α.

Niech $i(x)$ będzie klasą, której jedynym elementem jest x:

$i(x) = (\hat{y})(y = x)$

Mamy teraz:

ק $= \aleph^* =_{\text{def.}} (\exists \alpha)\{\aleph \ \varepsilon \ N_c\alpha \cdot \sim x \ \varepsilon \ \alpha \cdot [$ק $= N_c(\alpha \cup i(x))]\}$

$1 =_{\text{def.}} 0^* \quad 2 =_{\text{def.}} 1^* \quad 3 =_{\text{def.}} 2^*$

Pojęcie liczby naturalnej sprecyzował Gottlob Frege.

Wprowadźmy pojęcie cechy dziedzicznej.

$Herr_{*}W =_{\text{def.}}$ א ε $N_c \cdot W$(א) $\supset W$(א*)

Liczba naturalna jest to liczba, która posiada każdą własność dziedziną liczby zero.
Liczba x jest liczbą naturalną $=_.$ א ε N_c *inductivus* $\equiv (\Pi W)\ (Herr_{*}W \supset W(x))$
0, 1, 2, 3, … 25, 26, 27, …

Aksjomatykę teorii liczb naturalnych (*scil.* arytmetyki) podał Giuseppe Peano.

Oto aksjomatyka arytmetyki:

(1) Zero jest liczbą naturalną.

0 ε N_c *inductivus*

(2) Następnik liczby naturalnej jest liczbą naturalną.

ℵ ε N_c *inductivus* ⊃ ℵ* ε N_c *inductivus*

(3) Zero nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.

0 ≠ א*

(4) Jeżeli następniki dwóch liczb naturalnych są sobie równe, to te liczby są sobie równe.

(א* = ק*) ⊃ (א = ק)

(5) Zasada indukcji matematycznej:

$W(0) \cdot Herr_{*}\ W \supset$ (Πא) (א ε N_c *inductivus* ⊃ W(א))

8. TEORIA WNIOSKOWANIA
(28.03, 4 I 18.04 oraz 2.05.1950[6])

8.1. Wnioskowanie dedukcyjne i wnioskowanie redukcyjne

Wnioskowanie jest to proces psychiczny, na podstawie którego dochodzi się do nowych przekonań.

Oto przykłady wnioskowań:

Drzewo jest gatunkowo lżejsze od wody. Drzewo nie tonie w wodzie. Zatem: Każde ciało gatunkowo lżejsze od wody nie tonie w wodzie.

Czy 137 jest podzielne przez 3? Tylko liczby o sumie cyfr podzielnej przez 3 są podzielne przez 3. Suma cyfr liczby 137 nie jest podzielna przez 3. Zatem: 137 nie jest podzielne przez 3.

[6] Z 11 i 25.04 oraz 9 i 16.05.1950 — brak notatek (przyp. mój, JJJ).

Wypowiedzi, w których wyraża się wnioskowanie — to wypowiedzi inferencyjne, które mają strukturę: „Ponieważ…, zatem…”. Po słowie „ponieważ” umieszcza się przesłanki, a po słowie „zatem” — wniosek. Wypowiedź inferencyjna jest różna od okresu warunkowego, który ma strukturę: „Jeżeli…, to…”.

Tradycyjnie dzieli się wnioskowania na dedukcyjne (stosowane w matematyce) i indukcyjne. Wnioskowaniami dedukcyjnymi miałyby być takie wnioskowania, których wniosek jest szczegółowym stwierdzeniem; w skrócie — wnioskowania od ogółu do szczegółu. Natomiast wnioskowaniami indukcyjnymi miałyby być wnioskowania od szczegółu do ogółu.

Tradycyjne określenie wnioskowania dedukcyjnego (i odpowiednio — indukcyjnego) zostało jednak zarzucone. Obecnie za wnioskowanie dedukcyjne uważa się takie wnioskowanie, z którego przesłanek wniosek wynika logicznie.

Wynikanie logiczne należy odróżniać od wynikania materialnego. Ze zdania A wynika materialnie zdanie B, gdy prawdą jest okres warunkowy o poprzedniku A i następniku B. Zgodnie z tabelką implikacji — z fałszu wynika materialnie wszystko.

Ze zdania A wynika logicznie zdanie B — tzn. istnieje takie prawo logiki formalnej, z którego przez podstawienie można otrzymać okres warunkowy mający za następnik B, a poprzednik A. Inaczej mówiąc — z A wynika logicznie B, gdy okres warunkowy „Jeżeli A, to B” jest szczególnym przypadkiem jakiegoś prawa logiki formalnej.

Na przykład — z tego, że niektóre ssaki są zwierzętami jajorodnymi, wynika logicznie, że niektóre zwierzęta jajorodne są ssakami, gdyż jest to podstawienie następującego prawa kwadratu logicznego:

$$SiP \supset PiS$$

Rozważmy wnioskowanie, w którym z tego, że drzewo jest gatunkowo lżejsze od wody, wnioskuje się, że drzewo nie tonie w wodzie. Jest to przypadek entymematycznego wnioskowania dedukcyjnego. Wnioskując dedukcyjnie z przesłanki A wniosek B, wnioskujemy entymematycznie, jeżeli z przesłanki A wniosek B wynika logicznie dopiero po wzbogaceniu jej przez dodatkową przesłankę C — a więc z uwagi na posiadaną przeze mnie wiedzę. Mamy więc:

$$A \underset{\text{ent.}, C}{\rightarrow} B \equiv A \underset{\text{log.}}{\not\rightarrow} B \cdot (A \cdot C \underset{\text{log.}}{\rightarrow} B)$$

Wnioskowanie dedukcyjne jest niezawodne, gdyż przesłanki są w nim racją wniosku: jeśli punkt wyjścia wnioskowania jest prawdziwy, to nie prowadzi ono do fałszywych wniosków.

Wnioskowanie redukcyjne — to takie wnioskowanie, w którym wnioskuje się z następstwa o racji. Z tego, że ulica jest mokra, wnioskuje się np., że padał deszcz — a z tego, że kartki książki są rozcięte, wnioskuje się, że książka była czytana. We wnioskowaniu redukcyjnym ma swoje źródło hipoteza atomistyczna Johna Daltona, oparta na wynikającym z niej — i potwierdzonym doświadczalnie przez Daltona —

prawie stosunków stałych wielokrotnych. Wnioskuje redukcyjnie także ktoś, kto z zachodzenia empirycznie stwierdzonego procesu elektrolizy w jakimś roztworze wnioskuje o zachodzeniu w tym roztworze procesu dysocjacji, gdyż to właśnie dysocjacja pociąga elektrolizę.

Wnioskowanie redukcyjne nie jest wnioskowaniem niezawodnym, gdyż wniosek jest w nim racją przesłanki — a nie, jak w wypadku wnioskowania dedukcyjnego, na odwrót.

Wnioskowanie redukcyjne może być — podobnie jak wnioskowanie dedukcyjne — wnioskowaniem entymematycznym. Wnioskuje tak ktoś, kto z tego, że księżyc ma krzywą promieniowania *A*, wnioskuje, że księżyc jest ciałem sproszkowanym. Pomija przy tym przesłankę głoszącą, że sproszkowane ciała mają krzywą promieniowania *A*.

Wnioskowanie po wzbogaceniu miałoby postać:

(1) Sproszkowane ciała mają krzywą promieniowania A.
(2) Księżyc ma krzywą promieniowania A.

---

(3) Księżyc jest ciałem sproszkowanym.

Przebiegałoby ono według schematu:

$$\frac{\begin{array}{l} SaP \\ \alpha \, \varepsilon \, P \end{array}}{\alpha \, \varepsilon \, S}$$

Jest to entymematyczne wnioskowanie redukcyjne, gdyż:

$(1) \cdot (2) \not\rightarrow (3)$
$(1) \cdot (3) \rightarrow (2)$
$(3) \rightarrow (2)$

8.3. Prawdopodobieństwo

Wnioskując z następstwa o racji — czyli wnioskując redukcyjnie, możemy wychodząc z prawdy dojść do fałszu; niemniej jednak często jest duże prawdopodobieństwo, że nasz wniosek będzie prawdziwy.

Według Pierre'a Laplace'a — twórcy teorii prawdopodobieństwa — prawdopodobieństwo jest miarą stopnia pewności, ale żadne zdanie wzięte absolutnie (*scil.* w oderwaniu od innych zdań) nie posiada żadnego prawdopodobieństwa. Można jedynie mówić o prawdopodobieństwie jednego zdania (np. zdania o rzucie kostką „Wyrzucę szóstkę") — ze względu na inne zdanie (np. zdanie stwierdzające, że kostka jest sześcienna, a więc wyrzucę bądź jedynkę, bądź dwójkę, bądź trójkę, bądź czwórkę, bądź piątkę, bądź szóstkę).

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

m — liczba określonych przez zdanie B wypadków, spośród których jeden na pewno zajdzie:

$$a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \ldots a_m$$

n — liczba wypadków, przy których zajdzie A (np. zrealizuje się prognoza, że wyrzucę szóstkę);

${}^{A}\!/_{B}$ — prawdopodobieństwo zdania A ze względu na zdanie B.

Otóż:

$$ {}^{A}\!/_{B} = \frac{n}{m} $$

gdy na podstawie B można stwierdzić na pewno, że zajdzie jeden spośród m wypadków wzajemnie się wykluczających lub wzajemnie możliwych, a wśród tych w n wypadkach jest taki, który zrealizuje A.

Pomiędzy zdaniem A a zdaniem B mogą zachodzić różne relacje.

[1] Załóżmy najpierw, że ze zdania B („x jest B”) wynika zdanie A („x jest A”):

$$\underset{\text{wynikanie}}{B \rightarrow A}$$

Prawdopodobieństwo z racji (B) o następstwie (A) wynosi 1:

$$ {}^{A}\!/_{B} = 1 $$

Załóżmy teraz, że ze zdania B wynika $\sim A$.

$$\underset{\text{wynikanie}}{B \rightarrow \sim A}$$

Wtedy prawdopodobieństwo zdania A ze względu na zdanie B wynosi 0:

$$ {}^{A}\!/_{B} = \frac{0}{m} = 0 $$

[2] Rozważmy teraz prawdopodobieństwo alternatywy zdań, $A \vee B$, ze względu na zdanie C.

$$ {}^{A \vee B}\!/_{C} = \frac{\alpha + \beta - \delta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} = {}^{A}\!/_{C} + {}^{B}\!/_{C} - {}^{A \cdot B}\!/_{C} $$

gdzie:

$$C \longrightarrow \gamma$$
$$A \longrightarrow \alpha$$
$$B \longrightarrow \beta$$
$$A \cdot B \longrightarrow \delta$$

[3] Prawdopodobieństwo koniunkcji zdań, $A \cdot B$, ze względu na zdanie C:

$$A \cdot B/C = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = B/C \cdot A \cdot A/C$$

gdzie:

$$C \longrightarrow \gamma$$
$$C \cdot A \longrightarrow \alpha$$
$$C \cdot A \cdot B \longrightarrow \beta$$

Mamy również:

$$A \cdot B/C = B \cdot A/C$$

[4] Prawdopodobieństwo zdania B ze względu na koniunkcję zdań, $A \cdot C$. Ponieważ:

$$B/A \cdot C \cdot A/C = A/B \cdot C \cdot B/C$$

zatem:

$$B/A \cdot C = \left(A/B \cdot C \cdot B/C\right) : A/C$$

[5] Prawdopodobieństwo wniosku redukcyjnego.
Przyjmijmy, że:

A — następstwo stanowiące przesłankę redukcyjną;
B — wniosek redukcyjny będący racją dla A entymematyczną z uwagi na B;
C — wiedza.

Mamy więc:

$$\underset{\text{wynikanie}}{B \cdot C \rightarrow A}$$

Wówczas:

$$B/A \cdot C = \frac{B/C}{A/C}$$

Wniosek (rozważanego) wnioskowania redukcyjnego wzmaga swoje prawdopodobieństwo zawsze i tylko, gdy zachodzą:

(1) $B/C \neq 0$

(2) ${}^{A}\!/_{C} < 1$

8.4. Sprawdzanie hipotez przez wnioskowanie redukcyjne

Przypuśćmy, że mamy wyjaśnić, dlaczego drzewo pływa po wodzie. Przyjmujemy na próbę hipotezę (której nie potrafimy wyjaśnić):

Drzewo jest lżejsze od wody.
Ciała lżejsze od wody pływają po wodzie.

Inny przykład: zgasło światło. Dlaczego? Przypuszczamy, że przepalił się bezpiecznik.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
C — wiedza dotychczas posiadana;
A — hipoteza uprawdopodobniona przez dotychczas posiadaną wiedzę;
B — nowy fakt, przewidziany przez hipotezę A na gruncie wiedzy C.

Jeżeli B daje się wyjaśnić na podstawie A w oparciu o C:

$$A \cdot C \rightarrow B$$

to prawdopodobieństwo B z uwagi na $A \cdot C$ wynosi:

$${}^{B}\!/_{A \cdot C} = 1\,.$$

Mamy:

$${}^{A \cdot B}\!/_{C} = {}^{A}\!/_{B \cdot C} \cdot {}^{B}\!/_{C} = {}^{B}\!/_{A \cdot C} \cdot {}^{A}\!/_{C}$$

$${}^{A}\!/_{B \cdot C} = \frac{{}^{B}\!/_{A \cdot C} \cdot {}^{A}\!/_{C}}{{}^{B}\!/_{C}}$$

$${}^{A}\!/_{B \cdot C} = \frac{{}^{A}\!/_{C}}{{}^{B}\!/_{C}}$$

gdzie:

${}^{A}\!/_{B \cdot C}$ — prawdopodobieństwo hipotezy po sprawdzeniu jej na jakimś nowym fakcie B (po ziszczeniu się faktu przez nią przewidzianego, a nie dającego się przewidzieć na gruncie wiedzy C bez hipotezy A);

$^{A}\!/_{C}$ — prawdopodobieństwo hipotezy *A* przed ziszczeniem się prognozy *B*;

$^{B}\!/_{C}$ — prawdopodobieństwo początkowe prognozy *B* (bez względu na *A*).

Powstaje pytanie, pod jakim warunkiem ziszczenie się pewnej prognozy, wypływającej z pewnej hipotezy, zwiększa prawdopodobieństwo.

Jest tak zawsze i tylko, gdy:

(1) $^{B}\!/_{C} < 1$.

(2) $^{A}\!/_{C} \neq 0$.

Są to warunki konieczne i wystarczające na to, aby zwiększyło się prawdopodobieństwo.

Mamy:

$$^{A}\!/_{B_1 \cdot B_2 \cdot C} = \frac{^{A}\!/_{C}}{^{B_1 \cdot B_2}\!/_{C}} = \frac{^{A}\!/_{C}}{^{B_2}\!/_{B_1 \cdot C} \cdot {}^{B_1}\!/_{C}} = \frac{^{A}\!/_{B_1 \cdot C}}{^{B_2}\!/_{B_1 \cdot C}}$$

Zapytajmy, czy liczba prognoz wpływa na wysokość prawdopodobieństwa.

$$^{A}\!/_{B_1 \cdot C} = \frac{^{A}\!/_{C}}{^{B_1}\!/_{C}}$$

$$^{B_2}\!/_{B_1 \cdot C} < 1$$

$$B_1 \cdot C \not\rightarrow B_2$$

Prawdopodobieństwo hipotezy wzrasta w miarę wzrostu liczby ziszczających się jej przepowiedni pod warunkiem, że te przepowiednie są od siebie niezależne.

8.5. Indukcja niezupełna

Są trzy rodzaje indukcji: indukcja niezupełna (generalizacyjna), indukcja zupełna i indukcja matematyczna.

Indukcja niezupełna przebiega według schematu:

$a_S \; \varepsilon \; P$
$b_S \; \varepsilon \; P$
$c_S \; \varepsilon \; P$

………

$n_S \, \varepsilon \, P$

Każde *S* jest *P*.

Na podstawie indukcji niezupełnej przyjmuje się np. twierdzenie, że każdej wiosny drzewa otrzymują nowe liście.

We wnioskowaniu na podstawie indukcji zupełnej uwikłana jest przesłanka, że przedmioty *a*, *b*, *c*, … *n* są *S*; przesłanka ta należy do naszej wiedzy. John Stuart Mill (XIX w.) dokonał następującej parafrazy założenia indukcyjnego:

Dla każdej grupy faktów, polegających na tym, że każdy przedmiot na własność $\mathcal{W}$, istnieje pewne ogólne prawo, którego każdy z tych faktów jest szczególnym przypadkiem.

a jest $\mathcal{W}$.	$a_{S_1, S_2, \dots S_n, R_1, R_2, \dots R_i, \dots}$
b jest $\mathcal{W}$.	$b_{S_1, S_2, \dots S_n, T_1, T_2, \dots T_j, \dots}$
c jest $\mathcal{W}$.	$c_{S_1, S_2, \dots S_n, U_1, U_2, \dots U_k, \dots}$

Każde S_1 jest $\mathcal{W}$.

Każde S_2 jest $\mathcal{W}$.

…

Każde S_n jest $\mathcal{W}$.

Indukcja niezupełna jest wnioskowaniem zawodnym. Jest to bowiem odmiana wnioskowania redukcyjnego (z następstw o racji). Wniosek jest tym bardziej prawdopodobny, im większa jest liczba różnorodnych sprawdzonych przesłanek, na której się opiera. Prawdopodobieństwo nie zależy więc od liczby przypadków sprawdzających, lecz od doboru przypadków.

Teoria Milla, który podjął problemat Davida Hume'a (XVIII w.), sprowadza się do wykrycia skutku albo przyczyny zjawiska. Zgodnie z zasadą przyczynowości:

Każde zjawisko posiada swoją przyczynę.

Zgodnie ze zdroworozsądkowym rozumieniem „przyczyny":

Zjawisko A jest przyczyną zjawiska B, gdy A swoim działaniem sprawiło, że zaszło B.

Jak to jednak poznać?

Mill odrzucił antropomorficzne rozumienie „przyczyny" i zredukował związek przyczynowy do związku stałego następstwa zdarzeń — odwołując się do zasady jednostajnego biegu przyrody. W tym ujęciu:

Zdarzenie A jest przyczyną zdarzenia B, jeżeli po zdarzeniu A stale następuje zdarzenie B.

Prawomocność zasady jednostajnego biegu przyrody jest przedmiotem sporu determinizmu i indeterminizmu. Pojęcie przyczyny jest rugowane z teorii przyrodniczych.

8.6. Indukcja zupełna i indukcja matematyczna

Indukcja zupełna przebiega według schematu:

a ε P
b ε P
…..
n ε P
Każde S jest bądź a, bądź b, bądź…, bądź n.

Każde S jest P.

Indukcja zupełna jest wnioskowaniem niezawodnym.

Indukcja matematyczna przebiega następująco:

Mamy udowodnić twierdzenie, że suma n kolejnych liczb nieparzystych poczynając od 1 równa się n^2:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Nazwijmy to twierdzenie formułą '$f(n)$'.
Dowodzimy formuły '$f(n)$' wykazując, że:

(1) formuła '$f(n)$' jest prawdziwa dla 1;

(2) jeżeli formuła '$f(n)$' jest prawdziwa dla jakiejś liczby naturalnej to jest prawdziwa także dla następnej liczby naturalnej (to zachodzi na podstawie piątego aksjomatu Peana).

Wnioskowanie ma więc postać:

$f(1)$
$f(k) \supset f(k+1)$

$(\Pi n)\, f(n)$

Indukcja matematyczna jest wnioskowaniem niezawodnym.

9. KLASYFIKACJA NAUK
(23 I 30.05 oraz 6.06.1950)

9.1. Nauki dedukcyjne

Nauka — to system (*resp.* zbiór) twierdzeń. Nauki dzielimy na dedukcyjne i indukcyjne. Nauki dedukcyjne — to nauki uprawiane przy stosowaniu metody dedukcyjnej. Do nauk dedukcyjnych należą nauki matematyczne z logiką formalną.

Zbiór zdań Z jest systemem dedukcyjnym ze względu na założenia A, tzn. że każde ze zdań ze zbioru Z albo jest jednym z założeń A, albo jest wyprowadzone na drodze dedukcji logicznej ze zdań A.

Rozważmy zbiór zdań:

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \ldots b_n$

Jeżeli zdania $b_1, b_2, \ldots b_n$ są wyprowadzone ze zdań a_1, a_2, a_3, to wówczas tworzą one system dedukcyjny.

Systemy dedukcyjne mogą przyjmować rozmaitą postać (*scil.* stadium) z uwagi na to, w jaki sposób dobiera się w nich założenia. Może to więc być stadium przedaksjomatyczne, zaksjomatyzowane i sformalizowane.

(1) Stadium przedaksjomatyczne

W tym stadium przyjmujemy jako założenia twierdzenia oczywiste — a nieoczywiste tylko po dedukcyjnych wyprowadzeniu ich z twierdzeń oczywistych. Liczba założeń — czyli twierdzeń bez dowodu — nie jest nigdy w takim stadium zamknięta.

(2) Stadium zaksjomatyzowane.

W tym stadium na czele systemu wymienia się szereg zdań, które przyjmuje się jako założenia — bez dowodu. Lista takich zdań jest zamknięta. Oprócz nich nie wolno dołączać do systemu żadnego zdania, jeżeli się go nie wyprowadzi z przyjętych założeń.

Pierwszym uczonym, który skonstruował system aksjomatyczny, był Euklides, który w IV wieku przed Chrystusem zaksjomatyzował geometrię.

(3) Stadium formalizacji.

Impulsem do sformalizowania teorii aksjomatycznej bywa wykrycie paradoksu. Zdarzało się tak w historii teorii mnogości.

Przykładem jest paradoks zbioru wszystkich zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Oznaczmy ten zbiór za pomocą symbolu '*Nwl*'.

$\varphi \, \varepsilon \, Nwl \equiv_{\text{def.}} \sim (\varphi \, \varepsilon \, \varphi)$

Z definicji dostajemy zarówno:

$\varphi \, \varepsilon \, Nwl \supset_{.} \sim (\varphi \, \varepsilon \, \varphi)$

jak i:

$\sim (\varphi \,\varepsilon\, \varphi) \supset \varphi \,\varepsilon\, Nwl$

Tak więc:

$Nwl \,\varepsilon\, Nwl \supset \sim (Nwl \,\varepsilon\, Nwl)$

skąd na mocy prawa:

$(p \supset \sim p) \supset \sim p$

wnosimy, iż:

$\sim (Nwl \,\varepsilon\, Nwl)$

Jednocześnie mamy:

$\sim (Nwl \,\varepsilon\, Nwl) \supset Nwl \,\varepsilon\, Nwl$

a ponieważ zachodzi:

$(\sim p \supset p) \supset p$

to dostajemy też:

$Nwl \,\varepsilon\, Nwl$

czyli sprzeczność.

Prawem rachunku zdań jest:

$p \supset (\sim p \supset q)$

czyli dla dowolnego zdania A zachodzi:

$A \supset (\sim A \supset q)$

Kładąc:

$A = Nwl \,\varepsilon\, Nwl$

wnosimy stąd, że można udowodnić dowolne zdanie q.

W teorii sformalizowanej są podane naczelne założenia, z których wolno korzystać, jak również są podany wzory na sposoby dowodzenia.

Efektywnej formalizacji poddano tylko niektóre gałęzie: logikę formalną i część algebry.

9.2. Sformalizowany system rachunku zdań

Sformalizowany system rachunku zdań jest systemem aksjomatycznym, którego twierdzeniami są twierdzenia rachunku zdań.

Oto aksjomaty podane przez Jana Łukasiewicza:

0·1 $(p \supset q) \supset \{(q \supset r) \supset (p \supset r)\}$ (*prawo sylogizmu hipotetycznego*)
0·2 $(\sim p \supset p) \supset p$ (*prawo Claviusa*)
0·3 $p \supset (\sim p \supset q)$ (*prawo Dunsa Szkota*)

Przyjmuje się następujące reguły (*scil.* dyrektywy) dowodzenia (*scil.* reguły wnioskowania): regułę odrywania i regułę podstawiania.

(1) Reguła odrywania:
Gdy uznany jest jakiś okres warunkowy i uznany jest poprzednik tego okresu warunkowego, to wolno uznać następnik tego okresu warunkowego:

$A \supset B, A \rightarrow B$

(2) Reguła podstawiania:
Gdy uznane jest jakieś zdanie zawierające zmienne rzeczywiste, to wolno uznać każde zdanie powstające z niego przez zastąpienie jednej lub więcej zmiennych przez dowolne wyrażenie sensowne, byleby za zmienne równokształtne podstawić zawsze to samo wyrażenie.

Wyrażenie sensowne — to wyrażenie, które jest dopuszczalną wartością zmiennych w danym systemie. Reguły sensu w aksjomatycznym systemie rachunku zdań określają, że wyrażenie jest w tym systemie sensowne, gdy jest (1^0) prostą literą; (2^0) wyrażeniem zbudowanym ze znaku negacji i następującego po nim dowolnego wyrażenia sensownego lub (3^0) wyrażeniem zbudowanym z dwóch wyrażeń sensownych połączonych znakiem implikacji.

Powyższa definicja „wyrażenia sensownego” jest definicją ancestralną. (Za pomocą takiej definicji definiuje się m.in.. wyrażenia typu „ród Piastów”).

Przykładem wyrażenia sensownego jest np. wyrażenie: ‘$\sim \sim \sim (p \supset \sim q)$’.

Oto przykładowy dowód:
1·1 $p \supset p$ (*prawo tożsamości*)
1·2 $[p \supset (\sim p \supset q)] \supset \{[(\sim p \supset q) \supset p] \supset (p \supset p)\}$
[0·1, $q/\sim p \supset q$, r/p]
1·3 $[(\sim p \supset q) \supset p] \supset (p \supset p)$
[1·2, 0·3]
1·4 $[(\sim p \supset p) \supset p] \supset (p \supset p)$
[1·3, q/p]
1·1 $p \supset p$
[1·4, 0·2]

Rachunek zdań jest systemem sformalizowanym strukturalnym, tzn. w regułach wnioskowania apeluje się tylko do struktury (wyglądu zewnętrznego) rozpatrywanych formuł.

Niektóre systemy dedukcyjne są nadbudowane nad innymi systemami — czyli je zakładają; np. geometria zakłada arytmetykę. Logika matematyczna jest podstawowym systemem dedukcyjnym, tj. wszystkie inne systemy dedukcyjne są nad nią nadbudowane.

W systemach dedukcyjnych mamy do czynienia z hierarchią terminów. Wśród wyrażeń wyodrębnia się wyrażenia zmienne i wyrażenia stałe, a wśród tych ostatnich — stałe występujące w aksjomatach i stałe występujące w twierdzeniach nie będących aksjomatami. Stałe występujące w aksjomatach — to terminy pierwotne (specyficzne lub przejęte z innych systemów); stałe nie występujące w aksjomatach — to terminy pochodne. Terminy pochodne muszą być sprowadzalne do terminów pierwotnych za pomocą odpowiednich definicji.

9.3. Nauki indukcyjne

Do nauk indukcyjnych należą nauki przyrodnicze i humanistyczne. W naukach tych występują trzy warstwy twierdzeń.

(1) Twierdzenia bezpośrednio oparte na doświadczeniu (*resp.* obserwacji).

Należy pamiętać, że obserwacja — to nie to samo, co spostrzeżenie. Obserwacja polega na dokonaniu spostrzeżenia w celu znalezienia odpowiedzi na jakieś pytanie.

Twierdzenia obserwacyjne mogą być jakościowe lub ilościowe. Podstawową obserwacją ilościową jest pomiar. Twierdzenia uzyskane z obserwacji są na ogół twierdzeniami jednostkowymi.

(2) Prawa rejestrujące.

Prawo rejestrujące jest to twierdzenie ogólne lub statystyczne wyprowadzone z twierdzeń jednostkowych, zdobytych na drodze obserwacji. Podobnie jak twierdzenia obserwacyjne — prawa rejestrujące mogą być jakościowe (bardziej ogólnikowe) lub ilościowe. Przykładem rejestrujących praw ilościowych są prawa opisujące ruchy planet, sformułowane przez Johannesa Keplera. Rejestrującym prawem ilościowym jest też prawo załamania światła w wodzie, zgodnie z którym współczynnik załamania wynosi 1,31:

$\sin\alpha / \sin\beta = 1{,}31$

(3) Hipotezy.

Hipoteza jest twierdzeniem, które nie jest oparte na doświadczeniu, ani nie jest prawem rejestrującym, ale zostało przyjęte w celu wyjaśnienia pewnej grupy faktów, których nie można było wyjaśnić przy pomocy twierdzeń dotychczas w danej nauce odkrytych. Wyjaśnić zaś to a to — to tyle, co dać odpowiedź na pytanie, dlaczego to a to zachodzi.

H + Wiedza
_________/
↓ wyjaśnia (wnioskowanie redukcyjne)
(*f f f*)

Sprawdzanie hipotezy polega na wyprowadzeniu dedukcyjnym następstw, które mogą zostać stwierdzone przy pomocy doświadczenia. Zachodzi tu z reguły wnioskowanie entymematyczne. W przeciwieństwie do twierdzeń matematycznych — hipotezy nie są nigdy w sposób ostateczny sprawdzone, gdyż sprawdzenie jest zawsze zrelatywizowane do posiadanej wiedzy.

Eksperyment rozstrzygający między konkurującymi hipotezami nosi nazwę *experimentum crucis*.

Teorie w naukach indukcyjnych — to hipotezy względnie grupy hipotez, umożliwiające wyjaśnienie faktów stwierdzanych w danej nauce. Taki charakter ma np. kinetyczna teoria gazów.

Zarówno poszczególne hipotezy, jak i grupy hipotez podlegają rewizji.

9.4. Inne klasyfikacje nauk

Każda klasyfikacja dokonywana jest według jakiejś zasady. Na przykład podział nauk na nauki dedukcyjne i indukcyjne dokonany jest wedle stosowanego w nich sposobu wnioskowania.

W obrębie nauk indukcyjnych przeprowadza się dalsze podziały — np. wedle przedmiotu badań.

Od Arystotelesa pochodzi podział nauk na teoretyczne (matematyka, fizyka i filozofia pierwsza) i praktyczne (polityka, etyka, retoryka i sztuka prowadzenia wojen) — albo inaczej: czyste i stosowane.

W tym wypadku zasadą podziału jest cel ich uprawiania. Naukami teoretycznymi miałyby być te nauki, których celem (według określenia samego Arystotelesa) jest dociekanie prawdy — a naukami praktycznymi te, których celem jest praktyczne zastosowanie wiedzy zdobytej w naukach teoretycznych. Wiele ważnych myśli o naukach praktycznych zawarł w swoich rozważaniach na temat nauki Francis Bacon.