Filozofia Nauki
Rok XVI, 2008, Nr 3-4(63-64)

Cezary Cieśliński

Dyskwotacyjna koncepcja prawdy i problem generalizacji

1. DYSKWOTACYJNA TEORIA PRAWDY

Celem artykułu jest omówienie podstawowej trudności, na jaką natrafia tzw. dyskwotacyjna teoria prawdy — koncepcja często omawiana we współczesnych filozoficznych debatach. W zwięzłym sformułowaniu, trudność polega na tym, że dyskwotacyjna teoria wydaje się za słaba, aby w jej ramach można było dowieść wielu ważnych uogólnień, angażujących pojęcie prawdy. Rozpocznę jednak nie od charakterystyki trudności, lecz od zwięzłego scharakteryzowania intuicji przyświecających dyskwotacjoniście (jak będę nazywał zwolennika wspomnianej teorii). Intuicje te wyrażają się w trzech poniższych tezach:

(1) Predykat prawdy „unieważnia” cudzysłów i do tego sprowadza się jego treść.

(2) Predykat prawdy pozwala wyrażać w skończonej formie nieskończone koniunkcje i alternatywy. Do tego sprowadza się jego rola.

(3) Równoważności Tarskiego są analityczne.

A oto parę słów komentarza.

Zwolennik tezy (1) zauważa, że zamiast orzekać prawdziwość o danym zdaniu, możemy równie dobrze wygłosić samo to zdanie (zamiast powiedzieć „Zdanie ‘Śnieg jest biały’ jest prawdziwe” mogę równie dobrze stwierdzić „Śnieg jest biały”). Zdaniem dyskwotacjonisty ta właśnie konstatacja wyczerpująco charakteryzuje treść predykatu prawdy, a w pojęciu prawdy nie kryje się nic głębszego.

Teza (2) dotyczy roli predykatu prawdy — dyskwotacjonista nie uważa bynajmniej, że jest on zbędny. Rozważmy w tym kontekście następujący przykład:

(P) Dla dowolnego zdania φ, implikacja o postaci „$\varphi \Rightarrow \varphi$" jest prawdziwa.

Na mocy tezy (1), mając do czynienia z konkretnym zdaniem φ, zamiast powiedzieć: „implikacja '$\varphi \Rightarrow \varphi$' jest prawdziwa", mogę równie dobrze stwierdzić: „$\varphi \Rightarrow \varphi$". W każdym konkretnym przypadku (przy ustalonym φ) potrafię wykonać taki eliminujący zabieg. Jednakże bez pojęcia prawdy nie będę w stanie uogólnić mojego sposobu myślenia — nie będę mógł scharakteryzować tego zjawiska jako ogólnej prawidłowości. Dysponując pojęciem prawdy, potrafię budować uogólnienia typu (P). Idea kryjąca się w tezie (2) polega na tym, że (P) „odpowiada" (w jakimś sensie tego słowa) pewnej nieskończonej koniunkcji. Niech mianowicie $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ będą wszystkimi zdaniami naszego języka. Otóż myśl zawartą w (P) mógłbym wyrazić za pomocą nieskończenie długiej koniunkcji o postaci: „$(\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0) \wedge (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_2) \wedge \ldots$". Dzięki predykatowi prawdy potrafimy wyrazić tę myśl skończonymi środkami. Podobna uwaga dotyczy kwantyfikatora egzystencjalnego oraz nieskończonych alternatyw. Rozważmy przykład:

(F) Istnieją zdania prawdziwe, których nigdy nie będziemy w stanie uzasadnić.

W tym przypadku teza jest analogiczna: owszem, bez predykatu prawdy potrafimy wyrazić myśl sformułowaną w zdaniu (F), ale tylko pod warunkiem, że nasz język dopuszcza nieskończenie długie alternatywy. Przy tym założeniu, parafrazujemy (F) jako: „(φ_0 i nigdy nie będziemy w stanie uzasadnić φ_0) $\vee$ (φ_1 i nigdy nie będziemy w stanie uzasadnić φ_1) $\vee \ldots$", gdzie $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ to (jak poprzednio) enumeracja zbioru wszystkich zdań naszego języka. I tu również okazuje się, że dzięki predykatowi prawdy potrafimy wyrazić tę myśl skończonymi środkami — właśnie (F) jest takim skończonym sformułowaniem. Zdaniem dyskwotacjonisty rola predykatu prawdy na tym się kończy.

Przejdźmy teraz do tezy (3). Równoważnościami Tarskiego nazywamy podstawienia poniższego schematu:

(T) „φ" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy φ.

Zwolennik (3) twierdzi, że takie równoważności charakteryzują sens predykatu prawdy. Akceptujemy je właśnie dlatego, że rozumiemy ten predykat. Są one analityczne — zachodzą na mocy znaczenia, jakie nadajemy predykatowi prawdy.

2. PROBLEM GENERALIZACJI

Załóżmy, że językiem, dla którego chcemy określić pojęcie prawdy, jest język arytmetyki pierwszego rzędu z dodawaniem i mnożeniem. Przyjmijmy dodatkowo, że dysponujemy pewną teorią arytmetyczną, której w kontekście naszej dyskusji o prawdzie nie zamierzamy kwestionować i która jest wystarczająco silna, by można było w jej ramach zrekonstruować teorię składni języka arytmetyki. W dalszych rozważaniach założę, że taką teorią (będę ją też czasem nazywać „teorią bazową") jest arytmetyka Peano (PA) — pełni ona funkcję bazy, pozwalającej na budowanie teorii prawdy. Język arytmetyki oznaczę jako „L(PA)"; z kolei rozszerzenie języka arytmetyki o predykat prawdy zamierzam oznaczać jako „$L(\mathrm{PA})^+$".

Ważnym punktem odniesienia w dalszych rozważaniach będzie pewien zestaw naturalnych uogólnień, angażujących pojęcie prawdy, które będę nazywał aksjomatami Tarskiego. Zbiór ten określa poniższa definicja.

DEFINICJA 1.

Wymienione poniżej warunki nazywamy aksjomatami Tarskiego:

- $\forall t_1, t_2 \in Tm^S\ [Tr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv val(t_1) = val(t_2)]$
- $\forall \varphi \in Sent\ [Tr(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \equiv \neg Tr(\varphi)]$
- $\forall \varphi, \psi \in Sent\ [Tr(\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner) \equiv Tr(\varphi) \vee Tr(\psi)]$
- $\forall \varphi \in Fm\ \forall a \in Var\ [Tr(\ulcorner \exists a \varphi \urcorner) \equiv \exists v\ Tr(\ulcorner \varphi(\dot{v}) \urcorner)]$.

Komentarz. Przez Tm^S oznaczam tu zbiór stałych termów języka arytmetyki (termów bez zmiennych wolnych — takich potrzebujemy, bo predykat prawdy chcemy orzekać o zdaniach, a nie o formułach ze zmiennymi wolnymi). Z kolei „$val(x) = y$" to arytmetyczna formuła, którą czytamy „y jest wartością termu x" (istotne jest tutaj to, że pojęcie wartości termu, rozumiane w zwykły sposób, daje się arytmetycznie reprezentować). „$Sent(x)$" to arytmetyczny predykat, który czytamy „x jest zdaniem języka PA" (choć będę czasem, jak to zresztą zrobiłem w powyższej definicji, używać notacji „$x \in Sent$", trzeba pamiętać, że nie wykraczamy tu poza język arytmetyki). Wyrażenie „$Fm(x)$" (albo „$x \in Fm$") czytamy: „x jest formułą języka PA". „$Var(x)$" to arytmetyczny predykat „x jest zmienną". Ostatnie wyjaśnienie dotyczy sposobu rozumienia formuły „$\exists v\ Tr(\ulcorner \varphi(\dot{v}) \urcorner)$", pojawiającej się w końcowym aksjomacie. Jak mamy pojąć kwantyfikację w tego rodzaju kontekście (i co oznacza kropka nad literą „v")? Otóż w bardziej rozbudowanej (ale za to dokładniejszej) wersji formuła ta przybrałaby postać:

$$\exists v\ Tr(sub(\ulcorner \varphi(.) \urcorner, nazwa(v))),$$

gdzie wyrażenie „$z = nazwa(v)$" to arytmetyczny predykat dwuargumentowy, wyrażający myśl „z jest liczebnikiem nazywającym liczbę v"; inaczej mówiąc: z jest termem o postaci „$SS \ldots S(0)$", w którym symbol „S" — symbol następnika — powtarza się v razy; z kolei „*sub*" reprezentuje funkcję podstawiania. Chodzi o to, że prawdziwy jest rezultat podstawienia nazwy obiektu v w formule φ (za daną zmienną).

W kolejnym kroku określimy pewną „minimalną" teorię prawdy dla języka arytmetyki; nazwijmy ją „D(PA)".

DEFINICJA 2.

Przez „D(PA)" będziemy rozumieć teorię w języku $L(\mathrm{PA})^{+}$, powstającą z PA przez dodanie wszystkich równoważności Tarskiego dla formuł arytmetycznych, tzn.:

$$D(\mathrm{PA}) = \mathrm{PA} \cup \{Tr(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \varphi\colon \varphi \in L(\mathrm{PA})\}.$$

Jak stwierdzono powyżej, D(PA) jest w pewnym sensie minimalną teorią prawdy dla języka arytmetyki. Gdyby nasza teoria w języku z predykatem „*Tr*" nie dowodziła równoważności Tarskiego dla zdań arytmetycznych, to można by uznać „*Tr*" po prostu za jakiś jednoargumentowy predykat, niekoniecznie zasługujący na miano predykatu prawdy. Inaczej mówiąc: teorii, która nie dowodziłaby tego rodzaju równoważności, nie chcielibyśmy nazwać teorią prawdy — na tym polega intuicja. Minimalna teoria dowodzi więc tego, czego musi dowodzić. Na miano „minimalnej" zasługuje zaś dlatego, że nie dowodzi niczego ponad to — niczego więcej w nią nie wkładamy.

W teorii D(PA) znajduje swoje ucieleśnienie idea, kryjąca się za tezą (1). Chcemy twierdzić, że prawda to „tylko" narzędzie do unieważniania cudzysłowu? Dodajmy w takim razie do wybranej teorii bazowej (tę rolę pełni PA) zbiór wszystkich zdań wyrażających „odcudzysłowiające" własności predykatu prawdy. Te zdania to właśnie równoważności Tarskiego, bo dzięki nim możemy swobodnie przechodzić od wersji cudzysłowowej (z predykatem prawdy) do wersji przedmiotowej (bez cudzysłowu).[1] Cała idea polega na tym, by nie dodawać tam niczego więcej. Obecnie można by zaś twierdzić, że teza (1) jest tyle warta, ile warta jest D(PA) jako teoria prawdy.

Jaka jest zatem wartość D(PA) jako teorii prawdy? Otóż moc tej teorii okazuje się niestety bardzo słaba, o czym przesądza poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE 3. (Halbach [1999])

Niech $\alpha(x)$ będzie formułą z jedną zmienną wolną, należącą do języka PA. Jeśli istnieje model M arytmetyki Peano, w którym $\alpha(x)$ definiuje nieskończony zbiór zdań, to $D(\mathrm{PA}) \nvdash \forall\psi\,[\alpha(\psi) \Rightarrow Tr(\psi)]$.

Intuicyjnie rzecz biorąc chodzi o to, że w ramach teorii D(PA) nie będziemy w stanie udowodnić żadnego twierdzenia o postaci „wszystkie zdania należące do zbioru A są prawdziwe", jeśli tylko zbiór A jest nieskończony. Dla przykładu, takie generalizacje jak „Wszystkie podstawienia zdaniowego prawa tożsamości są prawdziwe" pozostają poza naszym zasięgiem — nie są one twierdzeniami D(PA), gdyż

[1] Należy zastrzec, że w wersji formalnej nie używalibyśmy cudzysłowów — zamiast „Tr(„φ")" piszemy „$Tr(\ulcorner\varphi\urcorner)$". Zamiast cudzysłowowych nazw, wykorzystujemy więc raczej stałe termy języka PA, nazywające odpowiednie formuły (ich numery gödlowskie).

rodzina takich podstawień tworzy nieskończony zbiór. Nie będziemy w stanie również udowodnić aksjomatów Tarskiego. Stawia to dyskwotacjonistę w bardzo niewygodnej sytuacji: twierdzi on przecież (por. teza (2)) że prawda to narzędzie służące uogólnianiu; tymczasem okazuje się, że jego teoria prawdy jest za słaba, aby dowodzić nawet najbardziej podstawowych uogólnień angażujących pojęcie prawdy. I na tym właśnie polega problem zdań ogólnych.[2]

3. PROPOZYCJA HORWICHA

W książce *Truth* Paul Horwich zaproponował pewien sposób poradzenia sobie z tą trudnością. Napisał:

> Wydaje się wiarygodne, że istnieje reguła wnioskowania zachowująca prawdziwość, która ze zbioru przesłanek przypisujących każdemu sądowi jakąś własność *F*, pozwala nam wywnioskować, że wszystkie sądy mają własność *F*. Niewątpliwie nie jest to zwykła reguła logiczna […] Uważamy ją jednak za wiarygodną.[3]

Propozycja Horwicha polega więc na tym, by rozszerzyć dedukcyjny aparat dyskwotacyjnej teorii o nową regułę wnioskowania, znaną w literaturze pod nazwą ω-reguły. Jej treść jest następująca: wyobraźmy sobie, że uznaliśmy wszystkie zdania o postaci $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$ …, tzn. uznaliśmy dowolne zdanie powstające z formuły $\varphi(x)$ przez wstawienie (jakiegokolwiek!) liczebnika w miejsce zmiennej x.[4] Wówczas na mocy ω-reguły wolno nam uznać zdanie ogólne: $\forall x\varphi(x)$. Przyjmijmy teraz, że chcemy pozwolić na stosowanie ω-reguły w obrębie dyskwotacyjnej teorii D(PA), dopuszczamy przy tym, że formuła $\varphi(x)$ użyta w przesłankach ω-reguły może zawierać predykat prawdy. Czy rozwiązujemy w ten sposób problem zdań ogólnych? Zacznę od dobrych wieści dla dyskwotacjonisty: rzeczywiście, w takiej teorii nie mamy najmniejszego problemu z udowodnieniem licznych interesujących uogólnień, angażujących pojęcie prawdy. Dla przykładu rozważmy ponownie zdaniowe prawo tożsamości.

OBSERWACJA 4.

Teoria D(PA) z ω-regułą dowodzi zdania

$$\forall\psi\ [Sent(\psi) \Rightarrow Tr(\ulcorner\psi \Rightarrow \psi\urcorner)],$$

gdzie przez „$Sent(\psi)$" oznaczamy formułę, która mówi „ψ jest zdaniem języka arytmetyki Peano".

Dowód.

Niech $\varphi(x)$ będzie następującą formułą języka $L(\mathrm{PA})^+$ z jedną zmienną wolną x:

---

[2] Na problem ten zwrócił uwagę Anil Gupta, zob. Gupta [1993].

[3] Horwich [1998]. Uwaga ta pojawia się w posłowiu do drugiego wydania książki. W jej pierwszej wersji (z 1990 r.) Horwich wydaje się nie zauważać problemu.

[4] Uznaliśmy w efekcie, że $\varphi(x)$ jest prawdziwa o każdej liczbie naturalnej z osobna.

$$\forall\psi\ [(Sent(\psi) \wedge \psi < x) \Rightarrow Tr(\ulcorner\psi \Rightarrow \psi\urcorner)].$$

Formuła $\varphi(x)$ mówi zatem: zdaniowe prawo tożsamości jest prawdziwe dla zdań języka arytmetyki o numerach gödlowskich mniejszych niż x.

Zauważamy następnie, że dla każdej liczby naturalnej n, $D(\mathrm{PA}) \vdash \varphi(n)$.[5] Na kolejnym etapie rozumowania wolno nam więc użyć zdań $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ … jako przesłanek ω-reguły, co daje nam wniosek: $\forall x\varphi(x)$. Z tego trywialnie wynika pożądany rezultat końcowy: $\forall\psi[Sent(\psi) \Rightarrow Tr(\ulcorner\psi \Rightarrow \psi\urcorner)]$.

□

Mamy zatem teorię dowodzącą interesujących uogólnień, w której jedynymi aksjomatami angażującymi pojęcie prawdy są równoważności Tarskiego. Czy wolno nam w tej sytuacji uznać, że dyskwotacyjna teza (1) została obroniona? Dyskwotacjonista, który próbuje wzmocnić swoją teorię — dodać do niej nowe aksjomaty, ewentualnie nowe reguły wnioskowania — musi się liczyć z następującym zagrożeniem: może się zdarzyć, że doda zasady, których uzasadnienie ma istotnie semantyczny charakter. Jeśli mu się to przytrafi, nie zdoła obronić tezy (1). Krytyk dysponuje wówczas bardzo naturalną repliką: rzecz nie w tym, że równoważności Tarskiego wyczerpująco charakteryzują treść predykatu prawdy; otóż predykat prawdy ma dodatkową treść, którą dyskwotacjonista przemyca w postaci swoich nowo dodanych zasad (czy to aksjomatów, czy reguł wnioskowania). Licząc się z tym niebezpieczeństwem, popatrzmy obecnie pod tym kątem na propozycję Horwicha.

Kluczowe pytanie brzmi: jakie argumenty przemawiają za wprowadzeniem ω-reguły do systemu dowodzenia? Jak można by bronić tej reguły? Nasuwa się następująca odpowiedź. Dziedzina, o której chcemy mówić, złożona jest z liczb naturalnych. Dla każdej liczby naturalnej dysponujemy nazywającym ją liczebnikiem. Jeśli zatem dla każdego liczebnika n uznajemy zdanie o postaci $\varphi(n)$, to dla każdej liczby naturalnej n uznajemy, że formuła φ jest prawdziwa o n. W związku z tym jeśli nasza wyjściowa teoria jest poprawna, to nie popełnimy błędu uznając w takiej sytuacji zdanie ogólne $\forall x\varphi(x)$ — ω-reguła nie doprowadzi nas od prawdy do fałszu. Czegóż więcej mielibyśmy wymagać od dobrej reguły wnioskowania?

Nadeszła pora na przedstawienie gorszych wieści dla dyskwotacjonisty, pragnącego posłużyć się ω-regułą w celu rozwiązania problemu zdań ogólnych. Uważam mianowicie, że uzasadnienie ω-reguły zawarte w poprzednim akapicie jest absolutnie niezadowalające (chciałbym przy tym wspomnieć, że nie widzę innego uzasadnienia, do którego mógłby apelować dyskwotacjonista). Poniżej formułuję dwa zarzuty, które według mojej oceny przesądzają o porażce strategii Horwicha.

---

[5] Do wykazania tego nie potrzebujemy ω-reguły — każde zdanie o postaci $\varphi(n)$ jest dowodliwe w $D(\mathrm{PA})$ przy użyciu zwykłych środków logicznych. Dla ustalonego n, wystarczy po prostu skompilować w $D(\mathrm{PA})$ listę wszystkich zdań arytmetycznych o numerach gödlowskich mniejszych od n (będzie ich skończenie wiele) i dla każdego z nich dowodzić krok po kroku prawdziwości zdaniowego prawa tożsamości.

Zarzut 1. Przedstawione uzasadnienie jest istotnie semantyczne. Czym się bowiem kierujemy wprowadzając ω-regułę? Zgodnie z przedstawionym uzasadnieniem, główna przesłanka głosi, że nasza teoria jest „o liczbach naturalnych” — opisuje ona świat standardowych liczb naturalnych, i niczego więcej nie opisuje. (Treść przesłanki sprowadza się do tego, że standardowe liczebniki to nazwy wszystkich elementów tego świata.) Jest to bardzo mocne, semantyczne założenie, którego nie da się w ogóle sformułować w postaci pojedynczego zdania języka arytmetyki. Nie uzyskamy zatem wniosku, zgodnie z którym równoważności Tarskiego charakteryzują całą treść pojęcia prawdy. Uzyskujemy jedynie co następuje: otóż słabe (dyskwotacyjne) pojęcie prawdy okazuje się rzeczywiście wystarczające (tj. pozwala na dowodzenie interesujących uogólnień), ale tylko przy założeniu, że dodamy do teorii zasadę wnioskowania (ω-regułę), motywowaną rozważaniami, w których używa się znacznie silniejszego pojęcia prawdy. (Kiedy mówimy, że nasza teoria jest „o liczbach naturalnych”, mówimy tym samym, że standardowy model arytmetyki jest jej zamierzonym modelem — to właśnie o nim teoria ma być prawdziwa. To właśnie w tym modelu standardowe liczebniki odnoszą się do wszystkich elementów uniwersum). W ten sposób dyskwotacjonista wygrywa potyczkę, ale przegrywa wojnę: nie udaje mu się wykazać, że silne (niedyskwotacyjne) pojęcie prawdy jest zbędne. Sam posługuje się przecież takim silnym pojęciem, kiedy uzasadnia ω-regułę.

Zarzut 2. Przedstawiając uzasadnienie dla ω-reguły zauważyłem, że nie doprowadzi nas ona od prawdy do fałszu. Zapytałem następnie: czegóż więcej mielibyśmy wymagać od dobrej reguły wnioskowania? Przyznaję teraz, że pytanie było tendencyjne. Otóż od dobrej reguły wnioskowania można wymagać czegoś więcej. Intuicyjnie rzecz biorąc, tym dodatkowym wymogiem byłby warunek *praktyczności*: chodzi o to, by rozumowania przeprowadzane wewnątrz systemu przy użyciu tej reguły były dla nas (istot ludzkich) wykonalne. Cóż z tego, że dany system dowodzenia pozwala (teoretycznie) uzyskać jakieś uogólnienie (np. „zdaniowe prawo tożsamości jest zawsze prawdziwe”), skoro my — istoty ludzkie — pracując w tym systemie nigdy nie będziemy w stanie wspomnianego uogólnienia udowodnić? W rzeczywistości dochodzimy przecież w jakiś sposób do takich uogólnień i wydaje się, że adekwatna teoria prawdy powinna ten fakt uwzględniać — dowody zdań ogólnych przeprowadzane w jej obrębie powinny być *wykonalnymi* dowodami. Niestety, system z ω-regułą nie spełnia tego warunku. Reguła ta jest infinitystyczna: wymaga użycia w dowodzie nieskończenie wielu przesłanek. Możemy w związku z tym badać formalne własności systemów z ω-regułą, dowodzić interesujących metatwierdzeń na ich temat; jednakże praktyczna stosowalność takich systemów (ich związek z naszą rzeczywistą praktyką dowodzenia) jest znikoma. Z punktu widzenia praktyki, zarzut jest zatem następujący: Horwich proponuje nam bezużyteczną teorię prawdy. Wydaje mi się, że jest to bardzo poważna obiekcja.[6]

---

[6] Por. Raatikainen [2005].

Powyższe zarzuty zostały sformułowane w intuicyjnych terminach: stwierdziłem, że ω-reguła to bardzo mocna, infinitystyczna zasada, mająca silną treść semantyczną. Tym intuicjom odpowiadają znane formalne wyniki dotyczące własności systemów z ω-regułą. I tak, okazuje się, że arytmetyka Peano z ω-regułą dowodzi wszystkich prawdziwych zdań języka arytmetyki dodawania i mnożenia. Nie jest to zatem aksjomatyzowalna teoria (tj. zbiór jej twierdzeń nie jest rekurencyjnie przeliczalny).[7] W przeciwieństwie do zwykłych systemów, relacja bycia dowodem nie jest tu rozstrzygalna — nie istnieje algorytm pozwalający na sprawdzanie poprawności dowodów w tym systemie. W ten sposób za bogactwo zbioru twierdzeń płacimy bardzo wysoką cenę: tą ceną jest utrata kontroli nad dowodami przeprowadzanymi w ramach naszego systemu.

4. „MODALNY DYSKWOTACJONIZM” HALBACHA

4.1. Ekspozycja

W artykule „Disquotational truth and analyticity” Volker Halbach zaproponował inny sposób poradzenia sobie z problemem zdań ogólnych.[8] Idea polega na tym, aby tak zrekonstruować stanowisko dyskwotacjonisty, by teza (3) o analityczności stała się twierdzeniem (ewentualnie: aby przekładała się na pewien zbiór twierdzeń) proponowanej przez niego teorii. Jak się za chwilę przekonamy, dzięki takiej zmianie perspektywy można skonstruować całkiem mocną teorię. Halbach twierdzi, że dzięki temu zabiegowi dyskwotacjonista jest w stanie uniknąć problemu zdań ogólnych. Przyjrzymy się teraz bliżej pomysłowi Halbacha.

Początkowa obserwacja polega na tym, że dyskwotacjonista ma do dyspozycji dwa rodzaje dyskwotacji — „lokalną” oraz „jednorodną” — którymi może się posłużyć w swojej teorii prawdy. Korzystając z lokalnej dyskwotacji, może dołączyć do swojej bazowej teorii wszystkie podstawienia schematu:

$$Tr(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \varphi.$$

Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, żeby pójść nieco dalej. Uzyskujemy mocniejszą (lecz wciąż dyskwotacyjną) zasadę, rozważając formuły ze zmiennymi wolnymi i budując następujący jednorodny schemat:

$$\forall x_1 \dots x_k\, [Tr(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1 \dots \dot{x}_k)\urcorner) \equiv \varphi(x_1 \dots x_k)].$$

Możemy tu przyjąć, że formuła φ ma k zmiennych wolnych; w ten sposób lokalną dyskwotację traktujemy jako szczególny przypadek schematu jednorodnej dyskwotacji (dla k równego 0). Oznaczmy jako UDS zbiór wszystkich podstawień powyż-

[7] Nie jest nawet arytmetycznie definiowalny.
[8] Zob. Halbach [2001].

szego schematu.[9] Biorąc PA za teorię bazową, dyskwotacjonista ma prawo przejść do teorii PA + UDS, w której nie przyjmujemy o prawdzie niczego poza tym, że spełnia ona jednorodny, dyskwotacyjny schemat.

Niestety, PA + UDS jest słabą teorią prawdy, co pokazuje poniższe twierdzenie oraz dwa wnioski.

TWIERDZENIE 5. (Halbach [2001])

Niech $\varphi(x)$ będzie formułą arytmetyczną taką że

$$\mathrm{PA} + \mathrm{UDS} \vdash \forall x\, [\varphi(x) \Rightarrow Tr(x)].$$

Wówczas istnieje liczba naturalna n taka że

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x[\varphi(x) \Rightarrow Tr_{\mathrm{n}}(x)],$$

gdzie „$Tr_{\mathrm{n}}(x)$" to predykat prawdy dla formuł arytmetycznych, w których występuje co najwyżej n symboli logicznych.

Idea dowodu.

Załóżmy, że $\mathrm{PA} + \mathrm{UDS} \vdash \forall x\, [\varphi(x) \Rightarrow Tr(x)]$. Wybierzmy dowód d zdania „$\forall x\, [\varphi(x) \Rightarrow Tr(x)]$" na gruncie PA + UDS. Określamy liczbę naturalną n jako $max\{rk(\varphi)$: $\ulcorner\forall x_1\ldots x_{\mathrm{k}}\, [Tr(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1\ldots \dot{x}_{\mathrm{k}})\urcorner) \equiv \varphi(x_1\ldots x_{\mathrm{k}})]\urcorner \in d\}$, tzn. n jest maksymalną rangą formuły, dla której odpowiednia równoważność typu UDS została wykorzystana w naszym dowodzie. Następnie tworzymy ciąg formuł d^*, zastępując predykatem „Tr_{n}" wystąpienia predykatu „Tr" w formułach należących do d. Należy zauważyć, że każda formuła należąca do uzyskanego w ten sposób ciągu d^* będzie twierdzeniem PA. Skoro ostatnim wyrazem d^* będzie zdanie „$\forall x[\varphi(x) \Rightarrow Tr_{\mathrm{n}}(x)]$", uzyskujemy w ten sposób pożądaną konkluzję. Warto dodać, że dokładnie to samo rozumowanie można powtórzyć również w przypadku, gdy wyjściową teorię PA + UDS rozszerzymy o aksjomaty indukcji dla formuł rozszerzonego języka (z predykatem prawdy).

□

WNIOSEK 6.

Teoria PA + UDS nie dowodzi aksjomatów Tarskiego.

Dowód.

Konsekwencją aksjomatów Tarskiego jest na przykład zdanie

$$\forall x\, [x \in L(\mathrm{PA}) \Rightarrow Tr(\ulcorner x \vee \neg x\urcorner)].$$

Wymienione zdanie nie wynika jednak z PA + UDS, gdyż w przeciwnym wypadku na mocy Twierdzenia 5 istniałaby liczba n taka że:

$$\mathrm{PA}+ \text{„}\forall x\, [x \in L(\mathrm{PA}) \Rightarrow Tr_{\mathrm{n}}(\ulcorner x \vee \neg x\urcorner)\text{"}.$$

[9] UDS to skrót angielskiego wyrażenia „uniform disquotation sentences".

Jednakże kwantyfikacja w powyższej formule dotyczy wszystkich zdań języka PA (o dowolnie dużej randze), jeśli więc PA jest niesprzeczna, to nic takiego nie może z niej wynikać.

□

Stajemy więc ponownie przed problemem zdań ogólnych. W tej sytuacji Halbach proponuje wzmocnić teorię PA + UDS poprzez dodanie aksjomatów formalizujących tezę (3). Idea jest następująca. Dyskwotacjonista uważa, że zdania dyskwotacyjne (tu: elementy zbioru UDS) są analityczne — określają znaczenie predykatu prawdy. Jak wiadomo, ogólne pojęcie analityczności okazało się bardzo niejasne — słynną krytykę tego pojęcia przeprowadził Quine.[10] Nie będę tu przytaczać argumentów Quine'a przeciwko pojęciu analityczności; zainteresowanych odsyłam do jego klasycznego artykułu. Halbach przyznaje, że istnieje pewien problem z ogólnym pojęciem analityczności, zauważa jednak:

> Zastrzeżenia Quine'a wobec ogólnie rozumianej analityczności nie dotyczą jednak pewnych ograniczonych pojęć analityczności. W szczególności, możemy dysponować dokładnie określonym zbiorem postulatów znaczeniowych dla jakiegoś konkretnego pojęcia i w ten sposób uniknąć zarzutów Quine'a. Dotyczy to zwłaszcza dyskwotacyjnej prawdy: dyskwotacyjna prawda scharakteryzowana jest poprzez fakt, że jej znaczeniem rządzą dyskwotacyjne zdania. W ten sposób koncepcję dyskwotacyjną można zinterpretować jako tezę, zgodnie z którą dyskwotacyjne zdania tworzą zbiór postulatów znaczeniowych dla prawdy.[11]

Mamy zatem wyraźnie zdefiniowany zbiór UDS. Zgodnie z obecnym ujęciem, dyskwotacjonista twierdzi, że jest on zbiorem postulatów znaczeniowych charakteryzujących pojęcie prawdy. Na kolejnym etapie rozumowania wykorzystujemy eksplikację pojęcia analityczności zaproponowaną przez Rudolfa Carnapa w *Meaning and Necessity*. Zgodnie z ujęciem Carnapa:

> Zdanie ψ jest analityczne wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest logiczną konsekwencją postulatów znaczeniowych.

Nie dysponujemy być może ogólnym pojęciem „postulatu znaczeniowego" (a co za tym idzie: ogólnym pojęciem zdania analitycznego), posiadamy za to precyzyjnie zdefiniowane pojęcie „postulatu znaczeniowego dla pojęcia prawdy" — takim postulatem znaczeniowym jest dowolny element UDS. W efekcie możemy określić potrzebne nam w obecnym kontekście ograniczone pojęcie analityczności — pojęcie zdania „*Tr*-analitycznego"[12]:

> Zdanie ψ jest *Tr*-analityczne wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest logiczną konsekwencją UDS.

[10] Zob. Quine [1951].
[11] Halbach [2001], s. 1962.
[12] W oryginale: „Truth-analytic"; zob. Halbach [2001], s. 1962.

Tę właśnie ideę wykorzystuje Halbach w celu precyzyjnego określenia teorii, którą może posłużyć się dyskwotacjonista. Jak już mówiłem, dyskwotacjonista może przyjąć w punkcie wyjścia teorię PA + UDS. Taka teoria nie odzwierciedla jednak w pełni jego filozoficznego stanowiska. Dodatkowo twierdzi on przecież, że UDS stanowi zbiór postulatów znaczeniowych dla pojęcia prawdy; uważa więc, że konsekwencje UDS to zdania analityczne. W tej sytuacji Halbach proponuje, by wyrazić stanowisko dyskwotacjonisty za pomocą zasady refleksji dla UDS. Zgodnie z tym ujęciem, formalizujemy dyskwotacyjną koncepcję za pomocą teorii PA + UDS, rozszerzonej o podstawienia następującego schematu refleksji:

$$\forall \boldsymbol{x}\, [Pr_{\mathrm{UDS}}(\ulcorner \varphi(\boldsymbol{x}) \urcorner) \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{x})],$$

gdzie $\boldsymbol{x}$ to ciąg zmiennych, φ zaś jest dowolną formułą rozszerzonego języka (z predykatem prawdy).

Czy oznacza to, że zbiór postulatów znaczeniowych dyskwotacjonisty jest niekompletny? Czy nie powinniśmy dołączyć podstawień zasady refleksji do zbioru postulatów znaczeniowych określających pojęcie prawdy? Halbach odpowiada:

> Nie, nie powinniśmy: aksjomaty refleksji są co najwyżej postulatami znaczeniowymi dla pojęcia *Tr*-analityczności, a nie dla samego pojęcia prawdy. Dyskwotacyjne zdania dają nam pełne wyjaśnienie pojęcia dyskwotacyjnej prawdy.[13]

Poniżej dodaje:

> Formalizacja stanowiska dyskwotacjonisty za pomocą schematu refleksji uwzględnia fakt, że dyskwotacjonista nie tylko wygłasza dyskwotacyjne zdania, ale również coś o nich twierdzi — mianowicie, że określają one znaczenie predykatu prawdy.[14]

Jak silną teorię uzyskuje dyskwotacjonista? W celu udzielenia odpowiedzi na to pytanie, wprowadźmy najpierw następujące oznaczenie:

DEFINICJA 7.

Oznaczmy przez AT teorię: PA + Refleksja dla UDS + indukcja dla języka z predykatem prawdy.[15]

Halbach uważa, że teoria AT dobrze formalizuje stanowisko dyskwotacjonisty. Teza o analityczności UDS (czytaj: refleksja dla UDS) jest w nią wbudowana.[16] Okazuje się przy tym, że AT jest całkiem silną teorią — w jej obrębie potrafimy udowodnić wszystkie aksjomaty Tarskiego; w efekcie AT nie jest słabsza niż PA(S) — teoria powstająca z PA przez dodanie aksjomatów Tarskiego i indukcji dla rozsze-

[13] Halbach [2001], s. 1963.

[14] Halbach [2001], s. 1963.

[15] Skrót „AT" to pierwsze litery angielskich słów „analyticity" i „truth", czyli „analityczność" i „prawda".

[16] Halbach nie rozważa zasadności przyjęcia przez dyskwotacjonistę zasady indukcji dla rozszerzonego języka. W tej sprawie zob. jednak Obserwacja 9 — zauważę dalej, że jeśli tylko przyjmujemy refleksję, nie potrzebujemy takiej indukcji na naszej liście aksjomatów.

rzonego języka, która pozwala na udowodnienie wielu interesujących generalizacji, angażujących pojęcie prawdy.

Naszkicuję za chwilę dowód tego faktu, prezentację rozpocznę jednak od pewnego terminologicznego ustalenia. Halbach rozważa mianowicie arytmetykę Peano jako teorię w języku ze stałą „0", w którym „*S*" — symbol następnika — jest jedynym symbolem funkcyjnym. Symbole dodawania i mnożenia zastępujemy predykatami trójargumentowymi i odpowiednio modyfikujemy aksjomatykę PA. Z kolei aksjomaty Tarskiego przybierają wówczas następującą postać:

1. $\forall x, y\ [Tr(\ulcorner \dot{x} = \dot{y} \urcorner) \equiv x = y]$
2. $\forall x, y, z\ [Tr(\ulcorner D(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \urcorner) \equiv D(x, y, z)]$
3. $\forall x, y, z\ [Tr(\ulcorner M(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \urcorner) \equiv M(x, y, z)]$
4. $\forall \varphi \in Sent\ [Tr(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \equiv \neg Tr(\varphi)]$
5. $\forall \varphi, \psi \in Sent\ [Tr(\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner) \equiv Tr(\varphi) \vee Tr(\psi)]$
6. $\forall \varphi \in Fm\ \forall a \in Var\ [Tr(\ulcorner \exists a\varphi \urcorner) \equiv \exists v\ Tr(\ulcorner \varphi(\dot{v}) \urcorner)]$

gdzie „$D(x, y, z)$" („$M(x, y, z)$") ma naturalną interpretację: „*z* jest wynikiem dodania *x* do *y*" („*z* jest wynikiem pomnożenia *x* przez *y*").[17]

Oznaczamy przez PA(S) teorię powstającą z arytmetyki Peano (zmodyfikowanej w wyżej omówiony sposób) przez dołączenie podanych przed chwilą (zmodyfikowanych) aksjomatów Tarskiego oraz aksjomatów indukcji dla rozszerzonego języka. Zachodzi wówczas następująca zależność:

TWIERDZENIE 8. (Halbach [2001])
PA(S) $\subseteq$ AT.

Dowód.

Wystarczy pokazać, że wszystkie aksjomaty Tarskiego są twierdzeniami AT. Pierwsze trzy aksjomaty na naszej liście należą do UDS, więc nie mamy z nimi problemu. Do udowodnienia czwartego i piątego aksjomatu nie potrzebujemy nawet całego UDS: wystarczą nam tu podstawienia schematu „$Tr(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \varphi$". Dowodząc aksjomatu szóstego (dla kwantyfikatora) w AT rozumujemy następująco:

(1) $\forall \varphi \in Fm\ \forall a \in Var$ UDS $\vdash Tr(\ulcorner \exists a\varphi(a) \urcorner) \equiv \exists a\varphi(a)$ (T-równoważność)

(2) $\forall \varphi \in Fm\ \forall a \in Var$ UDS $\vdash \forall a\ [Tr(\ulcorner \varphi(\dot{a}) \urcorner) \equiv \varphi(a)]$ (element UDS)

(3) $\forall \varphi \in Fm\ \forall a \in Var$ UDS $\vdash \exists a\ Tr(\ulcorner \varphi(\dot{a}) \urcorner) \equiv \exists a\varphi(a)$ (z (2), logika)

(4) $\forall \varphi \in Fm\ \forall a \in Var$ UDS $\vdash Tr(\ulcorner \exists a\varphi(a) \urcorner) \equiv \exists a\ Tr(\ulcorner \varphi(\dot{a}) \urcorner)$ (z (1) oraz (3))

---

[17] Na liście aksjomatów Tarskiego, którą podaje Halbach w omawianym artykule, brakuje drugiego i trzeciego aksjomatu z podanego tu zestawu. Jest to przeoczenie — aksjomaty te są niezbędne. Zob. Halbach [2001], s. 1965.

(5) $\forall\varphi \in Fm\ \forall a \in Var$ UDS $\vdash \exists a\ Tr(\ulcorner\varphi(\dot{a})\urcorner) \equiv \exists v\ Tr(\ulcorner\varphi(\dot{v})\urcorner)$ (zamiana zmiennych)

(6) $\forall\varphi \in Fm\ \forall a \in Var$ UDS $\vdash Tr(\ulcorner\exists a\varphi(a)\urcorner) \equiv \exists v\ Tr(\ulcorner\varphi(\dot{v})\urcorner)$ (z (4) oraz (5))

(7) $\forall\varphi \in Fm\ \forall a \in Var\ [Tr(\ulcorner\exists a\varphi\urcorner) \equiv \exists v\ Tr(\ulcorner\varphi(\dot{v})\urcorner)]$ (refleksja dla UDS)

W kroku (5) powyższego argumentu dokonuje się przemianowanie zmiennych: zamiast zmiennej *a* (być może niestandardowej) wprowadzamy (standardową!) zmienną *v*. Jest to konieczne, gdyż w kroku (7) chcemy użyć zmiennej *v*, a nie tylko ją wymienić.

□

W ten sposób okazuje się, że teoria AT jest całkiem silna: jej moc jest nie mniejsza niż siła teorii prawdy Tarskiego z pełną indukcją.[18]

4.2. Komentarze i ocena propozycji Halbacha

Chciałbym teraz przedstawić dwa komentarze dotyczące formalnych rezultatów, przedstawionych w poprzedniej sekcji.

Po pierwsze, można by bez żadnej straty przyjąć nieco słabsze określenie teorii AT. Zgodnie z ujęciem Halbacha, do zbioru aksjomatów AT należą między innymi wszystkie podstawienia schematu indukcji dla języka z predykatem prawdy (por. Definicja 7). Otóż można by zrezygnować z tego warunku. Niech AT^{-} będzie teorią różniącą się od AT jedynie tym, że mamy w jej obrębie do dyspozycji wyłącznie arytmetyczną indukcję. (Inaczej mówiąc: AT^{-} = PA + refleksja dla UDS.) Okazuje się, że różnica między tymi teoriami występuje wyłącznie na poziomie aksjomatów — zbiory twierdzeń są identyczne. Wynik ten sformułuję poniżej jako Obserwację 9.

Po drugie, nie ma w rzeczywistości potrzeby formułować arytmetyki Peano w języku relacyjnym, tak jak to robi Halbach. Można mianowicie wykazać, że teoria AT (w języku z symbolami funkcyjnymi dla dodawania i mnożenia) dowodzi aksjomatów Tarskiego, sformułowanych w stylu Definicji 1, bez żadnych modyfikacji. W tym celu wystarczy stwierdzić, że AT dowodzi pierwszego z aksjomatów wyszczególnionych w Definicji 1, mianowicie zdania:

$$\forall t_1, t_2 \in Tm^{S}\ [Tr(\ulcorner t_1 = t_2\urcorner) \equiv val(t_1) = val(t_2)],$$

dowody pozostałych aksjomatów w AT podane przez Halbacha nie wymagają bowiem żadnych przeróbek. Rezultat ten sformułuję poniżej jako Obserwację 10.

Podam obecnie sformułowania i dowody obydwu obserwacji.

OBSERWACJA 9.

AT^{-} = AT.

---

[18] W omawianym artykule Halbach pokazuje, że zachodzi również inkluzja odwrotna: AT $\subseteq$ PA(S). Zob. Halbach [2001], s. 1966.

Dowód.

Wystarczy pokazać, że AT^{-} dowodzi indukcji dla rozszerzonego języka. Niech $\varphi(x)$ będzie dowolną formułą tego języka (z predykatem prawdy). Wewnątrz AT^{-} zauważamy, że:

$$\forall a\ \varnothing \vdash \{\varphi(0) \wedge \forall x\ [\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)]\} \Rightarrow \varphi(a).$$

Czyli: każdy „jednostkowy" przypadek indukcyjnego typu dowodliwy jest w czystej logice (dla języka z predykatem prawdy). Do pokazania tego wystarcza nam w zupełności Σ_1 indukcja arytmetyczna. Skoro powyższa obserwacja zachodzi dla logiki, to tym bardziej dla UDS:

$$\forall a\ \mathrm{UDS} \vdash \{\varphi(0) \wedge \forall x\ [\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)]\} \Rightarrow \varphi(a).$$

Możemy teraz zastosować refleksję dla UDS, co w oczywisty sposób da nam indukcję dla φ.[19]

□

OBSERWACJA 10.[20]

Teoria AT sformułowana w języku z symbolami funkcyjnymi dla dodawania i mnożenia dowodzi:
$\forall t_1, t_2 \in Tm^{S}\ [Tr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv val(t_1) = val(t_2)]$.

Dowód.

Oznaczmy przez $Ax_{I\Sigma_1}$ pojedyncze zdanie języka arytmetyki Peano, stanowiące aksjomatykę dla $I\Sigma_1$ (teorii z indukcją dla Σ_1 formuł).[21] Wewnątrz teorii AT, przeprowadzamy następujące rozumowanie:

(1) $\forall t_1, t_2 \in Tm^{S}\ \mathrm{UDS} \vdash [Tr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv t_1 = t_2]$

(2) $\forall t_1, t_2 \in Tm^{S}\ \mathrm{UDS} \vdash Ax_{I\Sigma_1} \Rightarrow [t_1 = t_2 \equiv val(t_1) = val(t_2)]$

(3) $\forall t_1, t_2 \in Tm^{S}\ \mathrm{UDS} \vdash Ax_{I\Sigma_1} \Rightarrow [Tr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv val(t_1) = val(t_2)]$

(4) $Ax_{I\Sigma_1} \Rightarrow \forall t_1, t_2 \in Tm^{S}\ [Tr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv val(t_1) = val(t_2)]$

(5) $Ax_{I\Sigma_1}$

(6) $\forall t_1, t_2 \in Tm^{S}\ [Tr(\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner) \equiv val(t_1) = val(t_2)]$.

W AT bez trudu udowodnimy (1) na mocy charakterystyki zbioru UDS. Dla dowolnych termów t_1, t_2, arytmetyka z Σ_1 indukcją dowodzi zdania „$t_1 = t_2 \equiv val(t_1) = val(t_2)$"; a zatem zdanie „$Ax_{I\Sigma_1} \Rightarrow [t_1 = t_2 \equiv val(t_1) = val(t_2)]$" będzie dowodliwe w czys-

[19] Dokładniejsze omówienie związku pomiędzy refleksją a indukcją odnajdzie czytelnik w moim artykule [200?].

[20] Obserwacja ta pochodzi od Konrada Zdanowskiego.

[21] Arytmetyka $I\Sigma_1$ jest skończenie aksjomatyzowalna; zob. Hajek, Pudlak [1993], twierdzenie 2.52.

tej logice. Skoro tak, to tym bardziej jest ono dowodliwe w UDS, co daje nam w efekcie (2). Warunek (3) wynika w oczywisty sposób z (1) i (2). W celu uzyskania (4) stosujemy w AT refleksję. AT zawiera PA, więc oczywiście w jej obrębie mamy do dyspozycji (5). Z (4) i (5) w oczywisty sposób uzyskujemy (6), co kończy dowód. □

Zajmijmy się teraz filozoficzną interpretacją i oceną propozycji Halbacha. Czy rzeczywiście dyskwotacjonista może posłużyć się teorią AT? Jeśli tak, to dysponuje mocną teorią prawdy — słabość dyskwotacyjnych zdań zostaje zrekompensowana dzięki wykorzystaniu (w obrębie teorii prawdy) postulatów znaczeniowych, charakteryzujących pojęcie *Tr*-analityczności. Czy dyskwotacjonista rozwiązuje w ten sposób problem zdań ogólnych? Czy wolno wówczas twierdzić, że prawda to „tylko” unieważnianie cudzysłowu?

Zrekapitulujmy na początek argument, który (zdaniem Halbacha) ma uprawomocniać przyjęcie przez dyskwotacjonistę teorii AT. Oto przesłanki tego argumentu:

(1) UDS to zbiór postulatów znaczeniowych, określających sens predykatu prawdy (zbiór postulatów znaczeniowych dla „*Tr*”).

(2) Zdanie φ jest *Tr*-analityczne wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest konsekwencją postulatów znaczeniowych dla „*Tr*”.

(3) Jeśli φ jest *Tr*-analityczne, to jest tak, jak głosi φ.

Z tych przesłanek wyprowadzamy wniosek:

(W) Jeśli φ jest konsekwencją UDS, to jest tak, jak głosi φ.

Ten właśnie wniosek formalizujemy następnie jako zasadę refleksji dla UDS. Przesłanka (1) w powyższym rozumowaniu to teza dyskwotacjonisty — twierdzi on, że zbiór UDS ma właśnie taki charakter. Przesłanka (2) to eksplikacja pojęcia analityczności, pochodząca od Carnapa — zakres predykatu *Tr*-analityczności zostaje utożsamiony ze zbiorem konsekwencji postulatów znaczeniowych. Jednakże pojęcie analityczności nie jest czysto syntaktyczne — zdanie analityczne to zdanie „prawdziwe na mocy znaczenia”, a nie „konsekwencja danego zbioru zdań”. Część tej intuicji próbuje oddać przesłanka (3): pojęcie *Tr*-analityczności ma semantyczną treść — zdania analityczne mają być zdaniami *prawdziwymi* (jest tak, jak one głoszą). W efekcie uzyskujemy wniosek (W). Możemy następnie uniknąć niewygodnego tu dla nas w obecnym kontekście pojęcia prawdy i wyrazić wniosek (W) w postaci schematu refleksji. W taki właśnie sposób dyskwotacjonista dochodzi do swojej teorii AT.

Sformułuję obecnie pewne krytyczne komentarze wobec koncepcji Halbacha. Moja ogólna ocena tej koncepcji jest negatywna — jestem skłonny uznać ją za ambitną porażkę. Tekst Halbacha — niewątpliwie interesujący z formalnego punktu widzenia — nie zawiera moim zdaniem przekonującej obrony filozoficznego stanowiska dyskwotacjonisty przed zarzutami krytyków.

Uwaga pierwsza. Dyskwotacjonista twierdzi, że (jednorodne) zdania dyskwotacyjne w pełni charakteryzują znaczenie predykatu prawdy, w związku z tym nie potrzebujemy w naszej teorii żadnych innych zdań w roli aksjomatów. Wątpliwość polega na tym, że taka teza traci swoją moc, kiedy pozwalamy dyskwotacjoniście na skompensowanie słabości dyskwotacyjnej teorii prawdy poprzez wprowadzenie do naszej teorii innych pojęć semantycznych. Dla przykładu, nie ma sensu upierać się, że jakieś słabe pojęcie prawdy wystarcza do naszych celów, jeśli nasz jedyny argument na rzecz takiej tezy polega na tym, że możemy skompensować słabość przyjętego pojęcia prawdy poprzez wprowadzenie innych silnych pojęć semantycznych, takich jak spełnianie albo denotacja. Otóż wydaje mi się, że tego rodzaju wątpliwość stosuje się jak najbardziej do rozwiązania zaproponowanego przez Halbacha. Pokazuje on, że jeśli rozszerzymy dyskwotacyjną teorię o postulaty znaczeniowe charakteryzujące pojęcie *Tr*-analityczności, otrzymamy silną teorię AT (równoważną PA(S)).[22] Jednakże pojęcie *Tr*-analityczności wbudowane w AT ma semantyczny charakter: jest to pojęcie adekwatności (*soundness*) pewnego systemu formalnego, mianowicie systemu UDS. W rezultacie uzyskujemy wniosek: dyskwotacyjna teoria prawdy okaże się zadowalająca, jeśli wzmocnimy ją o postulaty znaczeniowe, charakteryzujące pewne inne pojęcie semantyczne. Wydaje mi się, że z punktu widzenia dyskwotacjonisty użyteczność takiego rezultatu jest znikoma. Oponent mógłby udzielić wówczas następującej odpowiedzi: racja bytu niedyskwotacyjnego predykatu prawdy polega właśnie na tym, że możemy się nim posługiwać bez potrzeby wprowadzania takich dodatkowych semantycznych pojęć. Akceptując rozwiązanie Halbacha, dyskwotacjonista w istocie sam przyznaje, że moc semantyczna dyskwotacyjnego predykatu prawdy jest za mała.

Uwaga druga. Nie jest bynajmniej jasne, w jaki dokładnie sposób pojęcie analityczności funkcjonuje w argumencie Halbacha. Nie jest nawet oczywiste, czy w ogóle ma tam ono jakiekolwiek istotne zastosowanie. I tak, rozważmy następujący fragment artykułu Halbacha:

> Rzecz jasna, można podać dowolne aksjomaty dla danego symbolu i zadeklarować, że są one postulatami znaczeniowymi dla pojęcia, wyrażanego przez ten symbol. Na przykład teoriomnogościowy platonista może sformułować aksjomaty ZFC jako postulaty znaczeniowe dla teoriomnogościowego pojęcia należenia i twierdzić, że konsekwencje tych aksjomatów są analityczne dla $\in$. Nawet „finitysta” […] dysponuje pojęciem dowodliwości z aksjomatów ZFC i może się zgodzić, że rządzą one pojęciem należenia, jakim posługuje się platonista. Jednakże w odróżnieniu od platonisty, finitysta nie będzie wierzył w adekwatność (*soundness*) pojęcia należenia do zbioru.[23]

Nieco dalej Halbach zauważa:

---

[22] W istocie, wystarczy rozszerzyć PA o odpowiednie postulaty znaczeniowe.

[23] Halbach [2001], s. 1962.

> Na podobnej zasadzie pojęcie dowodliwości ze zdań dyskwotacyjnych dostępne jest także przeciwnikom dyskwotacjonizmu. Kiedy zdania dowodliwe […] z UDS nazywamy *Tr*-analitycznymi, to jest to tylko nasza terminologiczna decyzja. Tym co wyróżnia dyskwotacjonistę jest fakt, że wierzy on w adekwatność swojego pojęcia prawdy.

Te uwagi wydają mi się bardzo niejasne. Rekonstruując stanowisko Halbacha, sformułowałem wcześniej argument na rzecz przyjęcia AT (przesłanki (1)-(3)). Spróbujmy w podobnym stylu sformułować rozumowanie, przemawiające za przyjęciem refleksji dla ZFC. Oto przesłanki:

(4) Aksjomaty ZFC to zbiór postulatów znaczeniowych, określających sens predykatu należenia do zbioru (zbiór postulatów znaczeniowych dla „$\in$”).

(5) Zdanie φ jest $\in$-analityczne wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest konsekwencją postulatów znaczeniowych dla „$\in$”.

(6) Jeśli φ jest $\in$-analityczne, to jest tak, jak głosi φ.

Zgodnie z zacytowanym uprzednio fragmentem tekstu Halbacha, zarówno finitysta, jak platonik może przyjąć przesłanki (4) i (5) (nazwanie danego zdania $\in$-analitycznym to „tylko nasza terminologiczna decyzja”). Co jednak począć z przesłanką (6)? Rekonstruując wcześniej argument Halbacha przyjąłem, że przesłanka (3) (w obecnym kontekście: przesłanka (6)) jest postulatem znaczeniowym dla pojęcia *Tr*-analityczności ($\in$-analityczności). Problem z tą opcją polega jednak na tym, że wydaje się ona niezgodna z tym, co twierdzi Halbach — otóż jeśli (6) ma być postulatem znaczeniowym, to nazwanie zdania $\in$-analitycznym jest zdecydowanie czymś więcej niż „tylko terminologiczną decyzją”. Dla platonika (6) jest przecież nie do przyjęcia; domagałby się on dodatkowego argumentu, przemawiającego na rzecz tej przesłanki. Zacytujmy w tym kontekście jeszcze jeden fragment z rozważanego artykułu Halbacha:

> Ogólnie rzecz biorąc, nie proponuję zastąpienia aksjomatów teorii przez […] zasadę refleksji dla tej teorii. Przejście od danej teorii do zasady refleksji dla tej teorii *wymaga bowiem uzasadnienia*. W przypadku dyskwotacjonisty, uzasadnienia tego dostarcza zwrócenie uwagi na modalny status dyskwotacyjnych zdań, tj. argumenty na rzecz ich analityczności.[24]

Refleksja wymaga więc uzasadnienia. Jakimże jednak uzasadnieniem dysponuje dyskwotacjonista? Na czym polega „argument na rzecz analityczności” dyskwotacyjnych zdań? W świetle powyższego, nie wystarczy zwrócić uwagę na fakt, że pełnią one rolę postulatów znaczeniowych. Sam Halbach przyznaje przecież, że przesłankę (4) może uznać również finitysta i nie zobowiązuje go to bynajmniej do uznania refleksji dla ZFC. Wygląda więc na to, że nie tylko platonik, ale również dyskwotacjonista potrzebuje tu jakiegoś dodatkowego argumentu. Całe rozumowanie Halbacha staje się w efekcie co najmniej niejasne.

---

[24] Halbach [2001], s. 1963; moja kursywa.

Uwaga 3. Halbach zbyt łatwo przechodzi do porządku dziennego nad znanymi wątpliwościami, dotyczącymi pojęcia analityczności. Pisze:

> Możemy dysponować dokładnie określonym zbiorem postulatów znaczeniowych dla danego pojęcia i w ten sposób uniknąć zarzutów Quine'a. Dotyczy to w szczególności przypadku dyskwotacyjnej prawdy, która scharakteryzowana jest poprzez fakt, że jej znaczeniem rządzą dyskwotacyjne zdania.[25]

Zarzuty Quine'a nie polegają jednak na tym, że zbioru postulatów znaczeniowych (dla danego pojęcia czy też dla zestawu pojęć) nie da się dokładnie określić. Zawsze możemy przecież wykonać zabieg polegający na precyzyjnym zdefiniowaniu jakiegoś zbioru zdań *K* i nazwaniu elementów tego zbioru „postulatami znaczeniowymi". Stopień dokładności nie ma tu nic do rzeczy. Quine'owi chodzi raczej o to, że po wykonaniu jakiegokolwiek takiego zabiegu wciąż nie będziemy mieli prawa twierdzić, że zdania należące do zbioru *K* są „prawdziwe na mocy znaczenia" w odróżnieniu od „prawdziwe na mocy faktów"; nie możemy w związku z tym wykorzystywać intuicji „prawdziwości na mocy znaczenia" w dowodach, w których posługujemy się naszym określeniem zbioru *K*.[26] Tymczasem właśnie to próbuje robić Halbach: definiuje (precyzyjnie) zbiór UDS w terminach czysto syntaktycznych, a następnie wykorzystuje intuicję analityczności, aby argumentować na rzecz zasady refleksji dla UDS. W związku z tym krytyk powinien zapytać: na czym dokładnie miałaby polegać „prawdziwość na mocy znaczenia" elementów zbioru UDS? Zamiast UDS, spróbujmy rozważyć dowolny zbiór *Z* akceptowanych przez nas zdań. Czy dla takiego *Z* również powinniśmy zaakceptować zasadę refleksji? Jeśli tak, to czy pozostaje tu jakiekolwiek miejsce dla pojęcia analityczności? A jeśli nie, to na czym dokładnie polega różnica pomiędzy przypadkiem UDS a przypadkiem dowolnego zbioru zdań, uznawanych przez nas za prawdziwe? Sądzę, że w tych właśnie kierunkach uderzałoby ostrze Quine'owskiej krytyki. Na te pytania Halbach nie odpowiada.

5. PODSUMOWANIE

Obrona stanowiska dyskwotacjonisty, zawarta w pracach Horwicha i Halbacha, wydaje mi się nieprzekonująca. Ani wprowadzenie ω-reguły, ani apelowanie do pojęcia analityczności nie pomaga dyskwotacjoniście w przezwyciężeniu problemu zdań ogólnych. To jednak nie znaczy, że dyskwotacjonista nie może w żaden sposób skorzystać z formalnych wyników uzyskanych przez Halbacha. Jak widzieliśmy, jeśli posłuży się aksjomatami refleksji, uzyska silną teorię — zapewne wystarczająco silną do jego celów. Czy jednak mamy przyznać mu prawo do wprowadzenia takich aksjomatów? Nie widzę w tym kontekście roli dla pojęcia analityczności; wciąż nie

[25] Halbach [2001], s. 1962.
[26] Dokładniej omawiam tę kwestię w moim artykule [2008].

jest jednak wykluczone, że refleksja daje się uzasadnić w jakichś innych terminach. Czy taka alternatywna strategia istnieje? To pytanie pozostaje otwarte.[27]

BIBLIOGRAFIA

CARNAP RUDOLF

[1947] *Meaning and Necessity: a Study in Semantics and Modal Logic*, University of Chicago Press, Chicago.

CIEŚLIŃSKI CEZARY

[200?] „Truth, Conservativeness, and Provability", *Mind*, w druku.

[2008] „Willard Van Orman Quine o prawdzie i analityczności", *Przegląd Filozoficzny*, 4, w druku.

GUPTA ANIL

[1993] „Minimalism", *Philosophical Perspectives* 7, s. 359-369.

HALBACH VOLKER

[1999] „Disquotationalism and infinite conjunctions", *Mind* 108, s. 1-22.

[2001] „Disquotational truth and analyticity", *Journal of Symbolic Logic* 66, s. 1959-1973.

HAJEK PETR I PUDLAK PAVEL

[1993] *Metamathematics of First Order Arithmetic*, Springer Verlag, Berlin.

HORWICH PAUL

[1998] *Truth*, Basil Blackwell, Oxford. II wyd.

QUINE WILLARD VAN ORMAN

[1951] „Two dogmas of empiricism", *The Philosophical Review* 60, s. 20-43. Przekład polski „Dwa dogmaty empiryzmu", [w:] W. V. Quine, *Z punktu widzenia logiki,* Aletheia, Warszawa 2000, s. 49-77, przeł. Barbara Stanosz.

RAATIKAINEN PANU

[2005] „On Horwich's way out", *Analysis* 65, s. 175-177.

[27] Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2009 jako projekt badawczy nr NN101034235.