Filozofia Nauki
Rok XVIII, 2010, Nr 4(72)

Wojciech Krysztofiak

Multi-temporalne struktury obliczeniowe
Indeksowane liczby naturalne w świetle arytmetyki kognitywnej

Celem artykułu jest pokazanie tego, że jeśli przyjmiemy Kanta koncepcję arytmetyki, zgodnie z którą jej przedmiotem poznania jest aprioryczna forma czasu, to forma ta ma strukturę multi-temporalną i stanowi ona model arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych.[1] Innymi słowy, jeśli umysł posiada zakodowaną apriorycznie formę czasu (zgodnie z kognitywnym kantyzmem), to jej struktura nie jest reprezentowana przez dyskretną półprostą, lecz jest reprezentowana przez pęk takich półprostych.

Weryfikacja zaprezentowanej hipotezy powinna skutkować zmianą modelu akwizycji arytmetycznego systemu kompetencyjnego, akceptowanego w ramach arytmetyki kognitywnej.[2] Otóż, przyjmuje się, że umysł posiada kompetencję do przeprowadzania rozmaitych obliczeń. Jej rdzeniem jest tak zwany „zmysł liczebności” (*number sense, numerosity sense*), manifestujący się w czynnościach intuicyjnego ujmowania wielu, aczkolwiek „prostych”, faktów arytmetycznych.[3] Funkcjonuje

[1] Arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych jest przedstawiona w pracy [Krysztofiak 2008].

[2] Arytmetyka kognitywna stanowi dział psychologii poznawczej czy też nauk kognitywnych, którego celem jest rekonstrukcja rozmaitych systemów reprezentacji liczbowych warunkujących czynności obliczeniowe umysłu. Zgodnie z podstawowym założeniem badań kognitywno-arytmetycznych, aktywowanie się w umyśle określonych reprezentacji arytmetycznych stanowi warunek wykonywania przez umysł rozmaitych czynności obliczeniowych. W szczególności arytmetyka kognitywna zajmuje się zagadnieniem akwizycji przez umysł tych reprezentacji. Na gruncie rozmaitych modeli próbuje się również wyjaśnić fakty rozmaitych deficytów człowieka w obszarze posługiwania się liczbami — określanych jako dyskalkulia [zob. Ashcraft 1992, Butterworth 2005]. Współcześnie arytmetyka kognitywna stanowi niezwykle szybko rozwijającą się dyscyplinę badawczą.

[3] Na zmysł liczebności składają się, dla przykładu, takie oto nasze umiejętności: wiemy, iż pomiędzy 3 i 6 są jeszcze dwie liczby naturalne; wiemy, że 999 jest większe od 9, że liczba 271 jest

on w umyśle dopiero wówczas, kiedy zostanie w nim zakodowana podstawowa reprezentacja arytmetyczna, określana jako lista liczebników lub liniowa reprezentacja liczb. Wskazuje się jednak, że nie w każdym języku występują zasoby leksykalne umożliwiające umysłowi jego odniesienie do dowolnych elementów tej listy (liczb). Co więcej, zwraca się uwagę na to, że choć w pewnych językach występują jedynie dwa bądź trzy liczebniki, to takie społeczności językowe potrafiły wytworzyć nielingwistyczne techniki liczenia za pomocą kamyków, karbów czy też patyczków (wykorzystujące zasadę odpowiedniości: jeden-jeden). Oznacza to, że użytkownicy takiego języka, choć nie liczą symbolicznie (przy pomocy słów), to jednak są w stanie opanować podstawowe umiejętności obliczania.[4] Praktyka obliczeniowa jako system czynnościowy podmiotu jest wówczas wyjaśniana jako system algorytmów określających efektywne działania na owej podstawowej reprezentacji.[5] Arytmetycy kognitywni różnią się jednak w opisie etiologii owej listy liczebników. Współcześnie akceptowane są co najmniej trzy konkurencyjne modele akwizycji liniowej reprezentacji liczb. Są one weryfikowane lub falsyfikowane w oparciu o badania eksperymentalne nad praktykami obliczeniowymi zwierząt oraz niemowląt i dzieci.[6]

---

pomiędzy 200 i 300 i że dodanie dowolnej liczby naturalnej do danej liczby naturalnej zawsze daje liczbę większą, czy też że 12 + 15 nie może być równe 96. Tego rodzaju wiedzę, nawiązując do Russella, Giaquinto określa jako bezpośrednią znajomość liczb i ich własności. Odróżnia ją od arytmetycznej wiedzy przez opis. Według tego autora, nasza bezpośrednia znajomość z liczbami kardynalnymi (reprezentacjami liczności) ma charakter wrodzony („There is evidence that we have an innately given magnitude representation of rough cardinal size, or *numerosity*, with a neural basis in the interior parietal lobes") [Giaquinto 2001, s. 10]. Dehaene z kolei tę zdolność określa jako zmysł liczby (*the number sense*), który jest biologicznie i ewolucyjnie zdeterminowany. Tak, jak zdrowy człowiek nie może uniknąć widzenia przedmiotów w kolorze, tak też i nie może uniknąć ich liczenia [zob. Dehaene 2001, s. 16-36].

[4] Taką grupą językową jest współczesne plemię Mundurku z Amazonii. W ich języku występują jedynie słowa stanowiące odpowiedniki trzech pierwszych liczebników. Mimo to przedstawiciele tego plemienia wykazują umiejętności odróżniania wielkich liczebności, a nawet potrafią dodawać i odejmować je w sposób przybliżony, co nie odróżnia ich od przedszkolnych, amerykańskich dzieci [zob. Spelke, Kindler 2007, s. 89-96], [zob. Pica, Lemer, Izard, Dehaene 2004, s. 499-503]. Etnolodzy i podróżnicy (Tylor, Hunt, Dobrizhoffer i inni) opisują wiele „dzikich" ludów (Botokudowie z Brazylii, tubylcy z wysp Murray, z wysp Cieśniny Torresa czy Abiponowie), których języki wykorzystują jedynie trzy liczebniki: *jeden, dwa, dużo* [zob. Ifrah 2006, s. 46-48].

[5] Dehaene uważa, że podstawowa lista liczebników jest derywowana w trakcie rozwoju dziecka z analogowego systemu reprezentującego wielkość (system ten jest wspólny ludziom i wielu zwierzętom) [zob. Dehaene, 2001, s. 16-36]. Carey nie zgadza się z takim stanowiskiem. Autorka ta twierdzi, że podstawowa lista reprezentacji liczbowych nie posiada charakteru analogowego, że nie jest rdzennym systemem reprezentowania świata oraz że jest kulturową konstrukcją [zob. Carey 2001, s. 37-55]. Giaquinto również wyraża rezerwę względem „analogowej koncepcji" nabywania umiejętności liczenia [zob. Giaquinto 2001b, s. 56-68].

[6] Każdy z tych modeli zbudowany jest na gruncie schematu uznającego istnienie systemów wiedzy rdzennej (*core knowledge*) [na temat wiedzy rdzennej, zob. Spelke, Kindler 2007a, s. 89-96; Spelke, Kindler 2007b, s. 257-264]. Zakłada się, że liniowa reprezentacja liczb naturalnych jest wy-

W artykule próbuje się pokazać, że zakładany schemat rozwoju kompetencji arytmetycznej, zgodnie z którym istnieją dwie makro-fazy tego rozwoju (okres do zakodowania zintegrowanej listy liczebników oraz okres rekurencyjnego konstruowania złożonych algorytmów i technik obliczeniowych w oparciu o tę listę liczebników)[7], jest błędny, gdyż nie da się wyjaśnić wielu arytmetycznych dziecięcych umiejętności obliczeniowych jako technik derywowanych z systemu owej zintegrowanej listy liczebników. W niniejszej pracy stawia się hipotezę konkurencyjną, mianowicie, że punktem wyjścia w rekurencyjnym generowaniu wyrafinowanych algorytmów obliczeniowych przez „dojrzały" umysł jest akwizycja przezeń systemu zintegrowanego pęku list liczebników (a nie: jednej listy). Teorią tego systemu jest właśnie arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych.

Hipoteza, że dojrzały matematycznie umysł ludzki, zdolny do rozwiązywania prostych zadań z treścią na dodawanie i mnożenie, posługuje się pękiem list liczebników, a nie jedną taką listą, wymaga empirycznej weryfikacji w postaci odpowiednio skonstruowanego eksperymentu. Taki eksperyment powinien dodatkowo falsyfikować hipotezę konkurencyjną, według której umysł posługuje się zawsze jedną listą

---

generowana z jednego lub kilku takich systemów. Model analogowy zakłada, że umysł ludzki, a także umysły wielu gatunków zwierząt, posiadają zdolność do analogowego i przybliżonego reprezentowania liczności doświadczanych zbiorów, kolekcji czy też zbiorowisk. Dzięki tej zdolności umysł jest w stanie porządkować pod względem liczności rozmaite zbiory czy zbiorowiska obiektów. Tak jak w wypadku wszystkich zmysłów, liczący umysł ludzki podlega prawu Fechnera–Webera, określającemu nasze zdolności dyskryminacyjne względem bodźców, a w tym wypadku — liczbowych (im wyższe poziomy liczności tym trudniej rozdzielić te liczności, przy danej różnicy w liczności zbiorowisk). Poprzez praktykę w estymowaniu przybliżonych liczności, umysł koduje w sobie reprezentację skompresowanej listy przybliżonych liczb naturalnych. Z niej następnie generuje standardową reprezentację listy „dokładnych" liczb naturalnych, która stanowi podstawę dojrzałego myślenia arytmetycznego [zob. Dehaene 2001, s. 16-36], [zob. Gelman, Gallistel 2004, s. 441-443]. Według innej teorii, podpadającej pod pierwszy paradygmat, lista dokładnych liczb naturalnych jest kodowana na gruncie reprezentacji przybliżonych liczb naturalnych oraz schematu implikatury skalarnej Grice'a [zob. Barner, Bachrach 2010, s. 40-62]. Drugi model bazuje na systemie wyznaczającym zdolności umysłu do tworzenia zdygitalizowanych, liniowych porządków. Takimi porządkami są na przykład słowa oznaczające kolejne dni tygodnia. Zdolność ta umożliwia umysłowi dziecka wytworzenie liniowego porządku liczebników (słów służących liczeniu), który następnie jest używany w procesie oszacowywania liczności doświadczanych zbiorowisk. Dzięki temu następuje w umyśle związanie go z reprezentacjami rozmaitych obiektów. W ten sposób dochodzi do ukonstytuowania się w umyśle reprezentacji liczb naturalnych [zob. Carey 2001, s. 37-55]. Trzeci model zakłada, że zarówno analogowa reprezentacja przybliżonych liczności, jak i czysto syntaktyczne reprezentacje liniowych porządków słów (liczebników) stanowią podstawowe systemy uczestniczące w wygenerowaniu reprezentacji liczb naturalnych [zob. Condry, Spelke 2008, s. 22-28].

[7] Pierwsza faza rozwoju umiejętności obliczeniowych jest jeszcze rozczłonkowywana na okresy opanowywania przez dziecko podstawowych liczebników: *jeden*, *dwa*, *trzy*, *cztery*. Znaczenie liczebnika *jeden* dziecko opanowuje w wieku od 6-go do 12-go miesiąca. Wynn podaje precyzyjne kryterium eksperymentalne rozstrzygania tego, czy dziecko jest kompetentnym użytkownikiem danego liczebnika [zob. Wynn 1990, s. 155-193], [zob. Wynn 1992, s. 220-251].

liczebników w trakcie rozwiązywania prostych zadań arytmetycznych. Dotychczas jednak nie skonstruowano żadnego eksperymentu, który weryfikowałby hipotezę o jednej zintegrowanej liście liczebników zakodowanej w umyśle. Hipoteza ta funkcjonuje w badaniach z zakresu arytmetyki kognitywnej jako dogmat.[8]

Pierwsza część artykułu jest poświęcona konstrukcji klasycznego modelu czynności poznawczych aktywowanych przez umysł dziecka przy rozwiązywaniu pewnego typu arytmetycznych zadań. Model ten jest poddany krytyce, gdyż wymaga on od dziecka stosowania bardzo wyrafinowanych operacji teoriomnogościowych. W drugiej części jest naszkicowane wyjaśnienie tego, że umysł jest w stanie wykonać czynności poznawcze, potrzebne do rozwiązania zaprezentowanego typu zadań arytmetycznych bez odwoływania się do wyrafinowanych operacji teoriomnogościowych. Takie wyjaśnienie sprowadza się do wykazania tego, że umysł dziecka, rozwiązując zaprezentowany typ zadań, wykorzystuje struktury formalne generowane przez arytmetykę indeksowanych liczb naturalnych. W trzeciej części jest zaprezentowana aksjomatyka indeksowanych liczb naturalnych, na gruncie której „umysł obliczeniowy" dziecka konstruuje multi-temporalny (wieloosiowy) model arytmetyczny, umożliwiający wygenerowanie reprezentacji obliczeniowych wymaganych do rozwiązania prostych zadań arytmetycznych „na dodawanie". W ten sposób wskazana również zostanie dziedzina aplikacji arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych.

1. MODEL KLASYCZNY CZYNNOŚCI OBLICZENIOWYCH: ZADANIA ARYTMETYCZNE

W badaniach empirycznych z zakresu pedagogiki matematyki próbuje się rekonstruować rozmaite modele technik poznawczych wykorzystywanych przez umysł podczas rozwiązywania rozmaitych typów prostych zadań matematycznych. W szczególności opracowywane są techniki wizualizacyjne. Jedną z pierwszych prac na ten temat jest książka [Sawyer 1964], w której autor próbuje konstruować rozmaite wizualizacyjne modele dla ułamków, liczb ujemnych i operacji dokonywanych na tych kategoriach liczbowych.

Modele czynności obliczeniowych wykonywanych przez umysł w trakcie rozwiązywania matematycznych zadań z treścią są konstruowane na gruncie rozmaitych koncepcji kognitywistycznych, zakładających istnienie kompetencji obliczeniowej. Mo-

[8] W żadnym z komentarzy (w liczbie trzydziestu jeden, których autorami są niekiedy dwie lub trzy osoby) do artykułu [Rips, Bloomfield, Asmuth 2008], napisanych przez najważniejszych badaczy zajmujących się arytmetyką kognitywną, nie występuje nawet sugestia, która mogłaby sygnalizować to, że podstawą szkolnej arytmetyki nie jest zintegrowana liczba dokładnych liczebników, lecz całkowicie odmienna struktura arytmetyczna. W komentarzu [Halberda, Feigenson 2008] zasugerowane jest to, że nabycie pojęcia liczby naturalnej wymaga dodatkowo innej rdzennej zdolności — mianowicie zdolności do posługiwania się pojęciem zbioru, manifestującej się w „spajaniu indywiduów w zbiory".

dele te mają funkcjonować analogicznie, jak programy eksperckie rozwiązujące określone problemy [Briars, Larkin 1984, s. 247-249]. Według klasycznego modelu, proces rozwiązywania zadania przebiega w dwóch fazach. Na pierwszą fazę składa się szereg uporządkowanych czynności, składających się na analizę semantyczną tekstu zadania [Riley, Greeno, Heller 1983]. Podmiot rozwiązujący zadanie na mocy tych czynności generuje reprezentację arytmetyczną zadania, która jest jakąś formułą ze zmienną wolną. W drugiej fazie, na mocy przekształceń reprezentacji na wejściu, podmiot dochodzi do sformułowania rozwiązania zadania. Sukces zasadniczo zależy od poziomu kompetencji podmiotu w zakresie jego analizy semantycznej. W tej fazie podmiot analizuje każde słowo tekstu zadania i przyporządkowuje mu określony byt arytmetyczno-teoriomnogościowy.[9] To klasyczne podejście do modelowania czynności poznawczych wykonywanych w trakcie rozwiązywania prostych, arytmetycznych zadań z treścią presuponuje koncepcję dwumodułowości podstawowej kompetencji arytmetycznej. Na pierwszy moduł składają się struktury arytmetyczno-teoriomnogościowe, które można opisać na gruncie języka arytmetyki i teorii mnogości.[10] Ten moduł jest odpowiedzialny za generowanie właśnie takich struktur arytmetyczno-teoriomnogościowych. Może on funkcjonować w umysłach na rozmaitych poziomach kompetencyjnych. Jeśli na przykład dziecko nie rozumie operacji mnożenia, to jego moduł arytmetyczno-teoriomnogościowy nie wygeneruje struktur o postaci: $A \cdot B = ?$ Drugi moduł jest odpowiedzialny za konstruowanie schematów przekładu treści zadań arytmetycznych na struktury generowane przez pierwszy moduł. Współczesne badania kognitywistyczne w zakresie modelowania strategii rozwiązywania zadań arytmetycznych są skoncentrowane na rekonstruowaniu rozmaitych programów „translatorskich" składających się na ten właśnie moduł.[11]

Przez klasyczny model wyjaśniający zdolności dziecka do rozwiązywania prostych zadań arytmetycznych rozumiemy model, w myśl którego proces rozwiązywania zadania arytmetycznego jest dwufazowy: najpierw umysł generuje — za pomocą pierwszego modułu — potencjalne reprezentacje (struktury) arytmetyczno-teoriomnogościowe, następnie za pomocą któregoś z programów składających się na drugi moduł „dopasowuje" którąś z aktywowanych struktur do treści zadania. W niniejszej

---

[9] W pracy [Riley, Greeno, Heller 1983] analizowane jest takie oto zadanie: *Joe miał pięć klocków. Następnie Tom dał mu trzy klocki. Ile Joe ma teraz klocków?* Na mocy analizy semantycznej, podmiot rozwiązujący zadanie nazwom własnym przyporządkowuje określone zbiory. Czasownik *miał* zinterpretuje jako przyporządkujący liczność pierwszemu ze zbiorów. Z kolei czasownikowi *dał* przyporządkuje operację powiększenia pierwszego ze zbiorów o określoną ilość klocków z drugiego ze zbiorów. Ostatecznie podmiot formatuje reprezentację zadania jako równanie: $A + B = ?$

[10] Wielu autorów podkreśla fakt, że w procesach rozwiązywania zadań z treścią dzieci angażują umiejętność identyfikowania wielu relacji teoriomnogościowych (zob. na ten temat [Cummins 1991]).

[11] W pracy [Briars, Larkin 1984] jest zrekonstruowany taki program (model) — nazwany przez autorów jako CHEAPS (concrete human-like inferential problem solver) — który pozwala symulować strategie rozwiązywania prostych zadań arytmetycznych kilku typów (autorzy klasyfikują nawet te typy zadań).

pracy kwestionowany jest właśnie klasyczny sposób rozumienia pierwszego z modułów. Umysł siedmioletniego dziecka, aby rozwiązać wyszczególnione poniżej zadania z treścią, musiałby — za pomocą pierwszego z modułów — generować „mieszane” (hybrydowe) struktury teoriomnogościowo-arytmetyczne o wysokim stopniu złożoności. W świetle proponowanego w pracy ujęcia pierwszego z modułów, umysł dziecka przy rozwiązywaniu analizowanych zadań nie musi generować tak złożonych reprezentacji i co więcej — nie musi syntetyzować hybryd arytmetyczno-teoriomnogościowych.

Standardowo rozwinięty intelektualnie siedmiolatek jest w stanie rozwiązać następujące zadania arytmetyczne:

(1) *Jaś miał trzy jabłka, przyszła mama z pracy i dała Jasiowi dwie gruszki. Ile Jaś ma owoców?*

(2) *Jaś miał dwie śliwki. Przyszedł tata z pracy i dał Jasiowi dwa jabłka. Potem mama dała Jasiowi jeszcze trzy cukierki. Ile Jaś ma owoców?*

(3) *Jaś miał dwa jabłka. Mama dała Jasiowi trzy cukierki. Przyszedł tata i dał Jasiowi jeszcze dwa batony. Siostra Jasia, Małgosia miała dwie gruszki i dwa cukierki. Ile owoców razem mieli Jaś i Małgosia?*

Aby opisać to, jakie czynności poznawcze umysł dziecka wykonuje przy rozwiązywaniu zaprezentowanych zadań, należy najpierw dokonać opisu ich struktury formalno-arytmetycznej. Szkicowo, można przypisać następujące struktury formalno-arytmetyczne wymienionym zadaniom:

(1) $\mathbf{3_j + 2_g = ?}$

(2) $\mathbf{(2_s + 2_j) + 3_c = ?}$

(3) $\mathbf{[(2_j + 3_c) + 2_b] + 4_{g \cup c} = ?}$

Przedstawione równości należy rozumieć w taki sposób, że ich lewe strony stanowią opis operacji formalnych, jakie umysł dziecka wykonuje, aby uzyskać wynik symbolizowany indeksowaną zmienną po prawej stronie (znakiem zapytania). We wszystkich opisach operacji wykonywanych przez umysł, występują indeksowane cyfry. Jaki typ struktur one reprezentują? Można zrekonstruować struktury formalne opisywane przez wyszczególnione równości na gruncie teorii liczb kardynalnych.

Zanalizujmy z tego punktu widzenia pierwszą z równości. Indeksowane cyfry można pojmować jako złożone predykaty, których argumentami są nazwy zbiorów. Nazwijmy je predykatami liczności kategorialnej, czyli predykatami z uwagi na kategorię obiektów. W analizowanym wypadku, wyrażenia: „$\mathbf{3_j}$”, „$\mathbf{2_g}$”, mogą być czytane: *trój-jabłkowość*, *dwój-gruszkowość*. Przyjmijmy następującą definicję predykatów liczności kategorialnej. Niech „**x**” będzie zmienną liczebnikową arytmetyki liczb kardynalnych; niech „**A**”, „**B”** będą zmiennymi przebiegającymi zbiór potęgowy zbioru uniwersalnego indywiduów; i w końcu niech „***L***” będzie stałą funkcyjną oznaczającą funkcję liczności (mocy zbioru) określoną na zbiorach i przyporządkowującą im liczby kardynalne.

(Df 1) $\mathbf{x_A(B) \equiv \mathit{L}(B) = x \wedge B \subset A}$

Definicja (Df 1) pokazuje sposób konstrukcji predykatów liczności kategorialnej, którymi operuje dziecko przy rozwiązywaniu wyszczególnionych zadań.

Dziecko rozwiązując pierwsze zadanie operuje więc trzema zbiorami na wejściu: trój-jabłkowym zbiorem **A**, czyli takim, że $\mathbf{3_j(A)}$, dwój-gruszkowym zbiorem **B**, czyli takim, że $\mathbf{2_g(B)}$ oraz sumą zbiorów **A i B**. Zadanie ma więc postać znalezienia stałej liczebnikowej, która wstawiona w miejsce zmiennej w wyznaczonej funkcji zdaniowej daje zdanie prawdziwe. Postać tej funkcji zdaniowej można zapisać następująco:

$$\mathbf{3_j(A) \wedge 2_g(B) \rightarrow x_o(A \cup B)}.$$

Rozwiązaniem zadania jest zdanie o postaci: (1) $\mathbf{3_j(A)} \wedge \mathbf{2_g(B)} \rightarrow \mathbf{5_o}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$. Umysł dziecka rozwiązującego analizowane zadanie musi przesłankę: $\mathbf{3_j(A)} \wedge \mathbf{2_g(B)}$, przekształcić na wniosek: $\mathbf{5_o}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$. Stosując do (1) definicję (DF 1), otrzymujemy następujące zdanie:

(2) $(\boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{3} \wedge \mathbf{A} \subset \mathbf{j}) \wedge (\boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2} \wedge \mathbf{B} \subset \mathbf{g}) \rightarrow (\boldsymbol{L}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{5} \wedge \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \subset \mathbf{o})$

Jest oczywiste, że zdania (2) nie da się udowodnić bez dodatkowych założeń (danych). Umysł musi dodatkowo, analizując treść zadania, wyekstrahować z niej następujące założenia: (3) $\mathbf{j} \subset \mathbf{o}$; (4) $\mathbf{g} \subset \mathbf{o}$; (5) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$. Ostatecznie więc, umysł dziecka rozwiązujący zadanie pierwsze, przeprowadza inferencję o postaci:

(6) $[\mathbf{j} \subset \mathbf{o}, \mathbf{g} \subset \mathbf{o}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{3}, \mathbf{A} \subset \mathbf{j}, \boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2}, \mathbf{B} \subset \mathbf{g}] \vdash [\boldsymbol{L}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{5} \wedge \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \subset \mathbf{o}]$

Przyjmijmy następujący warunek definicyjny dla funkcji liczności:

(DF 2) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing \rightarrow [\boldsymbol{L}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \boldsymbol{L}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})]$

Inferencja (6), na gruncie (DF 2), jest poprawną logicznie inferencją. Z danych na wejściu: (i) $\mathbf{j} \subset \mathbf{o}$, (ii) $\mathbf{g} \subset \mathbf{o}$, (iii) $\mathbf{A} \subset \mathbf{j}$, (iv) $\mathbf{B} \subset \mathbf{g}$, umysł dziecka wyprowadza strukturę: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \subset \mathbf{o}$. Natomiast z danych: (v) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, (vi) $\boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{3}$, (vii) $\boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2}$, na mocy reprezentacji wyznaczonej przez definicję (DF 2), dziecko generuje reprezentację: $\boldsymbol{L}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{5}$. Opisane procesy wymagają kompetencji w inferencyjnym operowaniu: zbiorem pustym, relacją inkluzji oraz operacjami: sumy oraz iloczynu zbiorów, a także funkcją liczności (mocy zbiorów) wraz z arytmetyczną operacją dodawania. Zaprezentowana analiza pokazuje, że aby rozwiązać zadanie pierwsze umysł dziecka musi „wykroczyć" poza kompetencje obliczeniowe arytmetyki liczb naturalnych; musi dodatkowo być biegły w przekształcaniu wielu reprezentacji teoriomnogościowych. Czy standardowo rozwinięty siedmiolatek operuje takimi strukturami teoriomnogościowymi? Zanim odpowiemy na to pytanie, przeanalizujmy drugie zadanie.

Drugie zadanie można skonceptualizować jako generujące reprezentację: $(\mathbf{2_s} + \mathbf{2_j}) + \mathbf{3_c} = \mathbf{x_o}$. Pomimo formalnego podobieństwa z zadaniem pierwszym, ujawniającego się w zapisie, rozwiązanie drugiego zadania wymaga umiejętności posługiwania się dodatkowymi strukturami teoriomnogościowymi. Gdyby dziecko postępowało w analogiczny sposób, jak w pierwszym zadaniu, musiałoby podać fałszywą odpowiedź: *7 owoców*. Zwykle jednak podaje prawdziwą odpowiedź: *cztery owoce*. Różnica między zadaniem pierwszym i drugim dotyczy tego, że w pierwszym z nich umysł dziecka posługuje się operacją sumy zbiorów, w drugim zaś z nich — posługuje się indeksowaną z uwagi na kategorię sumą zbiorów. Definicja tego operatora jest następująca:

(DF 3) $\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cup_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \equiv (\mathbf{x} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{C} \vee \mathbf{x} \in \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$

Zgodnie z (DF 3) jeśli ze zbiorem jabłek zostanie zsumowany z uwagi na kategorię owoców zbiór cukierków, to w wyniku tej operacji otrzymamy dany na wejściu zbiór jabłek, gdyż każdy zbiór cukierków jest rozłączny z dowolnym zbiorem owoców. Rozwiązanie drugiego zadania można reprezentować jako dowód następującej inferencji:

(I 2) $[\mathbf{s} \subset \mathbf{o}, \mathbf{j} \subset \mathbf{o}, \mathbf{A} \subset \mathbf{s}, \mathbf{B} \subset \mathbf{j}, \boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}, \boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing, \mathbf{C} \subset \mathbf{c}, \mathbf{c} \cap \mathbf{o} = \varnothing] \vdash [\boldsymbol{L}((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup_{\mathbf{o}} \mathbf{C}) = \mathbf{4} \wedge ((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup_{\mathbf{o}} \mathbf{C}) \subset \mathbf{o}]$

Wniosek w (I 2) można zredukować do formuły: $\mathbf{4_o}((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup_{\mathbf{o}} \mathbf{C})$. Udowodnienie (I 2) wymaga posługiwania się procedurą obliczania liczności dla struktur teoriomnogościowych kształtu: $\mathbf{A} \cup_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$. Na mocy definicji (Df 3) można udowodnić równość: (T1) $\mathbf{A} \cup_{\mathbf{C}} \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$. Na mocy (T 1) zachodzi równość: (T 2) $((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup_{\mathbf{o}} \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{o}$. Liczność zbioru po lewej stronie równości (T2) jest identyczna z licznością zbioru po prawej stronie (T2): (T 3) $\boldsymbol{L}((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup_{\mathbf{o}} \mathbf{C}) = \boldsymbol{L}((\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{o})$. Na mocy założeń inferencji (I 2), umysł rozwiązujący zadanie drugie generuje równość: $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{o} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ (tak jest, gdyż: $\mathbf{C} \cap \mathbf{o} = \varnothing$ oraz $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \subset \mathbf{o}$). Wówczas wnioskuje: skoro $\boldsymbol{L}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{4}$ (tę informację generuje z przesłanek: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, $\boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2}$, to $\boldsymbol{L}((\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{o}) = \mathbf{4}$. Kompetencja logiczna warunkująca rozwiązanie zadania drugiego wymaga więc dodatkowo od umysłu dziecka — w porównaniu z umiejętnościami potrzebnymi do rozwiązania zadania pierwszego — umiejętności generowania indeksowanych operacji teoriomnogościowych. W wypadku analizowanego zadania sumowanie arytmetyczne poszczególnych liczności zbiorów dałoby wynik fałszywy. Umysł dziecka musi więc posiadać takie zdolności, aby struktura funkcyjna o postaci: $\boldsymbol{L}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C})$, była przezeń klasyfikowana jako niewłaściwa dla rozwiązania zadania drugiego. W tym celu umysł musi wygenerować operację indeksowanej sumy zbiorów, aby posłużyć się nią zgodnie z opisanym mechanizmem inferencyjnym, w celu rozwiązania zadania.

Kompetencje teoriomnogościowe wymagane dla rozwiązania zadania trzeciego są jeszcze bardziej złożone. W tym zadaniu dane są na wejściu cztery zbiory obiektów, które są pod względem swojej liczebności określone. Celem zadania jest wyznaczenie liczności piątego zbioru, uzyskanego w wyniku zastosowania operacji teoriomnogościowych do zbiorów na wejściu. Strukturę logiczno-arytmetyczną zadania trzeciego można przedstawić następująco: $\mathbf{2_j(A)} \wedge \mathbf{3_c(B)} \wedge \mathbf{2_b(C)} \wedge \mathbf{4_{s \cup c}(D)} \wedge \mathbf{2_s(D} \cap \mathbf{s)} \rightarrow \mathbf{x_o}[[(\mathbf{A} \cup_\mathbf{o} \mathbf{B}) \cup_\mathbf{o} \mathbf{C}] \cup_\mathbf{o} \mathbf{D}]$. Oczywiście, przekształcenie poprzednika na następnik w wyróżnionej implikacji dokonuje się na gruncie relacji teoriomnogościowych, które zachodzą pomiędzy kategoriami liczonych obiektów w zadaniu. Relacje te są następujące: (1) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, (2) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \varnothing$, (3) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{D} = \varnothing$, (4) $\mathbf{j} \subset \mathbf{o}$, (5) $\mathbf{s} \subset \mathbf{o}$, (6) $\mathbf{B} \cap \mathbf{o} = \varnothing$, (7) $\mathbf{C} \cap \mathbf{o} = \varnothing$, (8) $\mathbf{c} \cap \mathbf{o} = \varnothing$. Umysł rozwiązujący zadanie trzecie musi te zależności wyczytać z treści zadania oraz ze swojej zmagazynowanej wiedzy na temat relacji zachodzących pomiędzy słodyczami i owocami. Dodatkowa trudność analizowanego zadania, w porównaniu z zadaniem drugim, dotyczy złożoności predykatu liczności kategorialnej w wyrażeniu „$\mathbf{4_{s \cup c}(D)}$”. Rozwiązanie analizowanego zadania wymaga więc posiadania przez umysł dodatkowej kompetencji (w porównaniu z wcześniejszymi zadaniami), manifestującej się w umiejętności generowania złożonych predykatów liczności kategorialnej z uwagi na złożoność teoriomnogościową indeksu.

To, że typowy siedmiolatek jest w stanie bez trudu rozwiązać analizowane zadania, można próbować wyjaśnić poprzez odwołanie się do ich zrekonstruowanych struktur logiczno-arytmetycznych. Umysł dziecka musiałby podczas procesów obliczeniowych wykonywać, dodatkowo, wyszczególnione operacje teoriomnogościowe; przede wszystkim musiałby posługiwać się zbiorem pustym, operacjami: sumy, iloczynu, relacją inkluzji, funkcją liczby kardynalnej, prostymi predykatami liczności kategorialnej oraz złożonymi predykatami liczności kategorialnej. Bez wątpienia, wyszczególnione kompetencje oraz teoriomnogościową wiedzę umysł siedmiolatka musiałby stosować w sposób nieświadomy. Nie jest on bowiem w stanie opisać tego, co jego umysł „robi” podczas rozwiązywania analizowanych zadań. Takie wyjaśnienie wymuszałoby więc akceptację stwierdzenia, że podstawowe kategorie pojęciowe teorii mnogości, są przez umysł rozwijane autonomicznie, a nie poprzez praktykę uczenia się na wszelkich etapach edukacji. Wiedza w zakresie teorii mnogości musiałaby być traktowana jako należąca do tak zwanych rdzennych systemów wiedzy, a nie — jako ten rodzaj wiedzy, który posiada kulturową etiologię.

Zwraca się uwagę na fakt, że siedmioletnie dzieci posługują się w swoim myśleniu rozmaitymi strukturami klasyfikacyjnymi[12]; jednakże nie oznacza to wcale tego, że w tym wieku umysł opanowuje w sposób wszechstronny operacje: sumy, iloczynu, relację inkluzji czy w końcu — że jest w stanie operować zbiorem pustym. Co więcej, w świetle najnowszych koncepcji, rozwój pojęciowy umysłu bazuje na poję-

---

[12] Piaget twierdzi, że umiejętności klasyfikacyjne pojawiają się u dzieci dosyć wcześnie w ich rozwoju, mianowicie w okresie wczesnego dzieciństwa. Jednakże dopiero około ósmego roku życia dziecko przejawia umiejętności klasyfikowania operacyjnego (obejmującego hierarchizację zbiorów i podzbiorów, stosowanie wielu kryteriów, posługiwanie się tablicami czy w końcu macierzami) [zob. Piaget, Inhelder 1993, s. 99-100].

ciach czy też kategoriach rozmytych (prototypowych).[13] Wobec tego, zdolności posługiwania się kategoriami precyzyjnymi (ekstensjonalnymi) powinny uzewnętrzniać się dopiero w okresie nauki szkolnej dzieci. Doświadczenia dydaktyczne nauczycieli logiki pokazują, że opanowanie przez studenta rachunku zbiorów, w którym jest wymagane operowanie na kategoriach precyzyjnych, wymaga niezwykłego wysiłku. Gdyby bowiem zdolności operowania na zbiorach stanowiły pewien rodzaj rdzennej wiedzy, wówczas nauczanie rachunku zbiorów stanowiłoby proces „wydobywania" z umysłów studentów nieuświadomionej, wrodzonej wiedzy. Pozytywne efekty dydaktyczne nauczania rachunku zbiorów powinny być łatwo osiągalne. Fakty społeczno-dydaktyczne temu jednak przeczą.

W jaki więc sposób dzieci rozwiązują zaprezentowane zadania? Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, przeanalizujmy jeszcze jedno zadanie z treścią:

(4) *Jaś miał trzy jabłka, przyszła mama z pracy i dała Jasiowi dwa jabłka. Ile Jaś ma jabłek?*

Równanie, które dziecko napisze (lub wypowie), aby rozwiązać zadanie (4), ma postać następującą: $\mathbf{2 + 3 = ?}$ W wyniku procesu wydobywania z pamięci faktu arytmetycznego[14], poda poprawny wynik. Różnica między zadaniem (4) a zadaniami wcześniejszymi, polega na tym, że w wypadku (4), w odróżnieniu od pozostałych zadań, nie jest wymagana, w celu uzyskania poprawnego wyniku, żadna wiedza dotycząca relacji zachodzących między zbiorami (kategoriami) ani nie są wymagane umiejętności operowania na zbiorach. Umysł posługuje się tu wyłącznie liczebnikową reprezentacją liczb naturalnych i operacyjnymi umiejętnościami działania na liczebnikach (tabliczkę dodawania).

Pomiędzy zadaniem (4) a zadaniami (2) i (3) zachodzi jeszcze jedna różnica. Otóż, w arytmetycznych reprezentacjach zadań: (2) $\mathbf{(2_s + 2_j) + 3_c = ?}$; (3) $\mathbf{[(2_j + 3_c) + 2_b] + 4_{g\cup c} = ?}$, występuje „ślepe" dodawanie. W (2) fraza: $\mathbf{+ 3_c}$ oraz w (3) frazy: $\mathbf{+ 3_c}$ i $\mathbf{+ 2_b}$, są nierelewantne. Umysł traktuje je jako synonimiczne z arytmetyczną frazą: $+ \mathbf{0}$. Innymi słowy, operacje: $\mathbf{+ 3_c}$ oraz $\mathbf{+ 3_c}$ i $\mathbf{+ 2_b}$, są przez umysł unieważniane w procesie rozwiązywania zadań. Na pytania: *Dlaczego w zadaniu (2), a także w zadaniu (3) wyszło ci 4?*, dziecko odpowiada: *Ponieważ cukierki oraz batony nie są owocami*. Odpowiedź taka wskazuje, że czynność unieważniania operacji dodawania w obu zadaniach, jest zdeterminowana niewspółmiernością kategorialną pomiędzy zbiorami cukierków i batonów a obliczaną liczebnością zbioru owoców. Jeśli umysł siedmioletniego dziecka nie posługuje się teorią mnogości skończonych liczb kardynalnych, to jak jest on w stanie dokonać operacji unieważnienia dodawania w analizowanych zadaniach na podstawie zauważonej niewspółmierności kategorialnej?

---

[13] Na temat E. Rosch teorii prototypów [zob. Nęcka, Orzechowski, Szymura 2007, s. 112-125].

[14] Zob. [Butterworth 2005, s. 3-18], [Temple, Sherwood 2002, s. 733-752]. Autorzy ci zwracają uwagę na to, że deficyty w umiejętnościach obliczeniowych (dyskalkulia) nie są skorelowane z deficytami w wydobywaniu rozmaitych reprezentacji z pamięci.

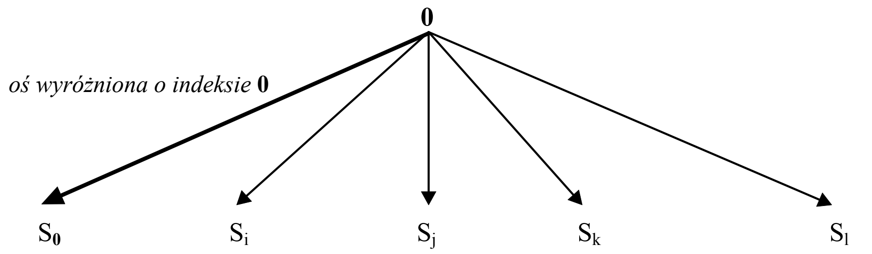
Wobec przedstawionych modeli procesów obliczeniowych, dokonywanych przez umysł siedmiolatka, można by wytoczyć następujący zarzut: „filtrowanie kategorialne zdań zachodzi na etapie przedobliczeniowym”[15], zatem w celu sformatowania reprezentacji arytmetycznych analizowanych zadań nie trzeba używać indeksowanych liczebników. Łatwo zauważyć, że w świetle tej propozycji moduł umysłu odpowiedzialny za analizę semantyczną treści zadania posiadałby kompetencję do operowania strukturami teoriomnogościowymi. W wypadku pierwszego zadania, umysł interpretowałby operację dodania do zbioru trzech jabłek zbioru dwóch gruszek jako sumę teoriomnogościową dwóch rozłącznych zbiorów. Użycie w zadaniu słowa „owoce” stanowiłoby oznaczenie nowego zbioru, uzyskanego w wyniku operacji sumowania dwóch zbiorów. Jednakże na fakt takiego użycia słowa „owoce” nie wskazuje to, że w zadaniu słowo to nie było użyte dla zbiorów na wejściu. Treść słowa „owoce” determinuje to, że jest ono przez umysł rozwiązujący zadanie interpretowane jako oznaczenie nowego zbioru. Gdyby w zadaniu pierwszym zamienić słowo „owoce” słowem „cukierki” wówczas nowy zbiór nie mógłby być interpretowany jako powstały z sumowania zbiorów jabłek i gruszek. Nawet więc jeśli filtrowanie zdań w zadaniu dokonuje się na tak zwanym etapie przedobliczeniowym, to reprezentacje sformatowane w wyniku tego filtrowania stanowią składniki ciągów inferencyjnych, w których są przetwarzane na reprezentację rozwiązania zadania. Wadą modelu klasycznego jest właśnie to, że nie da się przeprowadzić wyraźnego kryterium demarkacji pomiędzy „pracą mentalną” modułu semantycznego a „pracą mentalną” modułu arytmetyczno-teoriomnogościowego. Innymi słowy, niektóre fazy filtrowania kategorialnego w wielu wypadkach zadań arytmetycznych muszą stanowić integralne składniki procesów obliczeniowych (rekurencyjnych). Natomiast w wypadku wieloosiowych modeli obliczeniowych, proponowanych w niniejszej pracy, taką linię demarkacyjną pomiędzy analizą semantyczną treści zadania a procesem obliczeniowym można w sposób ścisły przeprowadzić. Co więcej, analiza semantyczna treści zadania nie musi angażować w wypadku prostych zadań tak skomplikowanych „filtrów kategorialnych”, które są wymagane na gruncie modeli klasycznych. Treść zadania, w świetle prezentowanej propozycji, stanowi czynnik determinujący wybór pęku osi liczbowych o określonej ich liczbie oraz czynnik, na mocy którego umysł narzuca na ów pęk określone relacje osiągalności międzyosiowej.

2. PĘK OSI LICZBOWYCH JAKO PODSTAWOWA REPREZENTACJA LICZBOWA

Umysł siedmioletniego dziecka, które potrafi rozwiązać analizowane zadania, nie musi umieć odpowiedzieć na pytania typu: *Co mają wspólnego trzy kaczki i trzy batony?* Wymaga to bowiem umiejętności abstrahowania i operowania na reprezentacjach symbolicznych. Dziecko najpierw dokonuje obliczeń na tak zwanych „konkret-

[15] Uwagę taką formułuje anonimowy recenzent niniejszej pracy.

nych zbiorach", a dopiero w późniejszej fazie rozwoju traktuje te same obliczenia jako stosujące do wielu rozmaitych kategorii. Dla dziecka cztery kaczuszki są czymś innym niż cztery zajączki. Na mocy umiejętności szeregowania, umysł dziecka jest w stanie wytworzyć sobie reprezentacje szeregujące rozmaite kategorie obiektów. Posiadając zakodowaną reprezentację lingwistyczną liczebników, umysł jest w stanie numerować obiekty szeregowanych kategorii. Ponieważ dla umysłu siedmioletniego dziecka *zero kaczuszek* i *zero zajączków* jest tym samym, owe reprezentacje liczbowe szeregowanych kategorii tworzą strukturę o wspólnym początku. Strukturę taką można graficznie przedstawić jako pęk półprostych (osi) o wspólnym początku:



Oś $S_\mathbf{0}$ stanowi reprezentację liczebników: *zero*, *jeden*, *dwa*, *trzy* itd. Pozostałe osie stanowią reprezentacje kategorii obiektów, które umysł może liczyć. Podczas rozwiązywania zadań obliczeniowych — takich na przykład jak zadania (1)-(4) — umysł dziecka aktywuje odpowiednie struktury reprezentacyjne. I tak w wypadku zadania (4), umysł aktywuje reprezentację dwuosiową, zbudowaną z osi $S_\mathbf{0}$ i $S_\mathbf{j}$, gdzie **j** stanowi uszeregowaną kategorię jabłek. W wypadku zdania (1), umysł aktywuje strukturę reprezentacyjną zbudowaną z czterech osi: wyróżnionej, osi jabłek, osi gruszek oraz osi owoców. Rozwiązanie zadania (2) wymaga aktywacji struktury pięcioosiowej. Obok osi wyróżnionej, osi śliwek, osi jabłek oraz osi owoców, w aktywowanej strukturze występuje dodatkowo oś cukierków. Zadanie (3) jest uwikłane w strukturę sześcioosiową. W dowolnej takiej strukturze reprezentacyjnej, każda oś pozostaje w relacji osiągalności do osi wyróżnionej. Osiągalność ta polega na tym, że kolejne obiekty na niewyróżnionych osiach są jedno-jednoznacznie przyporządkowywane elementom osi wyróżnionej.[16] Można relację osiągalności objaśnić metaforycznie następująco: Oś wyróżniona etykietuje za pomocą cyfr (liczebników) reprezentacje obiektów przynależących do osi niewyróżnionych. To, że oś kaczuszek

[16] Warto zwrócić uwagę na fakt, że umiejętność jedno-jednoznacznego przyporządkowywania obiektów innym obiektom, ujawnia się we wczesnej fazie rozwoju poznawczego dziecka. Co więcej, arytmetycy kognitywni podkreślają, że aby liczyć, dziecko musi umieć wiązać liczebniki relacją jedno-jednoznaczną z obiektami liczonymi. W początkowych fazach nabywania umiejętności liczenia, dzieci są w stanie, na przykład, obdzielić każdą osobę w pomieszczeniu jednym cukierkiem (tylko jeden raz w danym ciągu obdzielania łakociami) czy też są w stanie każdą osobę w pokoju nazwać i pokazać tylko jeden raz [zob. Potter, Levy 1968, s. 265-272].

jest osiągalna z osi wyróżnionej, znaczy to, że umysł generuje strukturę o postaci: <*zero*, *żadnych kaczuszek*>, <*jeden*, *kaczuszka pierwsza*>, <*dwa*, *kaczuszka druga*>, <*trzy*, *kaczuszka trzecia*> itd. Struktury tego rodzaju można nazwać indeksowanymi liczbami naturalnymi. Czynność mentalna generowania indeksowanych liczb naturalnych manifestuje się choćby w umiejętności numerowania obiektów danej kategorii przez dziecko. Każdy standardowo rozwinięty siedmiolatek jest w stanie ponumerować obrazki kolejnych kaczuszek w zeszycie. Takie indeksowane liczby naturalne są używane przez umysł nie tylko do zaznaczania pozycji obiektu w liniowym porządku określonym na danej kategorii, ale również do przyporządkowywania liczności zbiorom określonym na danej kategorii. Na przykład, indeksowana liczba kategorialna o postaci: <*trzy*, *kaczuszka trzecia*> może być użyta (poprawnie lub niepoprawnie) do oznaczenia trójelementowości dowolnego zbioru kaczuszek.

Między niewyróżnionymi osiami również może zachodzić relacja osiągalności. Jednakże w wielu strukturach wieloosiowych taka relacja nie musi zachodzić pomiędzy niektórymi osiami. Jeśli więc pomiędzy dwoma zbiorami obliczanych kategorii zachodzi relacja niewspółmierności obliczeniowej, to wówczas fakt taki można wyjaśnić tym, że pomiędzy odpowiadającymi im osiami w arytmetycznej strukturze reprezentacyjnej nie zachodzi relacja osiągalności. I tak dla zadania (1), pomiędzy osią jabłek i osią owoców, a także pomiędzy osią gruszek i owoców, zachodzi relacja osiągalności. W strukturze reprezentacyjnej dla zadania (2), relacja osiągalności nie zachodzi pomiędzy osią cukierków a osią owoców; relacja ta zachodzi jednak pomiędzy osią śliwek i osią owoców, a także pomiędzy osią jabłek i osią owoców. Podobnie dla zadania (3), relacja osiągalności nie zachodzi pomiędzy osią cukierków i owoców, a także pomiędzy osią batonów i owoców.

Na gruncie zaprezentowanej struktury reprezentacyjnej można opisać to, jakie czynności obliczeniowe siedmiolatek wykonuje podczas rozwiązywania analizowanych zadań z treścią. Podczas rozwiązywania każdego z zadań umysł siedmiolatka dokonuje przyporządkowania liczebników osi wyróżnionej obiektom pozostałych osi. W ten sposób tworzy indeksowane nazwami kategorii liczebniki. Ponieważ liczebniki osi wyróżnionej są rozumiane przez umysł jako reprezentacje liczności, więc indeksowane liczebniki są rozumiane przez umysł jako reprezentacje liczności zbiorów zawartych w poszczególnych kategoriach.

Rozwiązanie zadania (1) bazuje więc na aktywacji trzech niewyróżnionych osi indeksowanych liczebników: dla osi jabłek, dla osi gruszek oraz dla osi owoców. Na przykład, liczebnik $\mathbf{3_j}$ będzie rozumiany jako *trój-jabłkowość*, liczebnik $\mathbf{5_o}$ zaś jako *pięcio-owocowość*. W kolejnej fazie rozwiązywania zadania (1) umysł tworzy reprezentację formalną zadania o postaci równości: $\mathbf{3_j + 2_g = x_o}$. Rozwiązanie tego równania wymaga znalezienia przez umysł odpowiedników liczebników $\mathbf{3_j}$ i $\mathbf{2_g}$ na osi owoców. Umysł bowiem musi dokonać dodania: $\mathbf{3_j + 2_g}$, na osi owoców. W obrębie treści zadania (1) możliwe jest jeszcze dokonanie innych operacji dodawania: dodawanie na osi jabłek, dodawanie na osi gruszek. Umysł dziecka dokonuje więc selekcji operacji dodawania spośród zbioru możliwych operacji dodawania na gruncie struktury reprezentacyjnej zadania (1). Tę czynność poznawczą można ująć jako transformację równości: $\mathbf{3_j + 2_g = x_o}$, na równość: $\mathbf{3_j +_o 2_g = x_o}$. W kolejnym kroku umysł, w celu znalezienia odpowiedników liczebników $\mathbf{3_j}$ i $\mathbf{2_g}$ na osi owoców, musi stwierdzić to, czy oś owoców jest osiągalna z osi jabłek oraz osi gruszek. Na mocy tego, że każde jabłko oraz każda gruszka jest owocem, umysł aktywuje relację osiągalności w strukturze reprezentacyjnej zadania. Rzutuje następnie osie: jabłek oraz gruszek, na oś owoców. W ten sposób znajduje odpowiedniość jedno-jednoznaczną pomiędzy „jabłkowymi liczebnikami" oraz „owocowymi liczebnikami" oraz pomiędzy „gruszkowymi liczebnikami" i „owocowymi liczebnikami". Tę czynność można ująć jako przekształcenie struktury: $\mathbf{3_j +_o 2_g}$ na: $\mathbf{3_o +_o 2_o}$. Następną czynnością jest wydobycie z pamięci faktu arytmetycznego, że na każdej osi: $\mathbf{2 + 3 = 5}$ i potraktowanie go jako wzorca obliczeniowego. W ostatnim kroku umysł dokonuje obliczenia: $\mathbf{3_o +_o 2_o = 5_o}$.

Rozwiązanie zadania (2) wymaga aktywacji czterech niewyróżnionych osi indeksowanych liczebników. Poza osiami: śliwek, jabłek, owoców, umysł dziecka również aktywuje oś cukierków. Generuje następnie reprezentację formalną zadania: $\mathbf{(2_s + 2_j) + 3_c = x_o}$. Treść zadania wyznacza uniwersum operacji dodawania wykonywanych na wszystkich niewyróżnionych osiach: $+_s$, $+_j$, $+_c$, $+_o$. Można liczyć to, ile Jaś ma jabłek, śliwek, cukierków oraz owoców. Pytanie sformułowane w zadaniu (2) determinuje wybór osi owoców, na której umysł dziecka ma wykonać dodawanie. Struktura: $\mathbf{(2_s + 2_j) + 3_c = x_o}$ jest więc przekształcana na strukturę: $\mathbf{(2_s +_o 2_j) +_o 3_c = x_o}$. W kolejnej fazie umysł aktywuje relacje: osiągalności oraz nieosiągalności, pomiędzy osiami: śliwek, jabłek, cukierków a owoców. Ponieważ z osi śliwek oraz osi jabłek jest osiągalna oś owoców, umysł formułuje następujące równości wyrażające odpowiedniości pomiędzy tymi osiami: $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{2_s}) = \mathbf{2_o}$, $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{2_j}) = \mathbf{2_o}$. Ponieważ oś owoców jest traktowana jako nieosiągalna z osi cukierków, umysł siedmiolatka dokonuje utożsamienia: $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{3_c}) = \mathbf{0_o}$. Następnie umysł przekształca reprezentację: $\mathbf{(2_s +_o 2_j) +_o 3_c = x_o}$, na reprezentację o postaci: $\mathbf{(2_o +_o 2_o) +_o 0_o = x_o}$. Wydobywając z pamięci wzorce obliczeniowe, ostatecznie umysł generuje obliczenie o postaci: $\mathbf{(2_o +_o 2_o) +_o 0_o = 4_o}$.

Proces rozwiązywania zadania (3) przebiega również według analogicznych faz, jak podczas rozwiązywania zadań (1) i (2). Treść zadania wyznacza następujące niewyróżnione osie liczbowe: jabłek, gruszek, cukierków, batonów i owoców. Z osiami tymi skorelowany jest pięcioelementowy zbiór operacji dodawania: $+_j$, $+_g$, $+_c$, $+_b$, $+_o$. Polecenie zadania uruchamia wybór osi owoców, na której umysł przeprowadza operację $+_o$. Reprezentacja formalna zadania ma więc następującą postać: $\mathbf{[(2_j +_o 3_c) +_o 2_b] +_o [2_g +_o 2_c] = x_o}$. Następnie umysł aktywuje relacje: osiągalności z osi **j** oraz **g** na oś **o**, a także nieosiągalności z osi **c** oraz **b** na oś **o**. Poprzez ukonstytuowanie odpowiedniości pomiędzy osiami, umysł generuje następujące ich reprezentacje identycznościowe: $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{2_j}) = \mathbf{2_o}$, $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{2_g}) = \mathbf{2_o}$, $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{3_c}) = \mathbf{0_o}$, $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{2_b}) = \mathbf{0_o}$, $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{2_c}) = \mathbf{0_o}$. Stosując owe identyczności do formalnej reprezentacji zadania, umysł generuje strukturę kształtu: $\mathbf{[(2_o +_o 0_o) +_o 0_o] +_o [2_o +_o 0_o] = x_o}$. Wydobywając z pamięci odpowiednie wzorce obliczeniowe, ostatecznie umysł formułuje rozwiązanie: $\mathbf{[(2_o +_o 0_o) +_o 0_o] +_o [2_o +_o 0_o] = 4_o}$.

Zaprezentowany, na gruncie arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych, model rozwiązywania przez siedmiolatka analizowanych zadań arytmetycznych posiada wyraźną „przewagę" nad modelem klasycznym (teoriomnogościowym) wyjaśniającym kognitywne mechanizmy rozwiązywania zadań arytmetycznych. Otóż, w świetle modelu klasycznego zadanie (4) wymaga dla swego rozwiązania aktywacji w umyśle jedynie osi liczebnikowej. Umysł dziecka nie musi dokonywać żadnych operacji teoriomnogościowych na obliczanej liczności klasy jabłek w posiadaniu Jasia. Wyciągnąć należy wniosek, że zadanie (4) jest całkowicie odmiennego typu obliczeniowego niż zadania od (1) do (3), gdyż angażuje jedynie dla swego rozwiązania znajomość „tabliczki dodawania". Zadania od (1) do (3), jak zostało to pokazane, angażują umysł dziecka w wykonywanie złożonych operacji teoriomnogościowych. Na gruncie modelu indeksowanych liczb naturalnych, zadanie (4) jest tego samego typu co zadania (1) — (3). Rozwiązując to zadanie, umysł dziecka aktywuje strukturę dwuosiową: z wyróżnioną osią liczebników i osią jabłek. Z tą strukturą skorelowana jest tylko jedna operacja dodawania, mianowicie: $+_j$. Ponieważ relacja osiągalności międzyosiowej jest zwrotna, umysł dziecka nie musi dokonywać żadnych przekładów indeksowanych liczebników z jednej osi na indeksowane liczebniki innej osi. Stąd formalna reprezentacja zadania posiada kształt: $\mathbf{2_j} +_j \mathbf{3_j} = \mathbf{x_j}$. Wydobywając z pamięci wzorzec obliczeniowy, dziecko formułuje odpowiedź o postaci: $\mathbf{2_j} +_j \mathbf{3_j} = \mathbf{5_j}$.

Przedstawić można jeszcze inny argument na rzecz „wyższości" modelu indeksowanych liczb naturalnych nad klasycznym modelem. Na gruncie drugiego modelu nie można wyjaśnić w sposób satysfakcjonujący konfuzji poznawczej, doświadczanej przez dziecko podczas recepcji „bezsensownych" zadań arytmetycznych. Niech przykładem takiego konfudującego zadania będzie takie oto:

(5) *Jaś miał trzy jabłka, przyszła mama z pracy i dała Jasiowi dwa jabłka. Ile Jaś ma cukierków?*

Otóż, każdy siedmiolatek będzie skonfundowany słuchając takiego zadania. Nie będzie zadania rozumiał albo niepewnie odpowie — co częściej zdarza się — że Jaś nie ma żadnych cukierków. Jaki jest wobec tego mechanizm mentalny uruchamiający w umyśle dziecka poczucie konfuzji poznawczej?

Zgodnie z modelem klasycznym, reprezentację formalną zadania (5) opisuje następująca formuła: $\boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{3} \wedge \boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2} \wedge (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \varnothing \rightarrow \boldsymbol{L}(\mathbf{C}) = \mathbf{?}$ Zgodnie z tym modelem, niezrozumienie zadania przez ucznia można wyjaśnić jako wyłącznie warunkowane procesem mentalnym „blokującym" inferencję dowolnego podstawienia następnika powyższej implikacji z jej poprzednika. Innymi słowy, z powodu niezależności inferencyjnej struktur: $\boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{3} \wedge \boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2} \wedge (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \varnothing$ oraz dowolnego podstawienia $\boldsymbol{L}(\mathbf{C}) = \mathbf{?}$, w umyśle siedmiolatka zostają zablokowane procesy inferencyjno-generatywne. Takie wyjaśnienie nie jest satysfakcjonujące, gdyż blokada tych procesów w umysłach dzieci pojawia się również podczas rozwiązywania „sensownych" zadań arytmetycznych; wówczas dzieci nie są najzwyczajniej w stanie rozwiązać zadania, pomimo iż jest ono sensowne. Przedstawione wyjaśnienie konfuzji obliczeniowej redukuje je do stanu nieumiejętności rozwiązania zadania. Ten drugi stan jest jednak zupełnie innego typu, gdyż wskazuje na deficyty logiczne umysłu. Konfuzja poznawcza podczas rozwiązywania zadania (5) pojawia się w umysłach siedmiolatków, niezależnie od tego, czy przejawiają one jakieś deficyty myślenia logicznego.

Jeśli dziecko jednak odpowie na pytanie w zadaniu, że Jaś nie ma żadnych cukierków, to wówczas reprezentację formalną takiej odpowiedzi opisuje następująca formuła: $\boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{3} \wedge \boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2} \wedge (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \varnothing \rightarrow \boldsymbol{L}(\mathbf{C}) = \mathbf{0}$. Formuła ta nie jest dowodliwa, gdyż następnik implikacji nie wynika logicznie, na gruncie teorii mnogości, z jej poprzednika. Zatem odpowiedź siedmiolatka, że Jaś nie ma żadnych cukierków, będzie w takiej sytuacji błędna. Dlaczego więc niemal każdy siedmiolatek jest w stanie poprawnie rozwiązać zadanie (1) oraz (2) przy równoczesnym popełnieniu błędu logicznego w odniesieniu do zadania (5)? Tę sytuację można by wyjaśnić w taki sposób, że w wypadku poprawnego rozwiązania zadania (1) oraz (2) stosowane są przez umysł dziecka logiczne reguły inferencji, podczas gdy w zadaniu (5) umysł dziecka stosuje nielogiczne reguły inferencji. To jednak rodzi kolejny problem. Co powoduje, że w sytuacjach zadaniowych (1) i (2) umysł dziecka aktywuje mechanizm logicznego przetwarzania informacji, a w sytuacji zadaniowej (5) aktywacja tego mechanizmu jest blokowana?

Na gruncie klasycznego modelu można jednak skonstruować taką formalną reprezentację zadania (5), że odpowiedź dziecka, że Jaś nie ma żadnego cukierka, jest poprawna logicznie. Formuła przedstawiająca taką reprezentację jest następująca: $\boldsymbol{L}(\mathbf{C}) = \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{3} \wedge \boldsymbol{L}(\mathbf{B}) = \mathbf{2} \wedge (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = \varnothing \wedge \mathbf{C} \subset \mathbf{c} \rightarrow \boldsymbol{L}((\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup_{\mathbf{c}} \mathbf{C}) = \mathbf{0}$. Takie wyjaśnienie posiada jednak pewną wadę. Otóż, polecenie zadania nie dotyczy liczności zbioru cukierków uzyskanego po dodaniu do pustego zbioru cukierków początkowego zbioru jabłek Jasia oraz zbioru jabłek otrzymanych od mamy. Poza tym treść zadania nie upoważnia do przyjęcia założenia, że na wejściu liczebność zbioru cukierków Jasia wynosi zero ($\boldsymbol{L}(\mathbf{C}) = \mathbf{0}$).

Na gruncie modelu indeksowanych liczb naturalnych można wyjaśnić poprawność rozwiązania zadania (5), że Jasio nie ma żadnych cukierków. W umyśle siedmiolatka aktywuje się trójosiowa struktura indeksowanych liczb naturalnych z osią wyróżnioną oraz osiami: jabłek i cukierków. Z tą strukturą są skoordynowane dwie operacje dodawania: $+_{\mathbf{j}}$ oraz $+_{\mathbf{c}}$. Treść zadania uruchamia wybór osi cukierków, na której ma zostać wykonane dodawanie $+_{\mathbf{c}}$. Reprezentację formalną zadania można przedstawić w postaci następującej formuły: $\mathbf{3_j} +_{\mathbf{c}} \mathbf{2_j} = \mathbf{x_c}$. Aby wykonać obliczenie: $\mathbf{3_j} +_{\mathbf{c}} \mathbf{2_j}$, umysł musi znaleźć odpowiedniki indeksowanych liczebników $\mathbf{3_j}$ i $\mathbf{2_j}$ na osi cukierków $\mathbf{c}$. Ponieważ umysł konceptualizuje oś cukierków jako nieosiągalną z osi jabłek, aktywuje on struktury reprezentowane przez równości o postaci: $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{3_j}) = \mathbf{0_c}$, $\boldsymbol{Cor}(\mathbf{2_j}) = \mathbf{0_c}$ (trzy jabłka to tyle samo, co zero cukierków i podobnie jest z dwoma jabłkami). Dzięki temu umysł przekształca strukturę: $\mathbf{3_j} +_{\mathbf{c}} \mathbf{2_j} = \mathbf{x_c}$, na strukturę o postaci: $\mathbf{0_c} +_{\mathbf{c}} \mathbf{0_c} = \mathbf{x_c}$. Wykonując obliczenie: $\mathbf{0_c} +_{\mathbf{c}} \mathbf{0_c}$, otrzymuje wynik: $\mathbf{0_c}$.

Jeśli dziecko rozwiązując zadanie (5), stwierdzi, że jest ono niezrozumiałe, to ów fakt konfuzji również można wyjaśnić na gruncie modelu indeksowanych liczb naturalnych. Na gruncie trójosiowej struktury, aktywowanej poprzez recepcję treści zadania (5) w umyśle dziecka, oś cukierków, na której ma zostać wykonane obliczenie, jest nieosiągalna z żadnych osi liczbowych, których dotyczą dane na wejściu w zadaniu. W takiej sytuacji umysł dokonuje „ślepej" interpretacji liczebników $\mathbf{3_j}$ i $\mathbf{2_j}$ na osi cukierków **c**. Jest to sytuacja niestandardowa i stąd wywołuje doświadczenie konfuzji obliczeniowej.

3. GENERACJA WIELOOSIOWEGO MODELU Z ARYTMETYKI INDEKSOWANYCH LICZB NATURALNYCH

Wyżej zaprezentowana struktura, wyjaśniająca procesy obliczeniowe towarzyszące umysłowi dziecka przy rozwiązywaniu prostych zadań z treścią, angażujących operację dodawania, może zostać skonstruowana na gruncie arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych (INA), która jest uogólnieniem standardowej arytmetyki Peano.

3.1. Arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych[17]

Na język arytmetyki INA — poza standardowymi terminami logicznymi — składają się wyrażenia następujących kategorii składniowych: (i) zmienne indywiduowe przebiegające uniwersum obiektów elementarnych, oznaczane literami: x, y, z; (ii) stała indywiduowa: **0** oraz stałe indywiduowe desygnujące ustalone, niewyspecyfikowane obiekty uniwersum obiektów elementarnych, oznaczane literami: **x**, **y**, **z**; (iii) zmienne funkcyjne (zmienne indeksowe) przebiegające zbiór osi obliczeniowych, oznaczane literami: i, j, k, l, m; (iv) stałe funkcyjne (stałe indeksowe) oznaczające ustalone, niewyspecyfikowane osie obliczeniowe: **i**, **j**, **k**, **l**, **m**; (v) predykat *N* wyrażający własność bycia indeksowaną liczbą naturalną; (vi) stała funkcyjna S, która z wyrażeniami indeksowymi (zmiennymi lub stałymi) tworzy indeksowane funkcje następnika, oznaczane literami: S_i, S_j, $S_{\mathbf{i}}$, $S_{\mathbf{j}}$ itd; (vii) stałe liczebnikowe oznaczające poszczególne indeksowane liczby naturalne kształtu: $\mathbf{1_i}$, $\mathbf{1_j}$, $\mathbf{2_i}$, $\mathbf{2_j}$, $\mathbf{2_k}$ itd. (stałe tego rodzaju są wprowadzane do systemu definicyjnie); (viii) zmienne liczebnikowe (ze zmienną indeksową) o postaci: $\mathbf{1}_i$, $\mathbf{1}_j$, $\mathbf{2}_i$, $\mathbf{2}_j$, $\mathbf{2}_k$ itd. (również wprowadzane definicyjnie do systemu); (ix) nawiasy zwykłe i kwadratowe (pierwsze są używane w kontekstach predykatywnych, drugie zaś w kontekstach funkcyjnych).

Język arytmetyki INA obejmuje dwie odrębne kategorie syntaktyczne wyrażeń indywiduowych. Pierwszą kategorię *P* tworzą wyrażenia przedmiotowe typu: (i) oraz (ii), służące reprezentowaniu lub oznaczaniu obiektów elementarnych. Drugą kategorię wyrażeń indywiduowych tworzą wyrażenia liczebnikowe *L*. Przy czym kategoria *L* jest wtórną kategorią syntaktyczną. Niech *I* stanowi kategorię wyrażeń indek-

[17] Niniejszy paragraf stanowi streszczenie fragmentu pracy: [Krysztofiak 2008, s. 79-107].

sowych, F zaś stanowi kategorię nieindeksowych wyrażeń funkcyjnych (przy czym kategorie: F oraz I są rozłączne). Wówczas kategorię wyrażeń L definiujemy indukcyjnie następująco:

(Df. L)

(i) $\alpha \in P \wedge \beta \in I \rightarrow \beta[\alpha] \in L$

(ii) $\alpha \in L \wedge \beta \in F \rightarrow \beta[\alpha] \in L$

Zgodnie z (Df. L) wyrażenia liczebnikowe reprezentują lub oznaczają obiekty (indeksowane liczby naturalne) stanowiące wartości funkcji indeksowych (osi czasu obliczeniowego) od argumentów, którymi są przedmioty oznaczane lub reprezentowane przez stałe lub zmienne kategorii P.

Aksjomatyka INA przedstawia się następująco:

(A1) $(\forall i)\ (\forall j)\ i[\mathbf{0}] = j[\mathbf{0}]$

(A2) $(\forall i)\ (\forall j)\ (\forall x)(\ x \neq \mathbf{0} \wedge i \neq j \rightarrow i[x] \neq j[x])$

(A3) $(\forall i)\ (\forall j)\ (\ \forall x)\ (\forall y)(i[x] = j[y] \rightarrow x = y)$

(A4) $(\forall i)(\ \forall x)\ N(\ i[x])$

(A5) $(\forall i)\ (\forall x)(\exists y)\ S_i[i[x]] = i[y]$

(A6) $(\forall i)\ (\forall j)\ (\forall x)(\ i \neq j \rightarrow S_i[j[x]] = i[\mathbf{0}])$

(A7) $(\forall i)(\forall x)\ S_i[i[x]] \neq i[\mathbf{0}]$

(A8) $(\forall i)\ (\forall x)\ (\forall y)\ (S_i[i[x]] = S_i[i[y]] \rightarrow i[x] = i[y])$

(A9) $(\forall i)\{\Psi(\mathbf{0}) \wedge (\forall x)(\Psi(i[x]) \rightarrow \Psi(S_i[i[x]])) \rightarrow (\forall x)\ \Psi(i[x])\}$

Aksjomat (A1) stwierdza, że wszystkie osie obliczeniowe posiadają wspólny początek, którym jest liczba **0.** Aksjomat (A2) stwierdza, że z wyjątkiem liczby **0**, dowolne dwie liczby indeksowane z różnych osi obliczeniowych są różnymi liczbami. Na przykład, zgodnie z (A2) *trój-gruszkowość jest czymś różnym* od *trój-jabłkowości*, gdyż oś obliczeniowa jabłek nie jest tożsama z osią obliczeniową gruszek. Zgodnie z (A3) jeśli dwie indeksowane liczby naturalne są identyczne, to ich podstawy przedmiotowe (argumenty indeksów) są również identyczne. Aksjomat (A4) wyraża to, że każdy obiekt, uzyskany w wyniku stosowania dowolnej osi obliczeniowej (jako funkcji) do obiektu elementarnego, jest indeksowaną liczbą naturalną. Aksjomat (A5) stwierdza, że funkcja następnika na dowolnej osi obliczeniowej nie wyprowadza poza uniwersum indeksowanych liczb naturalnych. Aksjomat (A6) ma charakter techniczny. Wyraża to, że jeśli funkcja następnika z danej osi obliczeniowej jest stosowana do obiektu z odmiennej osi obliczeniowej, to rezultat takiej aplikacji funkcji następnika daje zawsze wartość w postaci liczby **0**; ma to wskazywać na niewłaściwość stosowania w takich kontekstach funkcji następnika. (A7) stwierdza, że wartością funkcji następnika, stosowanej we właściwy sposób, nigdy nie jest liczba **0**. Aksjomat (A8) stwierdza, że jeśli dwa następniki danej liczby na tej samej osi obliczeniowej są identyczną liczbą, to argumenty funkcji następnika są również identyczne. (A9) stanowi zasadę indukcji dostosowaną do arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych.

Aksjomaty (A1)-(A9) można wzbogacić o definicje rozmaitych operacji określonych na indeksowanych liczbach naturalnych. Dla celów artykułu wprowadźmy jedynie definicję indeksowanego dodawania, czyli dodawania na danej osi oznaczonej odpowiednim indeksem. Przy czym, zakłada się, że takie dodawanie liczebników z różnych osi na danej osi, może być wykonane tylko wtedy, gdy dodawane liczebniki posiadają odpowiedniki na osi, na której wykonywane jest dodawanie. Definicja dodawania przedstawia się następująco[18]:

(Df $+_k$)

(1) $k[\mathbf{0}] +_k k[x] = k[x]$

(2) $S_k[k[x]] +_k k[y] = S_k[k[x] +_k k[y]]$

(3) $i[x] +_k j[y] = Cor_k(i[x]) +_k Cor_k(j[y])$

Jeśli chcemy, na przykład, dodać dwa jabłka i trzy gruszki na osi owoców, to należy znaleźć odpowiedniki: dwóch jabłek oraz trzech gruszek na osi owoców.

3.2. Obliczeniowe reprezentacje kognitywne

Przedstawiona wyżej aksjomatyka wyznacza teorię, na gruncie której można generować różne modele arytmetyczne poszczególnych obliczeniowych reprezentacji kognitywnych. W wypadku analizowanych zadań z treścią, każde z nich jest skorelowane z odmiennym modelem. Umysł, aby rozwiązać dowolne z zadań, musi najpierw wygenerować z INA teorię opisującą określony model reprezentacji kognitywnych. Warto zwrócić uwagę, że reprezentacje te podpadają pod pewną rodzinę teorii arytmetycznych wygenerowanych z INA. W modelach tych teorii istnieje wyróżniona oś obliczeniowa oraz na osiach określona jest relacja osiągalności sprzężona z funkcją odpowiedniości pomiędzy liczebnikami z różnych osi obliczeniowych.

Wyróżnioną oś liczebników: *zero*, *jeden*, *dwa*, *trzy* itd., można scharakteryzować za pomocą funkcji tożsamościowej **I** w następujący sposób:

(R 1) $\mathbf{I}[x] = x$

Liczebniki wyróżnionej osi obliczeniowej można zdefiniować standardowo: $\mathbf{1} = S_{\mathbf{I}}\mathbf{I}[\mathbf{0}]$, $\mathbf{2} = S_{\mathbf{I}}\mathbf{I}[\mathbf{1}]$, $\mathbf{3} = S_{\mathbf{I}}\mathbf{I}[\mathbf{2}]$ itd. Ponieważ zgodnie z aksjomatyką INA zmienne indywiduowe przebiegają uniwersum przedmiotów elementarnych, które są lokowane

[18] W artykule: [Krysztofiak 2008, s. 79-107], relacja indeksowanego dodawania jest sformułowana dla takiego warunku, zgodnie z którym funkcja korelacji jest wyznaczana apriorycznie na mocy tożsamości przedmiotu: $Cor_k(i[x]) = k[x]$. Przy takim sformułowaniu funkcja Cor_k staje się zbędna.

na każdej osi obliczeniowej za pomocą funkcji następnika indeksowanej daną osią, to skoro na wyróżnionej osi **I** ulokowane są standardowe liczebniki, to one również są ulokowane na pozostałych osiach. Aksjomatyka INA nie rozstrzyga tego, że standardowe liczebniki na wszystkich osiach są rozmieszczone na tych samych pozycjach porządkowych, czyli że dowolnemu x z osi **I** odpowiada liczebnik o postaci x_i. Przyjmijmy następujący sposób definiowania indeksowanych liczebników: $\mathbf{1}_i = S_i i[\mathbf{0}]$, $\mathbf{2}_i = S_i i[\mathbf{1}_i]$, $\mathbf{3}_i = S_i i[\mathbf{2}_i]$ itd.

Następujące warunki określają relację osiągalności *A* oraz funkcję indeksowanej odpowiedniości Cor_j. Relacja *A* jest zwrotna i przechodnia.

(R 2) $(\forall i)\ i\, A\, i$

(R 3) $(\forall i)\ (\forall j)\ (\forall k)[i\, A\, j \wedge j\, A\, k \rightarrow i\, A\, k]$

(R 4) $(\forall i)\ \mathbf{I}\, A\, i$

(R 5) $(\forall i)\ (\forall j)[i\, A\, j \rightarrow (\forall x)(\exists y) Cor_j(\ i[x]) = j[y]]$

(R 6) $(\forall i)\ (\forall j)[\sim i\, A\, j \rightarrow (\forall x) Cor_j(\ i[x]) = j[\mathbf{0}]$

Osiągalność między osiami obliczeniowymi implikuje więc, zgodnie z (R 5), istnienie korelatu dla dowolnego liczebnika z danej osi w postaci jakiegoś liczebnika na osi osiągalnej. Zwróćmy uwagę, że wyszczególnione warunki nie ustalają tego, że z liczebnikiem o postaci x_i koresponduje liczebnik o postaci x_j. Oczywiście, w pewnych modelach taka sytuacja może mieć miejsce.

W analizowanych zadaniach z treścią, ich kognitywne reprezentacje formalne zakładają dodatkowo warunek:

(R 7) $(\forall x)\ (i[x] = x_i)$

Zgodnie z (R 7) otrzymujemy: $(\forall i)\ i[\mathbf{1}] = \mathbf{1}_i$, $(\forall i)\ i[\mathbf{1}] = \mathbf{1}_i$, $(\forall i)\ i[\mathbf{2}] = \mathbf{2}_i$, $(\forall i)\ i[\mathbf{3}] = \mathbf{3}_i$ itd. Oczywiście nie jest tak, że w każdej reprezentacji kognitywnej (R 7) zachodzi. Na przykład, jeśli rozwiązujemy zadanie obliczenia liczby rąk do pracy, mając do dyspozycji dwóch ludzi, to wówczas jednemu człowiekowi nie odpowiada jedna ręka do pracy. Liczebnik: *jeden*, z wyróżnionej osi obliczeniowej, może ujawniać się na innych osiach obliczeniowych poprzez różne indeksowane liczebniki. Na przykład, *jeden* może się ujawniać jako *jeden człowiek*, *dwie ręce do pracy*, *trzy kąty w trójkącie*, *cztery koła w samochodzie* czy w końcu jako *pięć palców u ręki*. Uogólniając, jedna sztuka czegokolwiek może posiadać swój obraz w postaci n-sztuk czegoś innego (jeden niewolnik może być przeliczany na 10 worków ryżu). Zgodnie z (R 2), jeśli indeks przebiega określoną kategorię, zmienna indywiduowa zaś przebiega standardowe liczebniki wyróżnionej osi obliczeniowej, to wówczas indeksowane liczebniki można interpretować jako predykaty liczności kategorialnej. Na przykład, jeśli indeks odnosi do kategorii cukierków, to wyrażenie *cukierki*[2] można interpretować jako *dwój-cukierkowość*. Warunek (R 7) umożliwia wygenerowanie następującej zasady, umożliwiającej obliczanie odpowiedników na osiach osiągalnych z danej osi:

(R 8) $(\forall i)\,(\forall j)[i\ A\ j \rightarrow (\forall x)(Cor_j(x_i) = x_j)]$

W wypadku innych zadań arytmetycznych, (R 7) i (R 8) nie będą ważne. Na przykład, jeśli liczymy liczbę rąk do pracy na podstawie liczby osób przychodzących na czyn społeczny, to wówczas liczebnikowi x_c (gdzie c jest osią ludzi) nie odpowiada liczebnik x_r (gdzie r jest osią rąk); trzem ludziom odpowiada sześć rąk.

Na gruncie zaprezentowanego modelu, można przedstawić w sposób formalny to, jakie operacje formalne wykonuje umysł dziecka podczas generowania rozwiązań analizowanych zadań.

Rozwiązując zadanie pierwsze, umysł „startuje" z ostatniego warunku w definicji k-dodawania: (1) $i[x] +_k j[y] = Cor_k(i[x]) +_k Cor_k(j[y])$. Na mocy podstawienia za zmienne odpowiednich stałych wyznaczonych przez treść zadania, z (1) umysł generuje reprezentację: (2) $\mathbf{j}[\mathbf{3}] +_{\mathbf{o}} \mathbf{g}[\mathbf{2}] = Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{j}[\mathbf{3}]) +_{\mathbf{o}} Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{g}[\mathbf{2}])$. Na mocy (R 7) umysł przekształca reprezentację (2) na: (3) $\mathbf{3_j} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_g} = Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{3_j}) +_{\mathbf{o}} Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{2_g})$. Z kolei korzystając z (R 8) umysł generuje z (3) reprezentację: (4) $\mathbf{3_j} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_g} = \mathbf{3_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_o}$. Wydobywając z pamięci fakt arytmetyczny, że $\mathbf{5}_i = \mathbf{3}_i +_i \mathbf{2}_i$ dla każdej osi obliczeniowej, z (4) umysł generuje ostateczne rozwiązanie: (4) $\mathbf{j}[\mathbf{3}] +_{\mathbf{o}} \mathbf{g}[\mathbf{2}] = \mathbf{5_o}$.

Rozwiązanie zadania drugiego przebiega następująco: Najpierw umysł generuje, na podstawie definicji indeksowanego dodawania, reprezentację o postaci: (1) $(\mathbf{s}[\mathbf{2}] +_{\mathbf{o}} \mathbf{j}[\mathbf{2}]) +_{\mathbf{o}} \mathbf{c}[\mathbf{3}] = (Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{s}[\mathbf{2}]) +_{\mathbf{o}} Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{j}[\mathbf{2}])) +_{\mathbf{o}} Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{c}[\mathbf{3}])$. Na mocy (R 7) umysł przekształca (1) na reprezentację: (2) $(\mathbf{2_s} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_j}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{3_c} = (Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{2_s}) +_{\mathbf{o}} Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{2_j})) +_{\mathbf{o}} Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{3_c})$. Ponieważ w modelu wyznaczonym przez treść zadania zachodzą następujące relacje: (3) **s** A **o**; (4) **j** A **o**, umysł, na podstawie (R 8), z reprezentacji (2) generuje: (5) $(\mathbf{2_s} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_j}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{3_c} = (\mathbf{2_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_o}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{3_c}$. Na gruncie treści zadania, umysł również ustala to, że zachodzi relacja: (6) ~**c** A **o**. Na podstawie: (6), (R 6) i (R 7), umysł wyprowadza: (7) $Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{3_c}) = \mathbf{o}[\mathbf{0}]$. Na podstawie (R 7), umysł z (7) inferuje: (8) $Cor_{\mathbf{o}}(\mathbf{3_c}) = \mathbf{0_o}$. Z (5) i (8) umysł generuje reprezentację: (9) $(\mathbf{2_s} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_j}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{3_c} = (\mathbf{2_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_o}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_c}$. Wydobywając z pamięci fakt: (10) $\mathbf{2_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_o} = \mathbf{4_o}$, strukturę (9) przekształca na: (11) $(\mathbf{2_s} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_j}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{3_o} = \mathbf{4_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_o}$. Następnie, wydobywając z pamięci kolejny fakt arytmetyczny: (12) $\mathbf{4_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_o} = \mathbf{4_o}$, umysł generuje ostateczne rozwiązanie zadania: (13) $(\mathbf{2_s} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_j}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{3_o} = \mathbf{4_o}$.

Rozwiązanie zadania trzeciego również przebiega analogicznie jak w wypadku zadań: pierwszego i drugiego. Oczywiście, w tym wypadku umysł przeprowadza więcej obliczeń, gdyż treść zadania wyznacza pięcioosiowy model. Punktem wyjścia jest wygenerowanie przez umysł następującej reprezentacji: $[(\mathbf{2_j} +_{\mathbf{o}} \mathbf{3_c}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_b}] +_{\mathbf{o}} (\mathbf{2_g} +_{\mathbf{o}} \mathbf{2_c}) = ?$ Najpierw umysł poszukuje na osi owoców odpowiedników liczebników, kolejno, z osi: **j**, **c**, **b**, **g**. Następnie wyjściową reprezentację przekształca na: $[(\mathbf{2_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_c}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_o}] +_{\mathbf{o}} (\mathbf{2_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_o}) = ?$ W ostatniej fazie, wydobywając z pamięci odpowiednie fakty arytmetyczne dochodzi do rozwiązania: $[(\mathbf{2_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_c}) +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_o}] +_{\mathbf{o}} (\mathbf{2_o} +_{\mathbf{o}} \mathbf{0_o}) = \mathbf{4_o}$.

Zadanie czwarte w porównaniu z zadaniami wcześniej zrekonstruowanymi przejawia większy stopień prostoty, gdyż do wygenerowania jego rozwiązania umysł aktywuje dwuosiową strukturę arytmetyczną, złożoną z osi wyróżnionej liczebników oraz z osi jabłek. Następnie umysł generuje reprezentację o postaci: $\mathbf{2_j} +_{\mathbf{j}} \mathbf{3_j} = ?$ Wydobywając z pamięci odpowiedni fakt arytmetyczny, podaje w końcu rozwiązanie: $\mathbf{2}_j +_j \mathbf{3}_j = \mathbf{5}_j$. To, dlaczego dzieci szybciej rozwiązują ten rodzaj zadań niż zadania typów wcześniej analizowanych, można wyjaśnić tym, że umysł dziecka nie musi dokonywać czynności poszukiwania odpowiedników „liczebników jabłkowych" na innych osiach obliczeniowych.

Zadanie piąte dla swego rozwiązania wymaga wygenerowania struktury z osiami: wyróżnioną, jabłek i cukierków. Umysł dziecka generuje reprezentację o postaci: $\mathbf{3}_j +_c \mathbf{2}_j = ?$ Ponieważ oś cukierków nie jest osiągalna z osi jabłek, zatem na mocy (R 6), umysł przekształca wyjściową strukturę na reprezentację o postaci: $\mathbf{0}_c +_c \mathbf{0}_c = ?$ Następnie formułuje rozwiązanie zadania: $\mathbf{0}_c +_c \mathbf{0}_c = \mathbf{0}_c$.

Przedstawiony model, na gruncie którego są rekonstruowane mechanizmy obliczeniowe umysłu podczas rozwiązywania przez dziecko zadań z treścią „na dodawanie", pokazuje, że w przeciwieństwie do modelu klasycznego umysł nie musi aktywować reprezentacji teoriomnogościowych. W świetle modelu klasycznego proces rozwiązywania analizowanych zadań miałby postać procesu modelowania semantycznego „dosyć skomplikowanych" struktur teoriomnogościowych w uniwersum liczb naturalnych (lub skończonych liczb kardynalnych). Przy czym operowanie tymi strukturami wymagałoby teoriomnogościowej kompetencji umysłu w posługiwaniu się zbiorem pustym, iloczynem zbiorów, sumą zbiorów, indeksowaną kategorialnie sumą zbiorów oraz „małymi" liczbami kardynalnymi. Co więcej, umysł dziecka, aby rozwiązać analizowane zadania, musi związać odpowiednie struktury teoriomnogościowe z działaniami arytmetycznymi na mocy pewnych zależności logicznych. Natomiast w świetle proponowanego modelu, umysł dziecka podczas rozwiązywania przedstawionych zadań nie operuje żadnymi strukturami teoriomnogościowymi; bazuje jedynie na wyuczonych faktach arytmetyczno-obliczeniowych i umiejętności stosowania operacji przyporządkowywania liczebników z pewnych osi liczebnikom z innych osi.

Rozwiązywanie prostego zadania z treścią stanowiłoby, w świetle zaprezentowanej koncepcji, proces konstrukcji (czy tez generacji) określonego wielo-osiowego modelu, o skończonej liczbie osi i z zadanymi relacjami osiągalności międzyosiowej. Arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych stanowiłaby narzędzie konstruowania poszczególnych modeli. W wyniku analizy semantycznej treści zadania umysł siedmiolatka dopasowywałby skonstruowane (czy też wygenerowane) modele do treści rozwiązywanego zadania.

ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona w pracy koncepcja wymaga empirycznego (eksperymentalnego) potwierdzenia — przede wszystkim w kwestii posługiwania się przez umysł wieloosiowymi strukturami obliczeniowymi. Wydaje się, że tego rodzaju weryfikacja mogłaby bazować na empirycznych badaniach mechanizmu percepcji cyfr. Jakie operacje umysł wykonuje podczas ujmowania ze zrozumieniem cyfry *6666*? Wydaje się, że ujęcie ze zrozumieniem tej cyfry nie może dokonywać się przy użyciu przez umysł jednoosiowych reprezentacji arytmetycznych. Łatwo zauważyć, że zapis: *6666*, czytany jedno-osiowo, jest wieloznaczny. Symbol *6* w cyfrze *6666* na każdej pozycji swojego występowania w tej cyfrze desygnuje odmienną liczbę. Rozumienie tej cyfry wymaga tego, aby umysł, czytając cyfrę od lewej strony do prawej, przy pomocy pierwszej szóstki odniósł się do szóstej liczby na osi tysięcy, następnie, aby odniósł się do szóstej liczby na osi setek, dalej — do szóstej liczby na osi dziesiątek i w końcu — do szóstej liczby na osi jedności. W finalnej fazie umysł dokonuje odwzorowania poszczególnych liczb z poszczególnych osi na osi jedności i w końcu przeprowadza operację dodawania. Bardzo długie cyfry wymagają posługiwania się strukturami zbudowanymi z bardzo dużej liczby osi obliczeniowych. Stąd, trudności w recepcji takich cyfr można wyjaśnić brakiem zdolności umysłu do aktywacji, na przykład, dwudziestoosiowych pęków osi obliczeniowych.

Inny rodzaj eksperymentów, które mogłyby potwierdzić funkcjonowanie wielo-osiowych struktur obliczeniowych w umyśle komputacyjnym, dotyczyłby sposobów ostensywnego zliczania liczności klas obiektów na podstawie uobecnionej empirycznie pewnej wyjściowej klasy innego rodzaju obiektów. Na przykład, kiedy kasjer liczy pieniądze „zapakowane" w plikach po dwadzieścia sztuk danego nominału (np. dziesięciu złotych), rozpoczyna od: *dwieście złotych, czterysta, sześćset, osiemset itd.* Kolejno wypowiedziana cyfra podczas zliczania stanowi wynik odwzorowania kolejnego pakietu banknotów na osi jedności. I tak wypowiedzenie cyfry: *tysiąc*, w takiej sytuacji będzie manifestacją czynności przyporządkowania liczby pięć z osi pakietów banknotów liczbie tysiąc z osi jedności. Uogólniając, fakt stosowania przez umysły rozmaitych technik zliczania obiektów sugeruje, że właśnie wówczas w umysłach aktywują się wielo-osiowe struktury obliczeniowe. W badaniach antropologicznych nad technikami liczenia wskazuje się na ich bogatą różnorodność w dziejach ludzkości.[19]

Zaprezentowana koncepcja może być uzupełniona w postaci „pogłębionych" badań empirycznych, których celem jest oszacowywanie długości czasu potrzebnego dziecku na rozwiązywanie zadań analizowanych typów. Zgodnie z założeniem, iż czas rozwiązywania zadania wydłuża się wraz ze wzrostem stopnia jego złożoności operacyjnej, zaprezentowany model przewiduje, iż z uwagi na szybkość rozwiązywania zadań przez umysł siedmiolatka obowiązuje następująca kolejność: zadanie (4), zadanie (5) wraz z zadaniem (1), zadanie (2) i zadanie (3). Co więcej, zakładając, że wraz ze wzrostem liczby osi wymaganych do sformatowania reprezentacji formalnej

[19] Na przykład, w transakcjach barterowych w starożytności używano co najmniej dwuosiowych systemów obliczania wartości towaru: „[…] według *Iliady* Homera «niewiasta do licznych robót stosowna» była warta 4 woły, zbroja z brązu Glaukoma — 9 wołów […]" [Ifrah 2006, s. 218]. Ifrah wskazuje na wiele takich systemów obliczeniowych, stosowanych w barterowych transakcjach handlowych w starożytnych kulturach.

danego zadania, czas procesu rozwiązywania zadań powinien się wydłużać, badania eksperymentalne powinny przewidywać to, który typ zadań będzie szybciej rozwiązywany przez dzieci, a który typ wolniej. Zadania jednoosiowe powinny być przeciętnie szybciej rozwiązywane niż badania wieloosiowe.

Jeśli przedstawiona koncepcja jest słuszna, to należy przyjąć wniosek, że podstawowa kognitywna forma czasu obliczeniowego, jaką umysł stosuje w konceptualizowaniu rozmaitych zjawisk, jest multi-temporalną formą czasu. Operowanie jednoosiową formą czasu obliczeniowego stanowi, w świetle proponowanej teorii, umiejętność stosowania szczególnego modelu, wygenerowanego z multi-temporalnej formy czasu. Zgodnie z takim wnioskiem, umiejętności obliczeniowe umysłu bazujące jednocześnie na reprezentacjach generowanych w arytmetyce Peano oraz reprezentacjach teoriomnogościowych powinny pojawić się w indywidualnym rozwoju poznawczym człowieka na bardzo późnym etapie. Z uwagi na czynniki zakłócające rozwój poznawczy, brak pojawienia się takich umiejętności nie musi prowadzić do szkód w postaci nieradzenia sobie przez podmiot z zadaniami analizowanych typów. Innymi słowy, umysł nie musi posiadać zdolności operowania na strukturach teoriomnogościowych, aby móc rozwiązywać proste zadania arytmetyczne „na dodawanie". Model klasyczny wyklucza taką sytuację, natomiast model indeksowanych liczb naturalnych wyjaśnia fakt polegający na radzeniu sobie przez umysł z prostymi zadaniami arytmetycznymi przy jednoczesnym „teoriomnogościowym analfabetyzmie" (często spotykanym wśród studentów).

BIBLIOGRAFIA

Ashcraft M. H. (1992), *Cognitive arithmetic: A review of data and theory*, „Cognition", Vol. 44, No 1-2, s. 75-106.

Barner D., Bachrach A. (2010), *Inference and exact numerical representation in early language development*, „Cognitive Psychology", 60, s. 40-62.

Briars J. D., Larkin J. H., (1984), *An Integrated Model of Skill in Solving Elementary Word Problems*, „Cognition and Instruction", Vol. 1(3), s. 245-296.

Butterworth B. (2005), *The development of arithmetical abilities*, „Journal of Child Psychology and Psychiatry", 46:1, s. 3-18.

Carey S. (2001), *Cognitive Foundations of Arithmetic: Evolution and Ontogenesis*, „Mind & Language", Vol. 16, No. 1, s. 37-55.

Condry K. F., Spelke E. S. (2008), *The Development of Language and Abstract Concepts: The Case of Natural Number*, „Journal of Experimental Psychology", Vol. 137, No.1, s. 22-28.

Cummins D. D. (1991), *Childrens's Interpretations of Arithmetic Word Problems*, „Cognition and Instruction", Vol. 8(3), s. 261-289.

Dehaene S. (2001), *Precis of The Number Sense*, „Mind & Language", Vol. 16, No.1, s. 16-36.

Giaquinto M. (2001a), *Knowing Numbers*, „The Journal of Philosophy", Vol. 98, No.1, s. 5-18.

Giaquinto M. (2001b), *What Cognitive Systems Underlie Arithmetical Abilities?*, „Mind & Language", Vol. 16, No. 1, s. 56-68.

Ifrah G. (2006), *Historia powszechna cyfr*, (tłum. K. Marczewska), Warszawa, Wydawnictwo W.A.B.

Gelman R., Gallistel C. R. (2004), *Language and the origin of numerical concepts*, „Science", 306, s. 441-443.

Halberda J., Feigenson L. (2008), *Set representations required for the acquisition of the „natural number" concept*, „Behavioral and Brain Sciences", Vol. 31, s. 655-656.

Krysztofiak W. (2008), *Modalna arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych: możliwe światy liczb*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria", R. 17, Nr 2 (66), s. 79-107.

Nęcka E., Orzechowski J., Szymura B. (2007), *Psychologia poznawcza*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN.

Piaget J., Inhelder B. (1993), *Psychologia dziecka*, (tłum. Z. Zakrzewska), Wrocław, Wydawnictwo Siedmioróg.

Pica P., Lemer C., Izard V., Dehaene S. (2004), *Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group*, „Science", 306, s. 499-503.

Potter M. C., Levy E. I. (1968), *Spatial enumeration without counting*, „Child Development", Vol. 39, s. 265-272.

Riley M. S., Greeno J. G., Heller J. I., (1983), *Development of children's problem-solving ability in arithmetic*, [w:] (Ginsberg H. P. (red.), *The development of mathematical thinking*, Orlando, FL: Academic, s. 153-196).

Rips L. J., Bloomfield A., Asmuth J., (2008), *From numerical concepts to concepts of number*, „Behavioral and Brain Sciences", Vol. 31, s. 623-642.

Sawyer W. W. (1964), *Vision in Elementary Mathematics*, Penguin Books Ltd. Harmondsworth Middlesex (wydanie polskie: Sawyer W. W., (1988), *Myślenie obrazowe w matematyce elementarnej*, (tłum. K. Mostowska, A. W. Mostowski), Warszawa, Państwowe Wydawnictwo „Wiedza Powszechna").

Spelke E. S., Kindler K. D. (2007a), *Core knowledge*, „Developmental Science", Vol.10, No.1, s. 89-96.

Spelke E. S., Kindler K. D. (2007b), *Core systems in human cognition*, [w:] *Progress In Brain Research*, (C. von Hofsten, K. Rosander, red.),Vol. 164, s. 257-264.

Temple C. M., Sherwood S. (2002), *Representation and retrieval of arithmetical facts: Developmental difficulties*, „Quarterly Journal of Experimental Psychology", 55A, s. 733-752.

Wynn K. (1990), *Children's understanding of counting*, „Cognition", Vol. 36, s. 155-193.

Wynn K. (1992), *Children's acquisition of number words and the counting system*, „Cognitive Psychology", Vol. 24, s. 220-251.