Filozofia Nauki
Rok XX, 2012, Nr 2(78)

Krzysztof Wójtowicz

Strukturalizm a realizm obiektowy — rzeczywisty spór?

Celem artykułu jest prezentacja podstawowych założeń stanowiska strukturalistycznego, jak również omówienie pewnych trudności w sformułowaniu owego stanowiska.[1] Stawiam w szczególności tezę, iż pewne różnice między stanowiskiem strukturalizmu a tradycyjnej wersji matematycznego realizmu nie są tak głębokie, jak to na pierwszy rzut oka wygląda. Można więc powiedzieć, że — przynajmniej w niektórych kwestiach — spór między strukturalizmem a realizmem obiektowym jest do pewnego stopnia sporem pozornym. Ze względu na ramy artykułu prezentacja ma charakter szkicowy.[2]

1. WSTĘP

Nie ulega wątpliwości, że pojęcie struktury jest jednym z centralnych pojęć w matematyce i ma charakter wręcz uniwersalny. Pojęcie struktury odgrywa również istotną rolę w dyskusjach ontologicznych dotyczących matematyki, stając się centralnym pojęciem zyskującego coraz większą popularność nurtu strukturalistycznego.[3]

Stanowisko strukturalizmu matematycznego najczęściej pojawia się w — mówiąc swobodnie — towarzystwie ontologicznej tezy matematycznego realizmu. Py-

---

[1] Podstawą do napisania artykułu było wystąpienie *Strukturalizm a realizm obiektowy — rzeczywisty spór?* na III Konferencji Filozofii Matematyki w Poznaniu (17-18.10.2011). Dziękuję Organizatorom za zaproszenie i stworzenie wspaniałej atmosfery na konferencji.

[2] Podobnej problematyce poświęcone były również prace [Wójtowicz 2006, 2009] oraz fragmenty [Wójtowicz 2003]. W niniejszym artykule wykorzystuję fragmenty pierwszej z ww. prac.

[3] Podstawowa dla tego ujęcia monografia to [Shapiro 1997], należy wymienić też monografie [Resnik 1998], [Chihara 2004], w polskiej literaturze zaś [Bondecka-Krzykowska 2007].

tanie dotyczące natury bytów matematycznych można jednak zadać dopiero po udzieleniu pozytywnej odpowiedzi na pytanie o ich istnienie. Dyskusja realizm-antyrealizm w filozofii matematyki jest niezwykle bogata (w ostatnich 30 latach pojawiło się szereg zupełnie nowych propozycji) i referowanie jej tutaj mijałoby się z celem. W niniejszym artykule przyjmuję więc niejako *implicite* tezę matematycznego realizmu, interpretując spór strukturalizm *versus* realizm obiektowy jako spór wewnątrz obozu matematycznych realistów.[4]

2. PROBLEM NATURY OBIEKTÓW MATEMATYCZNYCH

Pytanie dotyczące natury obiektów matematycznych nie ma zbyt klarownego sformułowania. Jego bardziej uchwytną wersją jest pytanie o kryterium identyczności obiektów matematycznych, czy też o to, co nadaje obiektowi matematycznemu tożsamość. Na jakiej podstawie identyfikujemy pewien obiekt matematyczny jako np. pewną określoną liczbę, jako ciąg liczb zespolonych zbieżny do zera, jako torus czy też jako określoną przestrzeń funkcyjną? Jakie kryteria identyczności obowiązują: czy obiekty matematyczne mają tożsamość indywidualną, niezależną od innych obiektów matematycznych? Czy też jest wprost przeciwnie: ustalenie tożsamości obiektu matematycznego wymaga jedynie ustalenia, w jakich relacjach z innymi obiektami matematycznymi pozostaje? W tej kwestii rysują się dwa przeciwstawne stanowiska, podstawową różnicę zaś między nimi można wyrazić w formie dwóch fundamentalnych tez.

Zasadnicza teza realizmu obiektowego (RO): obiekty matematyczne mają pewne własności wewnętrzne, posiadają pewną wewnętrzną tożsamość.

Zasadnicza teza strukturalizmu (STR): Tożsamość obiektu matematycznego jest wyznaczona jedynie przez relacje, w jakie wchodzi on z innymi obiektami.

W myśl stanowiska strukturalizmu obiekty matematyczne nie mają zatem indywidualnej, wewnętrznej tożsamości, ich cechy są bowiem jedynie cechami relacyjnymi. Resnik pisze o tym w następujący sposób:

> obiekty matematyczne nie mają wyróżniających ich cech z wyjątkiem tych, które mają na mocy ich relacji do innych pozycji w strukturze, do której należą. Uważam punkt geometryczny […] za paradygmatyczny obiekt matematyczny [Resnik 1996, 84].

Intuicja, która jest podstawowa dla tego stanowiska głosi — mówiąc swobodnie — że świat matematyczny stanowi swoistą „sieć relacji”. O tożsamości obiektu matematycznego decyduje miejsce w tej sieci — a nie jego wewnętrzne cechy. Liczba 5

[4] Należy jednak pamiętać, że to założenie ma charakter roboczy, istnieje bowiem również filozoficznie bardzo ciekawa antyrealistyczna wersja strukturalizmu (mam tu na myśli modalny strukturalizm Hellmana, por. [Hellman 1989]). Okazuje się więc, że spór o naturę obiektów matematycznych można toczyć nawet wówczas, gdy odrzuca się ich istnienie.

nie jest ową liczbą *per se*, ale zyskuje tożsamość jedynie jako miejsce w pewnej strukturze liczbowej (w ω-ciągu).[5]

U podłoża stanowiska strukturalistycznego leżą dość — jak się wydaje — jasne intuicje. Trudno jest je jednak sprecyzować i wyartykułować w wyraźny sposób. Trudno też w jasny sposób opisać różnice między stanowiskiem strukturalistycznym i stanowiskiem realizmu obiektowego — i w szczególności wykazać, że te różnice nie są czysto werbalne. Trudność bierze się m.in. stąd, że naszych analiz nie możemy rozpocząć od gotowego systemu pojęć, które miałyby ustalony, dany już uprzednio sens i w oparciu o ten system formułować obie koncepcje (koncepcję strukturalistyczną i „obiektową”). Niewątpliwie najwygodniejsze byłoby zinterpretowanie obu punktów widzenia w systemie pojęć niejako zewnętrznym, neutralnym z punktu widzenia stawianych tez i akceptowalnym dla obu stron sporu. To jednak nie wydaje się możliwe, ponieważ dyskutanci uważają swoje systemy pojęć za podstawowe i w ramach tychże systemów dokonują reinterpretacji stanowiska oponenta. Co więcej, samo stanowisko strukturalistyczne jest trudne do klarownego sformułowania, co przyznają sami strukturaliści. Jedną z trudności stanowiska strukturalistycznego jest więc jego jasne wysłowienie i podanie argumentów za tym, że faktycznie różni się ono w istotny sposób od stanowiska realizmu obiektowego.

3. PROBLEM WIELOREDUKCJI — MOTYWACJA DLA STRUKTURALIZMU

Pominę tutaj motywacje historyczne oraz motywacje o charakterze ogólniejszym niż dotyczące tylko matematyki.[6] W ramach samej filozofii matematyki ważnych motywacji dla sformułowania stanowiska strukturalistycznego dostarcza tzw. problem wieloredukcji Benacerrafa, przedstawiony na przykładzie teoriomnogościowej reprezentacji liczb naturalnych [Benacerraf 1965]. Jak wiadomo, teoria liczb naturalnych daje się interpretować w teorii mnogości, czyli liczby naturalne można traktować jako zbiory pewnego typu (zredukować do zbiorów). W standardowej takiej reprezentacji (von Neumana) liczby naturalne są utożsamiane po prostu ze skończonymi liczbami porządkowymi. Funkcję liczby 0 pełni zbiór pusty $\varnothing$, funkcję liczby 1 — zbiór $\{\varnothing\}$, funkcję liczby 2 — zbiór $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ itd. Kolejne (zbiory reprezentujące) liczby naturalne są więc tworzone zgodnie z zasadą: $n+1 = n \cup \{n\}$. Ciąg liczb naturalnych (0, 1, 2, 3…) będzie zatem reprezentowany jako ciąg skończonych liczb porządkowych:

---

[5] „Uważam, że w matematyce nie mamy do czynienia z obiektami mającymi „wewnętrzne” własności, które tworzą struktury — mamy jedynie struktury. Obiekty matematyczne…są punktami bez struktury — albo miejscami w strukturach. Jako miejsca w strukturach, nie mają one żadnej tożsamości, ani cech niezależnie od struktury” [Resnik 1981, 530].

[6] Motywacji dla formułowania strukturalistycznej wizji matematyki dostarcza np. doktryna ontologicznego relatywizmu Quine’a. Pomijam jednak te kwestie.

$$\varnothing; \{\varnothing\}; \{\varnothing,\{\varnothing\}\}; \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\ldots$$

Ta reprezentacja ma oczywiście liczne zalety — chociażby właśnie tę, iż stanowi szczególny przypadek ogólnej metody generowania liczb porządkowych (liczby naturalne stanowią początkowy fragment tej hierarchii). Nie jest to jednak oczywiście jedyna możliwa formalna reprezentacja liczb naturalnych w teoriomnogościowym systemie pojęć. Inna — równie dobra z logicznego punktu widzenia — to reprezentacja liczb naturalnych jako:

$$\varnothing; \{\varnothing\}; \{\{\varnothing\}\}; \{\{\{\varnothing\}\}\},\ldots$$

Tutaj zbiór reprezentujący kolejną liczbę naturalną definiowany jest jako: $n+1 = \{n\}$.

Pojawia się naturalne pytanie: które zbiory to **tak naprawdę** liczby naturalne? Jeśli bowiem jesteśmy matematycznymi realistami, przyjmującymi przy tym ontologię teoriomnogościową jako podstawową, a zarazem twierdzimy, że obiekty matematyczne mają pewną tożsamość, to pytanie to nabiera sensu i powinniśmy udzielić na nie odpowiedzi.

Nie jest jednak możliwe podanie jakiekolwiek dobrego kryterium, które pozwoliłoby na wskazanie którejkolwiek z tych redukcji jako kanonicznej (a należy pamiętać, że możliwych reprezentacji liczb naturalnych i operacji arytmetycznych w ramach teorii mnogości jest wiele). Zdaniem Benacerrafa płynie stąd wniosek, że w ogóle nie ma sensu utożsamianie liczb z określonymi zbiorami. Twierdzenie, że liczby naturalne mają ustaloną naturę *per se*, niejako wewnętrznie determinującą ich identyczność, staje się twierdzeniem bezpodstawnym. Rolę liczb naturalnych może odgrywać (mówiąc z pewną przesadą) niemal cokolwiek, można je bowiem identyfikować jedynie przez scharakteryzowanie ich roli (miejsca) w strukturze liczb naturalnych (czyli — mówiąc bardziej technicznie — w ω-ciągu). Takie ujęcie ma wyraźnie strukturalistyczny charakter: liczby naturalne są tu sprowadzone do miejsca w pewnej strukturze, nie są zaś traktowane jako obiekty mające wewnętrzną tożsamość. Intuicje leżące u podłoża powyższych rozważań dotyczących liczb strukturaliści rozciągają na całą matematykę, twierdząc, że charakteryzowanie obiektów matematycznych jest możliwe jedynie przez opis ich cech relacyjnych.

4. STRUKTURALIZM W WERSJI *ANTE REM*

Strukturaliści odwołują się do obrazowych porównań — mówią na przykład o tym, że funkcja prezydenta jest czymś innym niż osoba prezydenta (funkcja prezydenta jest określona przez stosowną sieć relacji z innymi podmiotami życia publicznego, to zaś, kto aktualnie tę funkcję piastuje, nie ma znaczenia). Podobnie — zdaniem strukturalistów — przedstawia się sprawa z obiektami matematycznymi. Mówiąc swobodnie, o tożsamości obiektu matematycznego decyduje jedynie odgrywana przez niego rola. Zgodnie z podstawowymi intuicjami strukturalisty pierwotne są struktury. Jaka jest ontyczna relacja między owymi strukturami a obiektami matematycznymi? Shapiro ([Shapiro 1997]) wyróżnia w tej kwestii dwa podstawowe punkty widzenia, które określa jako *places-are-offices* oraz jako *places-are-objects*:

1. *Places-are-offices:* dana jest pewna pierwotna ontologia (*background ontology* — nazwę ją „ontologią tła"), która jest źródłem obiektów matematycznych. Obiekty te są zatem **dane uprzednio** i to one odgrywają odpowiednie role w strukturach.

2. *Places-are-objects*: pierwotne są struktury, natomiast ich ewentualne egzemplifikacje odgrywają rolę wtórną. Pojęcie miejsca w strukturze jest — mówiąc swobodnie — pierwotne wobec obiektu zajmującego to miejsce. Nie mamy zatem na myśli żadnej danej uprzednio i pierwotnej wobec struktur ontologii.

Shapiro odwołuje się do tych dwóch perspektyw, rozważając trzy różne wersje stanowiska strukturalistycznego. Są to:

1. Strukturalizm eliminacyjny,
2. Strukturalizm modalny,
3. Strukturalizm *ante rem*.

Strukturalizm w wersji eliminacyjnej jest stanowiskiem w pewnym sensie hybrydowym, zakładającym istnienie „ontologii tła", z której pochodzą obiekty matematyczne. Ta ontologia nie ma jednak charakteru czysto strukturalistycznego. Pominę więc ów wariant; nie będę tu przedstawiał też modalnej wersji strukturalizmu.[7] Sam Shapiro przyjmuje wersję *ante rem* strukturalizmu, w ramach którego zakłada się samoistne istnienie struktur jako bytów *per se* — bez konieczności przyjmowania „ontologii tła".[8] Ważne pojęcia, które pojawiają się w tej koncepcji to pojęcia **struktury** oraz **systemu**, gdzie system rozumiany jest jako odpowiedni zespół miejsc w strukturze z określonymi na nim relacjami i funkcjami. Zachodzi między nimi istotna różnica: mogą bowiem istnieć dwa systemy **różne**, które są **izomorficzne** (np. dwa izomorficzne ω-systemy: (a) 1, 3, 5…; (b) 2, 4, 6…., są zbudowane z **różnych** miejsc w strukturze liczbowej), w wypadku struktur jest jednak inaczej: izomorfizm struktur stanowi jednocześnie kryterium ich identyczności. Kryteria identyczności struktur i systemów są więc odmienne.

Koncepcja Shapiro jest wzorowana na teorii mnogości, nie znaczy jednak, że się do niej sprowadza. Shapiro traktuje bowiem pojęcie struktury jako pierwotne i podaje odpowiednią aksjomatyzację — teoria mnogości jest zaś traktowana jako jedna z wielu dyscyplin matematycznych, a nie dyscyplina wyróżniona. Przytoczę kilka przykładów, przedstawiając je w wersji uproszczonej — ukaże to ogólną ideę[9]:

---

[7] Analizę tych stanowisk można znaleźć w pracy [Wójtowicz 2003].

[8] „Struktury istnieją niezależnie od tego, czy są egzemplifikowane w pewnym niestrukturalnym ‘królestwie’, czy nie" [Shapiro 1997, 89].

[9] Prezentację tych wersji aksjomatów Shapiro zaczerpnąłem z pracy [Wójtowicz 2009].

(1) Aksjomat nieskończoności: Istnieje co najmniej jedna struktura mająca nieskończenie wiele miejsc.[10]

(2) Aksjomat odejmowania (*subtraction*): Niech *S* będzie strukturą, a *R* relacją z *S*. Istnieje wówczas struktura *S** izomorficzna z systemem składającym się z miejsc i relacji określonych na strukturze *S*, z wyjątkiem relacji *R*.[11]

(3) Aksjomat podklasy (*subclass*): Niech *S* będzie strukturą, a *c* podklasą miejsc w *S*. Istnieje wówczas struktura *S** izomorficzna z systemem składającym się z *c*, ale bez relacji.

(4) Aksjomat dołączania (*addition*): Niech *S* będzie strukturą, *R* zaś dowolną relacją określoną na miejscach struktury *S*. Istnieje wówczas struktura *S** izomorficzna z systemem, który składa się z miejsc i relacji danych w strukturze *S* wraz z dołączoną relacją *R*.[12]

(5) Aksjomat struktury potęgowej (*powerstructure*) stwierdza, że istnieje struktura stanowiąca „imitację" zbioru potęgowego danej struktury S.[13]

Shapiro wprowadza także dalsze aksjomaty (odpowiednik aksjomatu zastępowania; aksjomat koherencji, wyrażający fakt, że każda spójna teoria opisuje pewną strukturę, oraz aksjomat refleksji). To ma zapewnić jego teorii struktur dostateczną siłę — odpowiadającą sile teorii mnogości. Takie ujęcie uwalnia nas od konieczności uznania pojęcia należenia za pojęcie podstawowe. Teoria struktur ma więc bardziej uniwersalny charakter i stanowić to ma jej metodologiczną zaletę. Należy tu jednak powiedzieć, że sam Shapiro przyznaje, że nie stanowi to argumentu rozstrzygającego: teoria struktur i teoria mnogości są bowiem do siebie sprowadzalne. Ilustruje to wypowiedź Shapiro dotycząca różnych wariantów stanowiska strukturalistycznego:

> W pewnym sensie wszystkie mówią to samo, z użyciem innych pojęć pierwotnych. Sytuacja strukturalizmu jest podobna do sytuacji geometrii. Pierwotne mogą być punkty albo proste. Nie ma to znaczenia, ponieważ w obu wypadkach opisywana jest ta sama struktura [Shapiro 1997, 97].

Te warianty można do siebie sprowadzić (oczywiście kosztem pewnych dodatkowych założeń). Wybór jest więc — do pewnego stopnia — kwestią gustu.

---

[10] Jest to odpowiednik teoriomnogościowego aksjomatu istnienia zbioru nieskończonego.

[11] Idea jest prosta: (1) Mamy strukturę *S*. (2) Pomijamy jedną relację *R*. (3) To nam tworzy pewien nowy system. (4) Zakładamy, że istnieje struktura *S** izomorficzna z tym systemem.

[12] Czyli istnieje struktura *S** powstająca po wzbogaceniu struktury *S* o pewną relację.

[13] Formalnie: Niech *S* będzie strukturą, *A* zaś — klasą miejsc w tej strukturze. Istnieje struktura *P* i dwuargumentowa relacja *E* określona w *P* taka, że dla dowolnego podzbioru $s \subseteq A$ istnieje miejsce x_s w strukturze *P* takie, że: $\forall z(z \in s \Leftrightarrow E(z,x_s))$. Relacja *E* „imituje" teoriomnogościową relację należenia.

Struktura *P* odgrywa niejako ową rolę zbioru potęgowego. Każdemu podzbiorowi $s \subseteq A$ odpowiada pewne miejsce x_s w strukturze *P*. Swobodnie mówiąc, to miejsce x_s będzie odgrywać rolę zbioru *s*. Relacja *E* w strukturze *P* ma więc imitować relację należenia.

5. GRUPA PERMUTACJI JAKO KANONICZNY PRZYKŁAD

Intuicje strukturalistyczne pojawiają się w bardzo naturalny sposób w tych dziedzinach matematyki, gdzie nie mamy do czynienia z żadnym kanonicznym przykładem obiektu danego typu, z żadnym — mówiąc swobodnie — modelem zamierzonym, lecz w których badamy całą klasę obiektów mających pewne wspólne cechy strukturalne, jak np. grupy, pierścienie, moduły, przestrzenie liniowe *etc*. W naturalny sposób motywacje dla stanowiska strukturalistycznego możemy więc znaleźć w algebrze. Dla ilustracji rozważmy prosty przykład grupy permutacji n-elementowego zbioru. Odnotujmy najpierw podstawowy fakt: jeśli dwa skończone zbiory X i Y mają tyle samo (powiedzmy — n) elementów, ale są to **różne** zbiory, to ich grupy permutacji $S_n(X)$ oraz $S_n(Y)$ także są różne (jedna składa się z przekształceń określonych na zbiorze X, druga — na zbiorze Y). Są jednak izomorficzne, a zatem **z dokładnością do izomorfizmu** istnieje tylko jedna grupa permutacji zbioru n-elementowego (oznaczmy ją przez S_n).

Oznaczmy przez T_n teorię, która opisuje grupę permutacji zbioru n-elementowego. Można zadać pytanie: który **konkretnie** zbiór przekształceń $S_n(X)$ opisuje teoria T_n? Pytanie to brzmi jednak nienaturalnie i matematyk zajmujący się własnościami grupy permutacji S_n uzna je za co najmniej dziwne (by nie powiedzieć — niemądre). Również pytanie o to, która **konkretnie** funkcja id_X: X→X jest „tak naprawdę” elementem neutralnym grupy S_n, zostanie uznane za dziwaczne. Matematyk powie bowiem, że nie ma najmniejszego znaczenia to, na jakim zbiorze X określony jest zbiór permutacji $S_n(X)$, ważne są bowiem jedynie czysto strukturalne cechy grupy permutacji. Doda przy tym, że grupę permutacji postrzega jako pewną **strukturę** S_n, nie zaś zbiór konkretnych przekształceń zdefiniowanych na określonym zbiorze. Z punktu widzenia opisu tej struktury S_n ważne są **miejsca w strukturze**, a nie **konkretne** funkcje (po prostu to, na jakim zbiorze X określone są te funkcje, nie ma znaczenia).

Posługując się strukturalistyczną terminologią, fakt ten można wyrazić w następujący sposób:

(a) Istnieje **jedna grupa permutacji** S_n.
(b) Istnieje **wiele** systemów $S_n(X)$.

Z punktu widzenia stanowiska STR teoria T_n dotyczy pewnej **struktury** — mianowicie S_n. Ta struktura jest izomorficzna z każdym z systemów $S_n(X)$, choć od nich różna. Natomiast reprezentant RO będzie opisywał tę sytuację raczej w terminach modeli dla teorii, relacji między tymi modelami *etc*. Powie zatem, że żaden konkretny zbiór $S_n(X)$ nie jest kanonicznym modelem dla T_n, natomiast wszystkie te zbiory są (jako modele) izomorficzne.

Różnice w stanowiskach RO i STR uwidocznią się też, gdy rozważymy pytanie, czego dotyczy termin „element neutralny grupy permutacji”. Tu odpowiedzi również będą się istotnie różnić:

(RO) Termin ten nie dotyczy żadnego **ustalonego** obiektu. W każdym zbiorze permutacji $S_n(X)$ termin ten ma swój desygnat ($id_X: X \rightarrow X$).

(STR) Termin ten dotyczy pewnego miejsca w strukturze S_n (miejsca będącego elementem neutralnym struktury S_n).

Mamy więc do czynienia z różnymi opisami tego, czym jest grupa permutacji. Oczywiście, różnice w stanowiskach RO i STR nie dotyczą tylko grupy permutacji czy innych grup. Strukturalizm — swobodnie mówiąc — rozciąga tego typu intuicje na całą matematykę, uważając przykład teorii grup za reprezentatywny dla matematyki i nadając rangę ogólną argumentacji dotyczącej grupy permutacji. Zdaniem strukturalistów czysto strukturalną naturę mają wszystkie obiekty matematyczne, nie tylko grupa permutacji. Nie istnieją bowiem żadne własności przedmiotów matematycznych, które nie redukowałyby się do relacji z innymi przedmiotami. O obiektach matematycznych można zaś orzekać tylko i wyłącznie „na tle" struktury, w której te obiekty się znajdują. Myślenie o wewnętrznych cechach obiektów matematycznych nie ma żadnego sensu, tylko bowiem struktura nadaje obiektom tożsamość.

6. PROBLEM ZASIĘGU INTUICJI STRUKTURALISTYCZNYCH

Nie ulega wątpliwości, że przykład grupy permutacji jest sugestywny i że bardziej naturalne jest myślenie o niej w kategoriach pewnej struktury niż w kategoriach modelu zamierzonego. Jest to wyraz pewnej ogólniejszej tendencji, z jaką mamy do czynienia w algebrze. Nie jest jednak wcale oczywiste, że rozciąganie tych intuicji na **całą** matematykę jest właściwe. Ograniczę się tutaj do rozważenia przykładu pojęcia zbioru i pojęcia należenia (jednak podobne rozważania można byłoby prowadzić w odniesieniu do innych pojęć matematycznych).

Zdaniem strukturalisty stwierdzenie, że a jest elementem zbioru b ($a \in b$) jest stwierdzeniem zachodzenia pewnej czysto strukturalnej zależności między a i b. Swobodnie mówiąc, w ujęciu strukturalistycznym uniwersum mnogościowe można wyobrażać sobie jako swoistą sieć, w której węzłach znajdują się zbiory (czy raczej: której węzły odgrywają rolę zbiorów).[14] W ramach takiego sposobu myślenia stwierdzenie, iż a należy do b, wyraża jedynie istnienie pewnego powiązania między tymi obiektami, nie tkwi w nim jednak bynajmniej założenie jakiejś ontologicznej zależności czy uprzedniości. Z punktu widzenia strukturalisty w uniwersum mnogościowym mamy do czynienia z czysto strukturalnymi zależnościami. A zatem ontologiczny status miejsc w strukturze, np. status obiektów takich jak:

— *miejsce_w_strukturze_liczba_5*;
— *miejsce_w_strukturze_zbiór_liczb_nieparzystych*;

---

[14] Widoczne to jest wyraźnie w przytaczanej wcześniej aksjomatyce teorii struktur podanej przez Shapiro.

— *miejsce_w_strukturze _zbiór_przeliczalnych_podzbiorów_**R***;
etc.

jest taki sam. Z punktu widzenia strukturalistycznego nie ma bowiem sensu mówienie o uprzedniości elementu (miejsca) *a* względem zbioru (miejsca) *b*. Nasze intuicje są jednak odmienne: sądzimy przecież, że to obiekty są **uprzednie** w stosunku do utworzonego z nich zbioru, a zbiory tworzone są z już dostępnych obiektów za pomocą pewnych operacji. Elementy zbioru są wobec niego ontycznie pierwotne, są — mówiąc swobodnie — tworzywem, z którego tworzone są nowe zbiory. Jest tu więc wyraźna zależność ontyczna. Taka intuicja znajduje swój wyraz w iteracyjnej koncepcji hierachii mnogościowej, którą postrzega się jako powstającą w kolejnych etapach przez zastosowanie operacji zbioru potęgowego i zastępowania, wykonanych z użyciem **uprzednio skonstruowanych** szczebli hierarchii mnogościowej. W takim ujęciu, wyższe szczeble hierarchii mnogościowej są zależne od niższych.[15] Istotne jest to, że zawsze owym „budulcem" są już skonstruowane uprzednio obiekty. Ta konstrukcja odbywa się w sposób iteracyjny i można sobie wyobrazić, że w konstrukcji uniwersum mnogościowego V zatrzymaliśmy się na pewnym poziomie $V_{á}$ (na przykład interesują nas tylko zbiory dziedzicznie skończone, a zatem operację tworzenia kolejnych poziomów iterujemy tylko wzdłuż liczb naturalnych, a nie w pozaskończoność). Natomiast według strukturalistów relacja między np. $\aleph_0$ i $\aleph_{2011}$ czy ω i $P(\omega)$ jest relacją czysto strukturalną. Nie można powiedzieć, że np. obiekt ω (czy ściśle: miejsce w strukturze grające rolę ω) jest w jakimkolwiek sensie pierwotny czy wcześniejszy ontycznie od miejsca w strukturze pełniącego rolę $P(\omega)$. Jest to niezgodne z naszymi intuicjami ontologicznymi dotyczącymi hierarchii zbiorów. Obiekcje wobec stanowiska strukturalistycznego utrzymane w tym duchu formułuje np. Parsons:

> Poważniejszy powód traktowania strukturalizmu jako fałszywego poglądu na teorię mnogości można wyprowadzić z intuicji dotyczących zbiorów o ogólniejszym ontologicznym charakterze. Na przykład istnieje koncepcja zbioru jako ogółu „ukonstytuowanego" przez jego elementy, a więc czegoś, co jest ontologicznie zależne od elementów, ale nie na odwrót. Dodaje to do relacji należenia pewną nową treść, ciągle bardzo abstrakcyjną, ale będącą w sposób widoczny czymś więcej, niż dopuściłby czysty strukturalizm [Parsons 1990, 371].

Jego zdaniem bowiem

> Pojęcie zbioru rozwinięte w teorii mnogości opiera się na dwu pojęciach elementarnych, z których żadne nie jest pojęciem czysto strukturalnym: na pojęciu zbioru jako „kolekcji" czy „ogółu" jego elementów i na pojęciu ekstensji predykatu, to znaczy na obiekcie przyporządkowanym predykatowi wraz z warunkami ekstensjonalności jako warunkami identyfikacji. [Parsons 1990, 375].

[15] W kroku następnikowym, $V_{\alpha+1}$ powstaje z poprzedniego szczebla poprzez operację tworzenia zbioru potęgowego: $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$; w krokach λ granicznych, poziom V_λ powstaje jako suma $\cup \{V_\alpha : \alpha<\lambda\}$.

Pojęcie należenia ma zatem pewną dodatkową wymykającą się czysto strukturalistycznemu opisowi treść.

7. KOSZTY ONTOLOGICZNE STANOWISKA STR

Stanowiska RO i STR sformułowane są w dwóch różnych systemach pojęć, można jednak wskazać pewne odpowiedniości. Sądzę w szczególności, że pojęcie struktury, które jest podstawowe dla stanowiska strukturalistycznego, jest odpowiednikiem pojęcia klasy izomorfizmu, o którym można mówić w ramach stanowiska RO. Rozważmy ów problem na przykładzie dyskusji na temat modeli dla arytmetyki (ograniczam tutaj uwagę do modeli izomorficznych z modelem standardowym, co upraszcza prezentację).[16]

Z punktu widzenia strukturalisty mówienie o modelach dla arytmetyki jest *de facto* mówieniem o różnych ω-systemach. Te systemy egzemplifikują pewną ω-strukturę, która jest (z punktu widzenia strukturalisty) właściwym przedmiotem zainteresowania arytmetyki, i to właśnie ta struktura jest pierwotna z punktu widzenia ontologicznego. Z punktu widzenia realisty obiektowego (RO), takie postawienie sprawy nie jest właściwe, ponieważ za bazę ontologiczną dla matematyki uzna on uniwersum mnogościowe V, które zawiera w szczególności wszystkie możliwe ω-systemy. Z punktu widzenia stanowiska RO strukturalista postuluje istnienie pewnych dodatkowych bytów spoza tej hierarchii — czyli struktur (w szczególności postuluje istnienie ω-struktury). Z punktu widzenia stanowiska RO owe ω-struktury są po prostu klasami izomorfizmu (które nie istnieją w V, ale o których można mówić nieformalnie[17]). Owe klasy izomorfizmu są reifikowane przez strukturalistę i traktowane jako byty *per se*, wprowadzane aksjomatycznie, niejako przez zadekretowanie. W ramach stanowiska strukturalistycznego teoria mnogości nie stanowi bazy dla matematyki, ale stanowi jedną z wielu teorii. I podobnie: uniwersum mnogościowe nie stanowi „zasobnika” bytów matematycznych, ale zaledwie jedną z wielu struktur (jest to struktura S_V), a oprócz niej istnieje wiele innych struktur. Jednak z punktu widzenia RO te wszystkie struktury są wtórne w stosunku do ontycznie pierwotnej struktury mnogościowej i na niej — mówiąc kolokwialnie — pasożytują.

Zwolennik STR oczywiście nie zgodzi się z tym punktem widzenia, uwypuklając intuicję, iż to struktury matematyczne są ontologicznie pierwotne, struktura mnogościowa S_V jest zaś jedynie jedną z nich. Fakt, że jest ona bardzo bogata i że w jej ramach dają się modelować pozostałe struktury (tzn. w ramach tej struktury dają się

[16] Cała dalsza dyskusja dotyczy w takim samym sensie także modeli niestandardowych. Można byłoby też sformułować ją w odniesieniu do arytmetyki drugiego rzędu PA^2. To jednak nie jest istotne dla przedstawienia zasadniczej idei.

[17] Sytuacja przypomina sytuację z klasą wszystkich liczb porządkowych czy klasą uniwersalną — formalnie nie istnieją jako zbiory, ale można o nich mówić nieformalnie jako o ekstensjach pewnych formuł.

definiować systemy izomorficzne z innymi strukturami matematycznymi, np. daje się tam zdefiniować ω-system izomorficzny z ω-strukturą), nie znaczy bynajmniej, że ona jest pierwotna ontycznie. Zauważmy tutaj, że strukturalista odwołuje się do pojęcia izomorfizmu, które uzna za pierwotne, pojęcie klasy izomorfizmu realisty uzna zaś za imitację pojęcia struktury w systemie pojęć RO.

Można więc powiedzieć, że z punktu widzenia stanowiska RO przyjęcie stanowiska strukturalistycznego wiąże się z koniecznością zaakceptowania znacznych kosztów ontologicznych. Konieczne jest bowiem oprócz założenia istnienia teoriomnogościowej struktury S_V również założenie istnienia wszystkich struktur izomorficznych z systemami definiowalnymi na podstawie struktury S_V. Wszystkie te struktury traktowane są przy tym jako samoistne byty. W ramach stanowiska RO problem ten się nie pojawia: zakładamy bowiem (przynajmniej w mnogościowej wersji strukturalizmu), że wszelkie byty matematyczne „mieszkają" w uniwersum mnogościowym V i że nie jest konieczne postulowanie dodatkowych reprezentacji tych obiektów poza V. Stanowisko strukturalistyczne narusza w zasadniczy sposób brzytwę Ockhama. Owe dodatkowe „koszty ontologiczne" są niejako immanentnie związane ze stanowiskiem STR (w każdym razie w wersji Shapiro): teoria struktur jest wzorowana na teorii mnogości drugiego rzędu, odpowiednie aksjomaty teorii struktur są zaś *de facto* swoistymi translacjami aksjomatów teorii mnogości. Jednak oprócz tej bogatej struktury teoriomnogościowej strukturalista zakłada również istnienie bogatej klasy struktur traktowanych jako byty *per se*.

8. ONTYCZNA NIEZALEŻNOŚĆ Z PUNKTU WIDZENIA RO I STR

Sądzę, że analiza problemu relacji ontycznych między bytami matematycznymi ukazuje pewną pozorność różnic między stanowiskiem STR i RO. Wyjdźmy od obserwacji, iż podstawowe hasło STR można ująć jako: obiekty to tylko miejsca w strukturze; obiekty matematyczne mają tylko i wyłącznie cechy relacyjne, nie ma więc sensu mówienie o ich naturze niezależnie od istnienia innych obiektów matematycznych.[18] Traktując tę charakterystykę jako punkt wyjścia, zastanówmy się, czy należy w takim razie uznać, że charakterystyczne dla stanowiska RO ma być stwierdzenie, że obiekty matematyczne mają tożsamość daną niezależnie od (istnienia) innych obiektów. Innymi słowy, czy zwolennik stanowiska RO zgodziłby się np. na następujące stwierdzenia:

(a) Liczba 5 byłaby tą właśnie liczbą, nawet gdyby nie było żadnych innych liczb?

---

[18] „Strukturalizm […] rozpoczyna od zauważenia, że jedyną rzeczą, którą da się powiedzieć o abstrakcyjnych obiektach matematyki, jest to, że są one powiązane relacjami w pewnych strukturach i wyprowadza stąd wniosek, że mówienie o obiektach mających tak mało określoną naturę wewnętrzną jest jedynie *façon de parler*." [Parsons 1990, 370].

(b) Liczba porządkowa ω_1 zachowałaby swoją tożsamość, nawet gdyby nie istniała pozostała część hierarchii mnogościowej?

(c) Zbiór **R** nadal miałby moc kontinuum, nawet gdyby nie istniały żadne inne obiekty (względem których — można dodać — można byłoby „kalibrować" moc zbioru…)?

Etc… Tak sformułowane tezy brzmią jawnie absurdalnie i trudno je przypisywać zwolennikom stanowiska RO. Jakiego typu tezy pojawiają się zatem w ramach RO? Czy stanowią one odpowiedniki (swoiste „tłumaczenia") tez przyjmowanych w ramach stanowiska STR? Twierdzę, że takie odpowiedniości można wskazać i że w tej kwestii różnice między stanowiskami RO i STR nie są aż tak głębokie, jak się pierwotnie wydaje.

Nie ulega wątpliwości, że zwolennik stanowiska RO uznaje, że między obiektami matematycznymi zachodzą pewne ontyczne zależności (niekiedy powie, że te zależności mają charakter konieczny). Jak już wspomniano wcześniej, charakterystyczne dla iteracyjnej koncepcji zbiorów jest np. stwierdzenie, że wyższe szczeble hierarchii mnogościowej nie mogą istnieć bez niższych szczebli (można powiedzieć, że są niejako ufundowane w niższych szczeblach hierarchii). Co więcej, w samym pojęciu zbioru tkwi to, że jest on zależny ontycznie od swoich elementów. Czy ten fakt stanowi argument na rzecz stanowiska STR? Gdyby tak było, to stanowisko STR byłoby w zasadzie jedynym rozsądnym stanowiskiem filozoficznym, prawdziwym niejako w sposób tautologiczny. Tak jednak przecież nie jest.

Zauważmy, że sens terminów matematycznych zadany jest zawsze w ramach pewnej teorii, pewnego środowiska pojęciowego, pewnego systemu pojęć. System ten może przyjąć postać sformalizowanej teorii aksjomatycznej, jak również być sformułowany w sposób nieformalny — ogólna zasada jest jednak taka sama. Także intuicyjna interpretacja pojęć matematycznych (i intuicyjny opis obiektów matematycznych) jest zależna od rozumienia całego systemu pojęciowego, nie odbywa się w izolacji. Znaczenie pierwotnych terminów zadawane jest przez postulaty i nie ma sensu zadawanie pytania o to, co znaczy termin matematyczny w oderwaniu od teorii, w której występuje.[19] Fakt ten zaakceptuje zarówno reprezentant stanowiska RO, jak i stanowiska STR. Nie da się myśleć o żadnym obiekcie matematycznym *O* w oderwaniu od dziedziny (niezależnie od tego, czy nazwiemy ją zbiorem, klasą, systemem czy strukturą), w którym interpretowana jest opisująca ten obiekt *O* teoria *T*. Tezy te zaakceptować musi także realista obiektowy, nie można ich więc uznać za wyróżnik stanowiska strukturalistycznego.

Strukturalista powie oczywiście, że obiekty matematyczne konstytuowane są jako miejsca w strukturze wraz z innymi miejscami w tej strukturze. Innymi słowy: aby w ogóle można było mówić o **jakimś** miejscu w danej strukturze S, trzeba mó-

[19] Z punktu widzenia np. aksjomatycznie ujętej teorii liczb, znaczenie terminu „dodawanie" opisane jest przez szereg postulatów, wyrażających np. przemienność tej operacji, relacje z operacją mnożenia, istnienie elementu neutralnego *etc.*

wić o **całej** tej strukturze — w szczególności o innych miejscach w tej strukturze. Zwolennik stanowiska RO powie natomiast, że między obiektami matematycznymi zachodzą pewne (konieczne) związki ontyczne — nie można patrzeć na obiekty matematyczne jako na obiekty „ontycznie izolowane". Samo zaakceptowanie faktu, że między obiektami matematycznymi muszą zachodzić pewne związki ontyczne nie stanowi jednak argumentu na rzecz stanowiska STR. Jeśli za wyróżnik stanowiska strukturalistycznego uznalibyśmy przyjęcie tezy o istnieniu pewnych koniecznych związków ontycznych między obiektami matematycznymi, to przy tym założeniu strukturalistyczne ujęcie matematyki staje się zasadne. Nie jest jednak wówczas jasne, jak można byłoby rozsądnie sformułować stanowisko niestrukturalistyczne. Twierdzę więc, że zarówno zwolennik stanowiska STR, jak i RO uzna *de facto* tę samą tezę, wysławiając ją jedynie w różny sposób, ewentualna zaś różnica między stanowiskami STR i RO okazuje się więc różnicą pozorną.

9. PODSUMOWANIE

(1) Motywacje stanowiska strukturalistycznego są jasne i wydają się naturalne w odniesieniu do niektórych teorii matematycznych (np. w wypadku teorii grup permutacji) czy nawet działów matematyki (algebry).

(2) Jednak rozciąganie tych intuicji na całą matematykę jest bezzasadne. Istnieją pojęcia matematyczne, które temu opisowi się wymykają, przykładem jest pojęcie należenia. Ma ono pewną ontologiczną, a nie czysto strukturalną treść.

(3) Zarówno stanowisko RO, jak i stanowisko STR wskazują na istotne wady stanowiska konkurencyjnego:

(a) Z punktu widzenia stanowiska STR problemem trudnym do rozwiązania w ramach stanowiska RO jest problem nieokreśloności referencji (przykład grupy permutacji S_n). W ramach stanowiska STR ten problem jest rozwiązany.

(b) Z punktu widzenia stanowiska RO istotną wadą stanowiska STR są bardzo silne założenia ontologiczne. Wynikają one stąd, że kryterium identyczności realisty obiektowego odpowiada kryterium identyczności systemów, struktury można zaś uznać za reifikacje klas izomorfizmu. Widoczne stają się dodatkowe koszty ontologiczne, które musi ponieść strukturalista: z punktu widzenia RO, struktury to *de facto* reifikacje klas izomorfizmu, a więc obiektów niejako nadwyżkowych w stosunku do zwykłej hierarchii mnogościowej.

(4) Nie można za wyróżnik stanowiska strukturalistycznego uznać tezy, że obiekty matematyczne wchodzą w pewne konieczne związki ontyczne z innymi obiektami matematycznymi i że charakteryzowane są w pewnym systemie pojęć, których sens jest dany całościowo. Tezę dotyczącą (koniecznych) związków ontycznych między obiektami matematycznymi przyjmuje również zwolennik obiektowej wersji realizmu. Ta różnica między stanowiskami jest więc pozorna.

BIBLIOGRAFIA

Benacerraf P.

[1965] „What numbers could not be”, *Philosophical Review*, 74, 47-73, przedrukowane w: Benacerraf P. Putnam H. (red.), *Philosophy of Mathematics*, wydanie drugie, 1983, Cambridge University Press, Cambridge, 272-294.

Bondecka-Krzykowska I.

[2007] *Matematyka w ujęciu strukturalnym*, Wydawnictwa Naukowe UAM, Poznań.

Chihara C.

[2004] *A Structural Account of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Hellman G.

[1989] *Mathematics without Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

Parsons C.

[1990] „The structuralist view of mathematical objects”, *Synthese*, 84, 303-346; polskie tłumaczenie „Strukturalizm o obiektach matematyki”, w: *Współczesna filozofia matematyki*, Murawski R. (red.), PWN, Warszawa, 2002, 359-376.

Resnik M. D.

[1981] „Mathematics as a science of patterns: ontology”, *Nous*, 15, 529-550.

[1996] „Structural Relativity”, *Philosophia Mathematica*, 4, 83-99.

[1998] *Mathematics as a Science of Patterns,* Oxford University Press, Oxford.

Shapiro S.

[1997] *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. Oxford University Press. New York, Oxford.

Wójtowicz K.

[2003] *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa.

[2006] „Kilka uwag o strukturalizmie matematycznym”, w: *Struktura i emergencja*, Heller M., Mączka J. (red.), OBI, Biblios, Tarnów, 79-93

[2009] „Podstawowe założenia strukturalizmu w filozofii matematyki”, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce*, XLIV, 40-60.