Filozofia Nauki
Rok XX, 2012, Nr 3(79)

Roman Duda

Uwagi o materii matematycznej i roli pojęć matematycznych

1. MATERIA MATEMATYCZNA

Terminem MATEMATYKA nazywa się pewien szczególny rodzaj wiedzy, którego nie próbujemy tu definiować.[1] Ufając, że jakoś jednak rozumiemy to, o czym mówimy, zwrócimy się ku pytaniu: czym się matematyka zajmuje? A ściślej: jakiego rodzaju obiekty matematyka bada?

Przez analogię z FIZYKĄ, która bada materię „fizyczną” i z BIOLOGIĄ, której przedmiotem jest materia „ożywiona”, nasuwa się pojęcie „materii matematycznej”. Idąc za tą analogią, będziemy przez MATERIĘ MATEMATYCZNĄ rozumieli konglomerat koncepcji i idei (niekoniecznie jasnych), pojęć (niekoniecznie wyraźnych), pytań o związki między koncepcjami i wyrastających z nich przypuszczeń i twierdzeń. Jednym słowem, konglomerat tworów na tyle specyficznych, że uznajemy je za „matematyczne”, może z nich bowiem wyrastać lub już wyrasta nasza matematyka. Materia matematyczna obejmuje matematykę, zarówno współczesną, jak i czasów minionych, ale jest koncepcją szerszą. Jest tworzywem, z którego powstają matematyczne konstrukty — pojęcia, twierdzenia i procedury — obejmując zarówno owe konstrukty, jak i surowiec, z którego powstały. W tak rozumianej materii matematycznej mieści się pierwotna arytmetyka ludów, które liczą „jeden-dwa-dużo” lub

[1] Nie istnieje powszechnie akceptowana definicja matematyki. Popularna książka: R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, Biblioteka Problemów, Warszawa 1959 — zamiast odpowiedzi na tytułowe pytanie przedstawia jej zarys. W praktyce przez matematykę rozumie się ten obszar wiedzy, który jest objęty zainteresowaniem czasopism przeglądowych (*Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH, Referatiwnyj Żurnal*) i jest uznawany przez komitety programowe Międzynarodowych Kongresów Matematyków.

inaczej liczą obiekty różnych gatunków, np. inaczej ludzi, zwierzęta, łodzie itp.[2], „głowa byka" Sumerów, czyli późniejszy trapez równoramienny, egipskie ułamki i greckie zapisy liczbowe, koncepcje liczb „urojonych" XVII-wiecznych algebraików włoskich, z których wyrosły liczby zespolone, do dziś ewoluujące pojęcia funkcji czy zbioru, a także np. całkiem współczesny aksjomat determinacji, że każda gra Banacha–Mazura ma strategię zwycięską.

Materia matematyczna stanowi przedmiot rozważań matematyków i z punktu widzenia zaawansowania jej przez nich obróbki można w niej wyróżnić trzy zasadnicze poziomy. Na poziomie najniższym znajdują się KONCEPCJE MATEMATYCZNE, których źródłem jest wcześniejsze POSTĘPOWANIE ABSTRAKCYJNE, wyróżniające je w materii fizycznej i odrywające od niej, np. liczby, figury geometryczne, porządki, oraz WYOBRAŹNIA, która jest w stanie dodawać nowe elementy, np. nieskończoność w postaci nieograniczonego powtarzania operacji „+1" w ciągu liczb naturalnych lub nieograniczonej (nieskończonej) linii prostej. Z tego poziomu wyrasta następny, na którym znajdujemy już wyróżnione, choć niekoniecznie definicyjnie, POJĘCIA MATEMATYCZNE, rozumiane jednak na tyle precyzyjnie, że można nimi jednoznacznie operować. Pojęcia matematyczne stanowią podstawowe tworzywo matematyki, z nich bowiem wyrasta poziom następny, na którym mieszczą się TEORIE MATEMATYCZNE, niekoniecznie jednak zaksjomatyzowane. Dobrze jest pamiętać, że do dzisiaj wiele szeroko używanych pojęć matematycznych nie ma wyraźnej definicji i większość rozwijanych teorii nie ma postaci aksjomatycznej.

teorie „matematyczne"
(niekoniecznie zaksjomatyzowane)

MATEMATYKA
(działalność i produkt)

↑

pojęcia „matematyczne": obiekty, morfizmy
(operacyjnie wyraźne, niekoniecznie zdefiniowane)

↑

koncepcje „matematyczne"
(często niewyraźne, ale dostatecznie abstrakcyjne)
źródła zewnętrzne (abstrakcja) i wewnętrzne (wyobraźnia)

Praca matematyków trwa na każdym z tych poziomów, a jej rezultatem jest żywa, nieustannie zmieniająca się i ewoluująca MATEMATYKA. Filozofia matematyki powinna śmielej przekraczać „kredowe koło" pojęć wyrażonych ścisłymi definicjami i zaksjomatyzowanych teorii matematycznych, do których się na ogół ogranicza,

[2] *The Ages of Mathematics*, tom I: M. Moffat, *The Origins*, New York 1977.

i zająć matematyką żywą, sięgając w głąb materii matematycznej. Wymaga to oczywiście uwzględnienia czynnika czasu, ale — jak powiedział Lakatos — filozofia i historia matematyki muszą się dopełniać.

2. STOSUNEK DO MATERII MATEMATYCZNEJ

„Materia matematyczna" jest terminem równie nieokreślonym jak „matematyka", ma ona jednakże zasługujące na uwagę zalety. Przede wszystkim zwraca uwagę na PRZEDMIOT matematyki: matematyka zajmuje się specyficzną „materią matematyczną", która jest czymś trochę innym i szerszym od matematyki samej, podobnie jak „materia fizyczna" jest czymś innym od fizyki, a „materia ożywiona" od biologii. W odróżnieniu jednak od tamtych materii, „materia matematyczna" obejmuje matematykę i jest niematerialna. Często stanowi ona wprawdzie jakieś odbicie obiektów i relacji obserwowanych w świecie fizycznym, ale jest to odbicie przetworzone przez umysł z istotnym dodatkiem twórczej wyobraźni. Istnieje też ona jedynie w ludzkich umysłach, które powołują ją do życia (są oczywiście jej materialne ZAPISY, ale mają się one do niej tak jak zapisy utworów muzycznych do muzyki samej).

Jedną z zalet wyróżnienia pojęcia materii matematycznej jest możliwość jaśniejszego rozróżnienia różnych wobec niej postaw.

MATEMATYK jest tym człowiekiem, który obcuje z materią matematyczną na co dzień, szlifuje jej idee, przetwarza i tworzy nowe, a upraszczając stare dowody, formułując i dowodząc nowe twierdzenia i budując teorie, wprowadza elementy ładu i powiększa matematykę samą.

Matematyka ma wiele dziedzin i subdziedzin. Z punktu widzenia jej metodologii wyróżnione miejsce zajmuje LOGIK MATEMATYCZNY, który analizuje metody postępowania w matematyce, formułuje kryteria poprawności i bada strukturę wiedzy matematycznej.

HISTORYK MATEMATYKI stawia sobie pytania inne: Gdzie, kiedy i w jakich okolicznościach powstawała materia matematyczna? Jak się tworzyły i ewoluowały pojęcia matematyczne? Jak powstawały i ewoluowały teorie matematyczne? Kim byli twórcy matematyki, jakie były ich motywy i cele?

FILOZOF MATEMATYKI zastanawia się nad takimi pytaniami jak: Co to jest materia matematyczna? Czy i jak ona istnieje? Jakie są jej źródła? Jaki jest jej stosunek do realnego świata? Skąd się bierze skuteczność matematyki?

DYDAKTYK MATEMATYKI stawia sobie za zadanie refleksję nad przekazywaniem wiedzy matematycznej innym: Jaką matematykę i jak przekazywać innym?

Coraz liczniejsi są też UŻYTKOWNICY MATEMATYKI, stosujący ją w swojej pracy zawodowej lub dla rozrywki, a także uczący się jej UCZNIOWIE I STUDENCI.

Każdy z nich ma inne wymagania i oczekiwania. Nie wdając się w ich analizę, można jednak powiedzieć, że bardzo wielu ludzi (wszyscy?) ma do czynienia z materią matematyczną, a niektórzy także z matematyką.

3. POCHODZENIE MATERII MATEMATYCZNEJ

Podstawowe pytanie dotyczące materii matematycznej odnosi się do jej źródeł: skąd się ona bierze, a ściślej, na jakiej podstawie umysł ludzki ją tworzy oraz co ją wyróżnia spośród innych rodzajów materii, a w szczególności, co wyróżnia należące do niej pojęcia „matematyczne" spośród innych rodzajów pojęć? Spróbuję na to pytanie odpowiedzieć, odwołując się do historii matematyki.

Jesteśmy zanurzeni w CZASIE. Jednym z najstarszych świadectw kultury duchowej człowieka jest kość z Blanchard, na której ponad 30 tysięcy lat temu jakiś człowiek zostawił ślady obserwacji Księżyca w ciągu kolejnych 69 nocy.[3] Zdumiewa przede wszystkim siła ciekawości, która kazała temu człowiekowi spędzić wiele kolejnych nocy na obserwowaniu Księżyca i pracowitym wydłubywaniu na kości znaków jego ubywania lub przybywania. Ale zasługuje ona na uwagę także i z tego względu, że znaki te dowodzą odczuwania upływającego czasu. Świadomość przemijania dała początek odliczaniu takich wydarzeń jak kolejne dni czy noce, a potem i innych jak miesiące księżycowe i lata słoneczne. Z tej materii matematycznej wyłoniła się koncepcja LICZBY NATURALNEJ jeden — dwa — trzy…, jeden z podstawowych elementów materii matematycznej.[4] Jak wskazują badania ludów pierwotnych, był to proces długotrwały, przechodzący przez różne etapy pośrednie, z których jednym mogły być (do dzisiaj obserwowane u niektórych ludów) osobne liczebniki na różne rodzaje przedmiotów. Także zakres tych liczb był początkowo niewielki, czasem zaledwie jeden — para — dużo. W trakcie procesu wyłaniania się koncepcji liczby doszło do zrozumienia, że liczby mogą służyć nie tylko do ODLICZANIA, ale także do RACHOWANIA. Potrafimy nie tylko liczyć jakieś obiekty i nazywać ich liczbę, np. 3 noce, 2 ryby itp., ale nadto dostrzegamy związki między różnymi liczbami, na przykład kładąc 3 ryby obok 2 już leżących, mamy razem 5 ryb, $2 + 3 = 5$. W owych tkwiących w mroku prehistorii czasach rodziła się w ten sposób pierwotna ARYTMETYKA, o której niewiele wiemy, ale która musi budzić podziw dla intelektualnego wysiłku pierwotnego człowieka i wyżyn osiągniętej przez niego abstrakcji.[5]

Jesteśmy zanurzeni także w PRZESTRZENI, która również jest zmienna, ale inaczej niż czas. Czas jest uporządkowany liniowo (było–jest–będzie) i płynie jednostajnie, natomiast nasze otoczenie przestrzenne jest wielowymiarowe, ulega nieustannym zmianom i na pierwszy rzut oka wydaje się chaotyczne. Dobitnym wyrazem intelektualnej przenikliwości prehistorycznego człowieka jest rozdzielenie przezeń czasu i przestrzeni oraz dostrzeżenie, że w chaotycznym na pozór otoczeniu przestrzennym występują stałe FORMY. Wyróżnienie niektórych z tych form w postaci FIGUR GEO-

---

[3] Por. A. Marschack, *Exploring the mind of Ice Age Man*, „National Geographic", January 1975, s. 64-89.

[4] Pomijam do dzisiaj dyskutowaną kwestię, czy były to liczby kardynalne jeden-dwa-trzy… czy liczby porządkowe pierwszy-drugi-trzeci… W matematyce rozróżnienie to pojawiło się w wyraźnej formie dopiero w XIX wieku i wolno mniemać, że ludy pierwotne go nie znały.

[5] A. Seidenberg, *The ritual origin of counting*, „Arch. Hist. Exact Sci." 2 (1965), s. 1-40.

METRYCZNYCH koła, czworokąta itp. dało początek drugiej obok arytmetyki wielkiej dziedziny matematyki — GEOMETRII, której korzenie są równie stare i również sięgają dziesiątków tysięcy lat wstecz.[6]

To wszystko dokonało się w czasach prehistorycznych, wszystkie bowiem cywilizacje historyczne, poczynając od najstarszych (Sumer, Egipt, Chiny, Indie), znają już jakąś arytmetykę i geometrię, a tym samym mają za sobą proces wyłaniania z materii matematycznej początków matematyki. Nie powinna nas mylić prostota i naiwność tej pierwotnej matematyki, jest ona bowiem nie tylko rezultatem długiej i ciężkiej pracy umysłowej, ale jednocześnie solidną podstawą, na której oparły się następne cywilizacje i z której po paru kolejnych tysiącach lat wyrosła nasza matematyka.

Ta krótka refleksja pokazuje, że materia matematyczna zaczęła się tworzyć razem z kulturą duchową człowieka jakieś 30 tysięcy lat temu i że podstawowe pojęcia matematyczne — liczby i figury geometryczne — mają swoje korzenie w podstawowych kategoriach naszego istnienia i dały początek znanej nam matematyce.[7] Uznanie tego faktu prowadzi do konkluzji, że *pierwotnym źródłem materii matematycznej jest refleksja nad światem fizycznym*, a ściślej, skrajnie abstrakcyjna refleksja nad podstawowymi kategoriami jego istnienia, czasem i przestrzenią.

Refleksja na światem fizycznym nie jest jedynym źródłem materii matematycznej, występują w niej bowiem także koncepcje niemające odpowiedników w świecie, np. nieskończoność. Prowadzi to do uznania, że dodatkowym, ale też ważnym źródłem materii matematycznej jest sam człowiek, a ściślej jego autonomiczna *wyobraźnia*. Tłumaczy też to, dlaczego próby filozofów sprowadzenia całej matematyki do jednego ontycznego źródła kończą się niepowodzeniem.

Dotychczasowe rozważania pozwalają zaryzykować odpowiedź na pytanie, czym się pojęcia matematyczne różnią od pojęć innych, niematematycznych? Otóż wydaje się, że właśnie tym, że mają one swoją głęboką genezę w podstawowych kategoriach istnienia świata: czasu i przestrzeni. Są nie tylko najbardziej abstrakcyjnym odbiciem własności świata, ale (i w tym tkwi tajemnica niezwykłej skuteczności matematyki) dzięki specyficznym swoim rysom mają wielką siłę objaśniającą i predykcyjną, pozwalającą na przewidywanie przebiegu i skutków opisywanych procesów.[8]

4. POJĘCIA MATEMATYCZNE

Podobnie jak garncarz nadaje bezkształtnym kawałkom gliny postać naczyń, tak podstawowym zadaniem matematyka jest wydobywanie z pierwotnej materii mate-

---

[6] A. Seidenberg, *The ritual origin of geometry*, „Arch. Hist. Exact Sci." 1 (1960-1962), s. 488-527; C.J. Scriba, P.Schreiber, *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen,* II wyd. Berlin-Heidelberg 2005, Springer.

[7] A. Seidenberg , *The origin of mathematics*, „Arch. Hist. Exact Sci." 18 (1977-1978), s. 301-342;

[8] E.P. Wigner, *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, [w]: R. Murawski, *Współczesna filozofia matematyki*, Warszawa 2002, Wyd. Naukowe PWN, s. 293-309.

matycznej pojęć. „Wydobycie" oznacza wyróżnienie pojęcia i nadanie mu takiego rozumienia, by można było się nim jednoznacznie posługiwać, a więc np. liczyć (na liczbach), rozpoznawać lub rysować (figury geometryczne) itp., a także poddawać analizie, formułować pytania dotyczące samych pojęć i ich związków z innymi pojęciami, rozstrzygać te pytania itd. Tak zaczyna się i powstaje MATEMATYKA, która z tego punktu widzenia polega na ustalaniu pojęć „matematycznych" i ich własności w postaci reguł operacyjnych, ustalaniu związków między tymi pojęciami w postaci TWIERDZEŃ oraz ustalaniu związków między twierdzeniami w postaci TEORII.

POJĘCIA matematyczne są podstawowym tworzywem matematyki, która się od nich zaczyna i przez nie określa swoje zainteresowania.[9] Są fundamentem, na którym wyrastają TWIERDZENIA, mówiące o własnościach pojęć i związkach z innymi pojęciami matematycznymi, oraz większe całości — TEORIE. Nie sposób przecenić pojęć matematycznych, bo bez nich nie byłoby twierdzeń i teorii, nie byłoby matematyki samej. Dalsza część artykułu będzie poświęcona właśnie pojęciom, ich wczesnemu wyłanianiu się w mrokach prehistorii, niektórym bardziej współczesnym sposobom ich tworzenia oraz ich ewolucji w czasie. Zwrócimy uwagę na paralelizm matematyka — świat, w dużym stopniu wyjaśniający fenomen skuteczności matematyki przy opisywaniu świata. Zajmiemy się problemem wolności w matematyce, wskazując, iż nie jest to wolność nieograniczona, najbardziej bowiem wartościowe pojęcia matematyczne spełniają pewne rygory (piękna, prostoty itp.) i powstają w polach napięć między parami biegunów, z których kilka wyróżnimy. Bliżej opiszemy dwa pojęcia stosunkowo niedawne, które jednak zdążyły uzyskać w matematyce ogromne znaczenie, mianowicie pojęcie funkcji i pojęcie granicy. Zakończą artykuł uwagi końcowe.

Dobrze jest, jeśli wydobyte z materii matematycznej pojęcie przyjmuje ścisłą postać definicji, ale przez parę pierwszych tysięcy lat historycznego istnienia matematyki nie znano procesu definiowania (a tym bardziej definicji), a znajomość pojęć przyswajano sobie za pośrednictwem nauczyciela i jego autorytetu oraz przerabiania wielkiej liczby stosownych ćwiczeń. Pierwsze definicje pojawiły się dopiero u Greków, ale nawet mimo tego, że dokonywali ich logicznej analizy, wiele z nich jest z naszego punktu widzenia niepoprawnych. Także dzisiaj nierzadko posługujemy się pojęciami, które precyzyjnej definicji nie mają. Bywają też pojęcia nietrafne i te są wypierane przez lepsze lub po prostu giną, natomiast pojęcia udane ewoluują.

Proces wyłaniania niektórych pojęć trwał bardzo długo, np. pojęcie liczby wyłaniało się przez tysiąclecia. Kiedy z mroków prehistorii wynurzyły się pierwsze cywilizacje historyczne (Sumer, Egipt, Chiny, Indie), wszystkie one miały już za sobą jakąś obróbkę materii matematycznej, w szczególności wszystkie dysponowały abstrakcyjnym pojęciem liczby (naturalnej) i kilkoma innymi pojęciami matematycznymi.[10] Przy-

---

[9] Więcej na ten temat: R. Duda, *Matematyka jest nauką o pojęciach*, [w]: *Matematyka–Filozofia–Sztuka*, Bibliotheca Studiorum Philosophicorum Wratislaviensium, red. R. Konik, Wrocław 2008 Atut, s. 21-55.

[10] Por. K. Menninger, *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, Dover.

kładem pojęć matematycznych, których ewolucja była opisywana, jest także grupa algebraiczna[11] i funkcja.[12]

Rozumienie pojęć matematycznych w tych pierwszych cywilizacjach historycznych miało jeszcze charakter nieostry, intuicyjny, kompetencji zaś w ich rozróżnianiu i posługiwaniu się nimi nabywano przez przerabianie wielu zadań. Ten etap rozwoju matematyki przypomina sytuację dziecka, które kompetencji w zakresie posługiwania się liczbą naturalną nabywa przez wyliczanki w rodzaju „entliczek-pentliczek-…” oraz rachowanie 2+3=5 itp. I jak dzisiaj u dziecka, także wtedy te pierwsze pojęcia matematyczne były jednostkowe, konkretne (np. liczba 3 czy kwadrat o boku 2), nie było natomiast jeszcze pojęć bardziej ogólnych (dowolnej liczby naturalnej, dowolnego kwadratu itp.), a w konsekwencji nie mogło być ogólnych twierdzeń w rodzaju twierdzenia Pitagorasa, które mówi o pewnym związku między bokami DOWOLNEGO trójkąta prostokątnego. Zadziwiające jest jednak, że na długo przed Grekami Babilończycy wiedzieli, że jeśli trójkąt jest prostokątny, to między jego bokami zachodzą związki, o których mówi późniejsze o niemal półtora tysiąca lat twierdzenie Pitagorasa.[13] Przykład ten pokazuje, jak głęboko matematyka przedgrecka potrafiła wnikać w materię matematyczną.

Ten pierwotny okres pracy nad materią matematyczną jest niedoceniany i mało zbadany, niewątpliwie jednak miał on ogromne znaczenie. Dzięki niemu już pierwsze cywilizacje historyczne dysponowały gotowymi elementami, z których można było tworzyć większe cząsteczki: POJĘCIA OGÓLNE, TWIERDZENIA wyrażające relacje między tymi ogólnymi pojęciami, a z twierdzeń budować TEORIE.

5. TWORZENIE POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Istnieją dwa podstawowe sposoby wydobywania z pierwotnej, nieforemnej materii matematycznej wartościowych pojęć matematycznych, a mianowicie idealizacja i abstrahowanie.

IDEALIZACJA (matematyczna) polega na tym, że rozpatrując jakiś obraz, wyróżniamy w nim pewne cechy, które w tym obrazie wydają nam się niedoskonałe, niedokończone, jakby skażone i którym przeto nadajemy myślowo postać idealną. Wynik takiego aktu idealizacji, utrwalony za pomocą odpowiednich środków językowych, staje się nowym pojęciem.

Przykłady.

[11] H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, Berlin 1969 (tłum. amer. 1984).

[12] A.P. Juschkewitsch, *The concept of function up to the middle of the 19th century*, „Arch. Hist. Exact Sci.” 16 (1976-77), s. 37-85; U. Felgner, *Der Begriff der Funktion*, [w]: Felix Hausdorff, *Gesammelte Werke*, Band 2: *Grundzüge der Mengenlehre*, Berlin 2002, Springer, s. 621-633.

[13] A. Aaboe, *Matematyka w starożytności*, Współczesna Biblioteka Naukowa Omega, Warszawa 1968, PIW.

1) Licznych śladów idealizacji dostarcza geometria euklidesowa, a w niej takie pojęcia jak PUNKT („nie ma części”), LINIA („długość bez szerokości”), POWIERZCHNIA („długość i szerokość bez głębokości”) itp. Są to pojęcia idealne, każdy bowiem punkt fizyczny ma pole (objętość), każda narysowana linia jest nierówna, ziarnista itd.

2) Aktualizacja możliwości dodania do każdej liczby naturalnej n liczby 1 i utworzenia w ten sposób liczby $n+1$ jest podstawą arytmetyki. Idąc dalej, potencjalnie nieskończone przedłużanie ciągu liczb naturalnych pozwala, w wyniku aktu idealizacji, na uznanie zbioru WSZYSTKICH liczb naturalnych za pełnoprawny obiekt matematyczny, a w szczególności na sformułowanie i uznanie zasady indukcji zupełnej.

3) Geometria rzutowa powstała przez dołączenie do geometrii euklidesowej pewnych elementów idealnych („punktów w nieskończoności”).

4) Liczby zespolone powstały przez uzupełnienie liczb rzeczywistych o elementy „urojone”, których początkiem była „liczba” $i = \sqrt{-1}$.

5) Idealizacja jest absolutnie kluczowa dla fizyki i towarzyszyła formułowaniu wielu ważnych dla niej pojęć i równań, np. rozpatrując ruch struny, zakładamy, że mamy do czynienia ze struną doskonale elastyczną o stałej gęstości liniowej ρ i stałym napięciu T. Zakładamy dalej, że ruch odbywa się w płaszczyźnie xy, że punkt $y = y(x,t)$ struny ma w każdej chwili t tę samą odciętą x, a jego rzędna y jest mała w stosunku do długości L struny. Przy tych założeniach ruch struny opisuje równanie różniczkowe

$$\alpha^2\, \partial^2 y / \partial x^2 = \partial^2 y / \partial t^2, \text{ gdzie } \alpha^2 = T / \rho.$$

Równanie to rozwiązujemy zwykle przy warunkach początkowych $y(0,t) = y(L,0)$ dla $t \in [0, \infty)$ i warunkach brzegowych $y(x,0) = f(x)$, $\partial y(x,t) / \partial t = g(x)$.

ABSTRAHOWANIE (matematyczne) polega na braniu pod uwagę niektórych tylko cech rozpatrywanego obrazu, myślowym ich odrywaniu i tworzeniu już tylko z nich nowego pojęcia.

Przykłady.

1) Rodzina przedziałów otwartych (bez końców) prostej rzeczywistej ma własność addytywności i skończonej multyplikatywności, cała prosta jest takim przedziałem, a dołączając zbiór pusty i ograniczając się do wspomnianych własności, otrzymujemy definicję przestrzeni topologicznej jako pary złożonej ze zbioru X i rodziny jego podzbiorów (w tym zbioru pustego) mających własności addytywności i skończonej multyplikatywności.

Podobnie powstały pojęcia grupy algebraicznej, grafu i wielu innych.

2) Ważnego schematu otrzymywania nowych pojęć na drodze abstrakcji dostarcza ZASADA ABSTRAKCJI. Jeśli mianowicie w zbiorze X jakichś obiektów mamy relację binarną R, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, to dzieli ona zbiór X na klasy rozłączne i niepuste, składające się z tych i tylko tych obiektów, które są między sobą w relacji R. Klasy te stają się nowymi pojęciami.

Pojęcia powstające na tej drodze są w matematyce częste, np. kierunek na płaszczyźnie, podobieństwo w geometrii itp.

Idealizacja i abstrahowanie rzadko występują w czystej postaci. Na ogół istnieją obok siebie, a nakładając się na siebie, prowadzą do typowych dla matematyki wielopiętrowych konstrukcji. Nie są też one jedynymi sposobami tworzenia pojęć matematycznych.

Jednym z zadań, które matematyka sobie stawia, jest klasyfikacja obiektów jakiejś kategorii, np. *Elementy* Euklidesa, największy traktat matematyczny starożytności, kończy się dowodem twierdzenia, że istnieje 5 i tylko 5 brył foremnych, a za największe osiągnięcie matematyczne XX wieku uważana jest klasyfikacja grup skończonych prostych.

Pod koniec XIX wieku w matematyce pojawiły się rozmaitości[14], złożone obiekty geometryczne będące uogólnieniem klasycznej przestrzeni euklidesowej i mające szczególne znaczenie dla ogólnej teorii względności Einsteina. Problem ich klasyfikacji od początku wydawał się trudny (później się okazało, że jest niemożliwy do zrealizowania), wobec czego pojawiła się idea uproszczenia problemu przez związanie z każdą rozmaitością pewnej struktury algebraicznej i klasyfikacji tych struktur, czyli — jak mówią matematycy — klasyfikacji rozmaitości z dokładnością do tej struktury. Tak zrodziły się *homologie*, a nieco ściślej, grupy $\mathrm{H}_n(M)$ n-wymiarowych homologii danej rozmaitości M, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$, liczące liczbę i charakter n-wymiarowych „dziur". Także i taka klasyfikacja okazała się niemożliwa do zrealizowania, jednakże idea upraszczających homologii okazała się pociągająca i wkrótce przeniknęła wiele dziedzin matematyki.[15]

6. EWOLUCJA POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Praca nad pojęciem matematycznym rzadko kończy się z chwilą jego wyróżnienia. Częściej bywa ono początkiem długiej drogi, w trakcie której dane pojęcie jest poddawane różnym analizom, a w rezultacie zmienia swój kształt i zmienia się jego rozumienie, pośrednio wpływając na obejmującą je matematykę.

Taka obróbka wyróżnionego pojęcia matematycznego odbywa się w polu oddziaływania dwóch biegunów: z jednej strony dążenia do klarownej prostoty, a z drugiej do uzyskania pojęć wartościowych i płodnych. Wyrazem tych dążeń jest sympleksyfikacja i kompleksyfikacja.[16]

---

[14] E. Scholz, *Geschichte der Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Basel 1980, Birkhäuser.

[15] Więcej na ten temat pisze M. Atiyah, *Matematyka w XX wieku*, „Wiadom. Mat." 39 (2003), s. 47-63.

[16] Por. R. Duda, *Sympleksyfikacja i kompleksyfikacja w matematyce*, [w]: *Filozofia i logika. W stronę Jana Woleńskiego*, red. J. Hartman, Kraków 2000, s. 192-200.

SYMPLEKSYFIKACJA polega na uwalnianiu pojęcia z nadmiaru obciążającej go materii matematycznej, co jest procesem podobnym do oczyszczania i w konsekwencji doprowadzania do krystalicznie czystej postaci. Dobrym przykładem takiego postępowania jest pojęcie GRUPY, które po raz pierwszy pojawiło się w XVIII w. w pracach J. L. Lagrange'a, rozważającego pewne przekształcenia, które można było składać i otrzymywać nowe. Sto lat minęło, nim z podobnych przykładów, na zasadzie dokonywania analogii i pozbywania się elementów dodatkowych, wyłoniła się koncepcja grupy algebraicznej jako zbioru z operacją binarną, spełniającą pewne warunki.[17]

KOMPLEKSYFIKACJA jest działaniem idącym w kierunku niejako przeciwnym. Mając wyraźne pojęcia, dodajemy nowe warunki, np. żądając, by operacja binarna w grupie algebraicznej była przemienna, otrzymujemy pojęcie grupy abelowej, albo dodając do pojęcia grupy drugą operację z odpowiednimi warunkami rozdzielczości, otrzymujemy pojęcia pierścienia, ciała itp. Kompleksyfikację mamy i wtedy, gdy mając dwa różne pojęcia, nakładamy je na siebie, tworząc w ten sposób pojęcia nowe, bardziej złożone. Np. nakładając na operację binarną w grupie algebraicznej warunek ciągłości, tj. traktując zbiór tej grupy jako przestrzeń topologiczną, otrzymujemy pojęcie grupy topologicznej.

Zarówno sympleksyfikacja, jak i kompleksyfikacja są czynnikami wpływającymi na ewolucję matematyki, ale zależą też od panujących w niej trendów, np. na proces kształtowania się pojęć grupy algebraicznej czy przestrzeni topologicznej wpływały rosnące wpływy algebry, czy pojawienie się teorii mnogości i przenikanie metod teoriomnogościowych do różnych dziedzin matematyki, a także rozwój logiki matematycznej i tendencja do tworzenia teorii opartych na aksjomatycznej definicji jakiegoś pojęcia (teoria grup, topologia ogólna itp.) itp. Co więcej, praca nad pojęciami matematycznymi wywierała wpływ na obejmujące je teorie, zmieniając sformułowanie i miejsce wielu dawnych twierdzeń.[18]

7. MATEMATYKA A ŚWIAT

Opierając się na podstawowych pojęciach liczby i figury, pierwsze cywilizacje historyczne zaczęły rozwijać ARYTMETYKĘ i GEOMETRIĘ, najstarsze dziedziny matematyki. Ówczesna matematyka nie miała jeszcze własnej nazwy, stosunek zaś do niej był w różnych miejscach globu różny, z silnymi elementami ludycznymi (Chiny), sakralnymi (Indie) czy ezoterycznymi (Egipt). Dostrzegano jednak także jej znaczenie dla precyzyjnego komunikowania się między sobą i do rozumienia świata, a także znaczenie edukacyjne dla kształcenia umysłów mających widzieć dalej i głębiej.

---

[17] H. Wussing, *Die Genesis …*, op. cit.

[18] Pod tym względem pouczająca jest ewolucja chińskiego twierdzenia o resztach, por. Ph.J. Davis, R. Hersh, E.A. Marchisotto, *Świat matematyki*, tłum. R. Duda, II wyd., Warszawa 2001, Wyd. Naukowe PWN, zwłaszcza rozdział: *Dążenie do ogólności i abstrakcji. Chińskie twierdzenie o resztach — studium przypadku*, s. 180-187. Tamże dalsza literatura.

Nazwę tej wiedzy i jej różnym dziedzinom nadali dopiero Grecy (ściślej, pitagorejczycy). Grecy dostrzegli też znaczenie tej swojej matematyki dla opisywania pięknych i idealnych form istnienia, przede wszystkim muzyki, idealnych kształtów geometrycznych i ruchu ciał niebieskich (Słońca, Księżyca i planet). Wiązało się to z mistycznym nastawieniem pitagorejczyków, konsekwencją wszakże takiego stanowiska był awans matematyki do wybitnej roli w kulturze w odróżnieniu od stosunkowo marginalnej, którą ta wiedza odgrywała w kulturach przedgreckich. W życiu codziennym i dla poznania świata podksiężycowego matematyka miała jednak wtedy znaczenie niewielkie.

W każdym razie od czasów greckich matematyka była już wyróżnioną dziedziną wiedzy, a choć jej zakres i uznanie dla niej zmieniały się w czasie, przechodząc zarówno (długotrwałe) okresy zastoju, jak i (znacznie krótsze) okresy szybkich postępów, to od kilku wieków niewątpliwie przeżywamy okres intensywnego rozwoju matematyki i szybkiego wzrostu jej znaczenia. Ten kolejny awans, polegający na objęciu matematyką całego świata przyrody (a nie tylko świata nadksiężycowego, jak u Greków), nastąpił dopiero w czasach nowożytnych i wiązał się z powstaniem nowożytnej nauki.

Konkluzję sekcji 3., że pierwotnym źródłem materii matematycznej jest refleksja nad światem, uzupełnijmy uwagą, że refleksja ta odnosi się nie tylko do pozyskiwania tej materii i sposobu wyłaniania z niej pojęć matematycznych, ale także do uzyskiwania matematycznych twierdzeń i do ich dowodzenia. Wszystkie procesy dowodzenia opierają się na kilku podstawowych „prawach myśli", z których bodaj najważniejsza jest *zasada dedukcji* (inaczej *modus ponendo ponens*: jeśli p i p pociąga q, to q). Zasada ta jest zgodna z obserwowaną w świecie *zasadą przyczynowości* (inaczej *principium causalitatis*: jeśli zachodzi przyczyna p, a p pociąga skutek q, to zachodzi q). Dostrzegając podobne relacje także między innymi „prawami myśli" kierującymi matematyką a światem fizycznym, dochodzimy do konkluzji, że *matematyka jest abstrakcyjnym wyrazem sposobu istnienia i funkcjonowania świata fizycznego*. Można dodać, że wyrazem *najbardziej abstrakcyjnym*, różne przejawy istnienia i funkcjonowania świata znajdują bowiem swoje odbicie także w języku codziennym i w innych specyficznych językach, w tym poszczególnych dyscyplin naukowych, wielka natomiast wartość matematyki polega na jej swoistości: zakorzenieniu w najbardziej fundamentalnych kategoriach istnienia, skrajnie abstrakcyjnych pojęciach oraz sile dedukcji i zgodności ze sposobem funkcjonowania świata, w tym z fundamentalną zasadą przyczynowości.

Problem fundamentalnej zgodności matematyki ze światem fizycznym nurtował już filozofów greckich, z których największy wpływ wywarł i wywiera Platon. Znaczenie ma w szczególności jego teoria idei, zgodnie z którą przedmiotem naszego poznania nie jest zmienna i chaotyczna rzeczywistość fizyczna, lecz istniejący poza czasem i poza przestrzenią niezmienny świat IDEI. Z tego punktu widzenia materia matematyczna może być rozumiana jako ogniwo pośrednie między człowiekiem a platońskimi ideami: patrząc na świat (ścianę platońskiej jaskini[19]), człowiek tworzy w swoim umyśle materię matematyczną, z której, z wielkim na ogół trudem, usiłuje wydobyć platońskie idee, nadając im kształt pojęć matematycznych. Pojęcia te najczęściej są tylko przybliżeniami tych idei i dopiero usilna praca nad nimi skutkująca ich ewolucją pozwala bardziej się zbliżyć do idealnej rzeczywistości Platona. Pojęcia nietrafne nie mają idealnych odpowiedników i po prostu giną.

Inaczej do problemu zgodności podszedł Arystoteles, który stworzył koncepcję MATERII i FORMY. Z tego punktu widzenia materia matematyczna odpowiada skrajnie abstrakcyjnemu oglądowi formy. Owa skrajność tłumaczy się oglądem wyłącznie formy w odróżnieniu od nauk przyrodniczych, jak fizyka czy astronomia, które uwzględniają również składnik materialny.

8. ABSTRAKCYJNOŚĆ A WOLNOŚĆ

Historia matematyki dostarcza wielu przykładów na to, że praktykujący matematyk kieruje się bardziej wolnością dokonywania abstrakcji niż troską o zachowywanie związku ze światem. Ta intelektualna wolność jest charakterystyczna dla matematyki, a przez niektórych jest nawet uważana za najważniejszą jej cechę, np. Jacobi (1804-1851) pisał, że matematykę się uprawia „pour la gloire de l'esprit humain",[20] a Hardy (1877-1947) wyrażał dumę z tego, że nic, co zrobił w matematyce, nie znajdzie poza nią zastosowania.[21] Wolność ta jest w istocie niezbędna, nierzadko bowiem bywa i tak, że myśl matematyczna wyprzedza rozwój naszej wiedzy o świecie, w której znajduje ona zastosowanie długo po tym, jak doszło do jej sprecyzowania. Przykładem liczby ujemne i zero albo liczby zespolone. Te ostatnie zaczęły się ujawniać w badaniach algebraików włoskich w XVI w., ale budziły opory nawet wśród matematyków, pełne uznanie zyskując dopiero w XIX wieku, w dużym stopniu dzięki potrzebom elektrodynamiki. Przykładem bardziej współczesnym jest teoria rozmaitości różniczkowych Riemanna, bez której trudno sobie wyobrazić późniejszą od niej ogólną teorię względności Einsteina albo przestrzenie Hilberta stanowiące dziś podstawę mechaniki kwantowej.

Wolność w tworzeniu pojęć matematycznych prowadzi jednak do ich inflacji. Jest w tym podobieństwo z przyrodą, która w ogromnych ilościach produkuje zarodki przyszłego życia. Większość z nich ginie, niektóre jednak rozwijają się i dojrzewają. Podobnie większość pojęć (a także twierdzeń) popada w zapomnienie, ale niektóre trwają, a nawet dają początek nowym. Problem rozpoznawania wartościowych pojęć i twierdzeń jest znany w literaturze pod nazwą DYLEMATU ULAMA: „jeśli liczba twierdzeń jest tak duża, że nie sposób wszystkich przejrzeć [Ulam szacował tę liczbę

[19] Platon, *Państwo*, księga VII.

[20] Cyt. za M. Kac, *Mathematics: Tensions*, [w]: M. Kac, G.-C. Rota, J.T. Schwartz, *Discrete Thoughts. Essays on Mathematics, Science, and Philosophy*, Boston 1985, s. 7-18.

[21] G.H. Hardy, *Apologia matematyka*, tłum. M. Fedyszak, Warszawa 1997, Prószyński i S-ka.

na 100 tysięcy rocznie, w istocie już wtedy było to niemal dwa razy tyle, a dziś parokrotnie więcej], to kto powinien orzekać, które z nich są ‘ważne’”.[22]

9. GŁĘBOKIE IDEE I BIEGUNY NAPIĘĆ

W dużym stopniu wolność tworzenia w matematyce jest utrzymywana w ryzach przez kilka idei, które trudno wprawdzie ściśle wyrazić, ale które silnie wpływają na postawy matematyków, takie jak idea PIĘKNA czy idea PROSTOTY. Niewątpliwie zachodzi istotna korelacja między pięknem matematycznej teorii a jej wartością poznawczą, między jej prostotą a użytecznością. I jeśli uznajemy, że matematyka stanowi odbicie świata, to z tego wynika, że zachodzi korelacja między naszym odczuwaniem piękna czy prostoty a własnościami tego świata.

Inny rodzaj dyscypliny w matematyce narzucają PARY BIEGUNÓW, między którymi twórczość matematyczna się zawiera, takie jak stałość — zmienność, dyskretność — ciągłość, skończoność — nieskończoność.[23] Najbardziej wartościowe pojęcia matematyczne powstają między tymi biegunami, wyrażając niektóre własności każdego z nich.

10. PRZYKŁAD: FUNKCJA

Od samych swoich początków matematyka znajdowała w otaczającym nas świecie zarodki ładu, dzięki którym świat stawał się zrozumiały: *mundus intelligibilis*. Wśród tych zarodków były liczby i figury. Nie zależały one od czasu i przestrzeni, w każdej chwili bowiem i na każdym miejscu liczba 3 czy kwadrat o boku 2 były takie same, pozaczasowe.

Dwa tysiące lat po Grekach postęp w matematyce pozwolił na zrobienie kolejnego ważnego kroku: podjęcia próby uchwycenia elementów stałych w sytuacji zmiennej w czasie. Wyrazem takiej próby jest pojęcie *funkcji*, wyrażającej STAŁY związek między ZMIENNYMI x i y:

$$y = f(x)$$

Pojęcie funkcji tkwiło w matematyce w niejawnej formie od starożytności, ale wyraźnie pojawiło się dopiero w XVII wieku, a później zrobiło niezwykłą karierę, przenikając dziś całą matematykę.[24]

Fascynującym zadaniem byłoby prześledzenie rozszerzania się zakresu funkcji w związku z rosnącymi granicami poznania, w toku swoistej gry matematyki ze świa-

---

[22] Por. P. J. Davis, R. Hersch, E. A. Marchisotto, *Świat matematyki*, op. cit., s. 31-33.

[23] Por. R. Duda, *Mathematics: Essential Tensions*, „Foundations of Science” 2 (1997), s. 11-19; R. Duda, *Polarities within mathematics*, Proc. XX Intern. Congress of History of Science (Liège, 1997), tom XX: *Science, Philosophy and Music*, red. E. Neuenschwander, L. Bougiaux, Turnhout 2002, s. 139-147.

[24] Por. odsyłacz 12.

tem: funkcje liniowe — ruch jednostajny, funkcje kwadratowe — ruch jednostajnie przyspieszony, wielomiany — ruchy bardziej złożone, funkcje trygonometryczne — zjawiska cykliczne, funkcje wykładnicze i logarytmiczne — zjawisko wzrostu i dekadencji itd., aż do funkcji uogólnionych (operatory Mikusińskiego, dystrybucje Schwarza), niezbędnych we współczesnej fizyce czy funkcji losowych niezbędnych już wszędzie, od fizyki i nauk przyrodniczych po ekonomię.

11. PRZYKŁAD: GRANICA

Jeśli pojęcie funkcji powstało w polu napięcia między stałością a zmiennością, to kolejne, równie fundamentalne dla współczesnej matematyki pojęcie powstało w polu napięcia między skończonością a nieskończonością i stanowi rodzaj pomostu między jednym a drugim.

Pierwszymi, którzy dostrzegli w matematyce nieskończoność, byli starożytni Grecy. Rychło natknęli się jednak na jej paradoksy, których przykładem jest sformułowany przez Zenona z Elei paradoks Achillesa niemogącego dogonić żółwia. Zabezpieczeniem przed takimi paradoksami stało się dla nich pojęcie nieskończoności potencjalnej i nakaz ograniczenia się do rozważania tylko takiej nieskończoności, a odrzucenie nieskończoności aktualnej.

Nieskończoność aktualna z matematyki usunąć się jednak nie dała, w naturalny bowiem sposób pojawiły się postępy (arytmetyczny i geometryczny), ogólniejsze od nich nieskończone ciągi liczbowe, nieskończone sumy (szeregi) itd. Okoliczności, w których się pojawiały i pytania, na jakie miały odpowiadać, spowodowały, że w XVIII wieku pojawił się pomost między nieskończonością a skończonością w postaci pojęcia GRANICY, które pewnym obiektom nieskończonym (ciągom, szeregom) przypisuje wartości skończone, co zwykle zapisuje się tak:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Pierwotnie były to tylko nieskończone ciągi liczbowe, potem nieskończone szeregi liczbowe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

a z czasem obiekty bardziej złożone jak pochodne i całki, ciągi funkcji czy szeregi funkcyjne. Pojęcie granicy łatwo sprowadza paradoks Achillesa i żółwia do obliczenia granicy ciągu przemieszczeń, wyznaczając w ten sposób punkt ich spotkania, ale nadto okazało się niezwykle przydatne w fizyce, np. przy określaniu takich pojęć jak prędkość chwilowa (granica prędkości przeciętnej w odcinku czasu), a w konsekwencji dla całej mechaniki i dla innych działów fizyki.

Przez parę wieków pojęcie granicy pozostawało niejasne, a jej rozumienie czasem nawet zatrącało o mistykę. Dopiero w procesie RYGORYZACJI ANALIZY nadano mu kształt definicji arytmetycznej[25]

$$a = \lim a_n \equiv \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n > n_0 \, (n > n_0 \Rightarrow | a_n - a | < \varepsilon)$$

Dzisiaj posługujemy się tą definicją precyzyjnie, pomijając pierwotne lęki (które jednak czasem się odzywają). Opanowanie pojęcia granicy pozwoliło na precyzyjne i coraz ogólniejsze formułowanie i badanie takich pojęć jak pochodne czy całki.

12. ANALIZA MATEMATYCZNA I JEJ DZIAŁY

Na tych dwóch pojęciach, funkcji i granicy, oparła się nowa dyscyplina matematyczna, zwana ANALIZĄ MATEMATYCZNĄ. Oba te pojęcia oczywiście ewoluowały, nabierając ogólności i precyzji, a KLASYCZNA ANALIZA MATEMATYCZNA, skoncentrowana na badaniu granicznych własności funkcji, np. takich jej aspektów jak ciągłość, różniczkowalność, całkowalność itp., święciła triumfy. W szczególności jej rozwój doprowadził do powstania kolejnych wielkich dziedzin matematyki (w istocie subdziedzin analizy matematycznej) takich jak RACHUNEK WARIACYJNY, RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE (zwyczajne i cząstkowe), RÓWNANIA CAŁKOWE, RÓWNANIA FUNKCYJNE, ANALIZA FUNKCJONALNA itp., a także na powstanie dziedzin bardziej autonomicznych jak GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA czy TOPOLOGIA. Podstawowe pojęcie funkcji w jego licznych odmianach (ruch w mechanice, przekształcenie w geometrii, działanie w algebrze, funkcjonał czy operator w analizie funkcjonalnej) przenika dziś całą matematykę, a od czasów tzw. programu merańskiego na nim oparła się także nowożytna dydaktyka matematyki.[26]

Jeśli klasyczna analiza matematyczna koncentruje się na badaniu niektórych własności funkcji, to wyrosłe z niej dziedziny zajmują się badaniami wyrażeń, w których niewiadomą jest sama funkcja, i własnościami niektórych operatorów przeprowadzających funkcje w funkcje. Takim wyrażeniem jest RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE, wyrażające związki między szukaną funkcją a jej pochodnymi, gdzie niewiadomą jest ta funkcja, przy czym znane są tylko pewne warunki, które musi ona spełniać. Znaczenie równań różniczkowych polega na tym, że podstawowe prawa przyrody wyrażają się w ich języku.

Przykłady.

---

[25] Por. V.J. Katz, *A History of Mathematics. An Introduction*, II wyd., Addison-Wesley 1998; rozdział 16.1: *Rigor in Analysis*, s. 706-729.

[26] Tzw. program merański, wypracowany przez komisję Niemieckiego Towarzystwa Przyrodników i Lekarzy (Merano, 1905), postulował skoncentrowanie programu nauczania matematyki wokół pojęcia funkcji, rozciągając je na działania w arytmetyce i przekształcenia w geometrii. Program merański poparła Międzynarodowa Komisja Nauczania Matematyki (oboma komisjami kierował F. Klein) i dziś jest on powszechnie akceptowany.

1) II zasada dynamiki Newtona głosi, że siła F działająca na dane ciało jest proporcjonalna do jego masy m i przyspieszenia a, $F = ma$. Ograniczając się do prostego przypadku, gdy ruch odbywa się po prostej Ox, a więc gdy można go opisać formułą $x = f(t)$ (siła F działa na cząstkę o masie m poruszającą się po tej prostej), to II zasada przyjmuje postać

$$F = m\, d^2x \,/\, dt^2,$$

gdyż przyspieszenie jest drugą pochodną funkcji położenia względem czasu. Równanie to można bez większego trudu przenieść z ruchu liniowego na przypadek dowolnego ruchu.

Siła matematyki widoczna jest już w tym, że II zasada obejmuje pozornie nieobejmowalną różnorodność wszystkich możliwych ruchów mechanicznych w świecie. W szczególnych przypadkach rozwiązanie równania ruchu może być jednak bardzo trudne.

2) Równanie struny (p. wyżej, sekcja 5).

3) Równanie ciepła. Jeśli mamy jakieś ciało, a $v = v(x,y,z,t)$ oznacza temperaturę jego punktu (x,y,z) w chwili t, to funkcja v musi spełniać równanie

$$dv \,/\, dt = C(\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 + \partial^2 v/\partial z^2),$$

gdzie C jest pewną stałą zależną od własności fizycznych naszego ciała (gęstość, przewodność cieplna itp.).

13. UWAGI KOŃCOWE

1. Podstawowym tworzywem matematyki jest MATERIA MATEMATYCZNA, powstająca głównie w refleksji nad światem i wyrastająca z najbardziej podstawowych kategorii naszego istnienia, czasu i przestrzeni.

2. Materia matematyczna jest glebą MATEMATYKI, która na jej bazie tworzy POJĘCIA MATEMATYCZNE. Od innych rodzajów pojęć odróżniają się one głębokim zakorzenieniem w podstawowych kategoriach czasu i przestrzeni.

Najstarszymi i do dzisiaj najważniejszymi pojęciami matematycznymi są pojęcia liczby i figury, które dały początek arytmetyce i geometrii.

3. Struktura matematyki jest odbiciem sposobu istnienia świata. Matematyka — poprzez swoje pojęcia i regułę dedukcji, twierdzenia i teorie — jest wyrazem najbardziej fundamentalnych własności świata.

4. Charakterystycznym rysem matematyki jest WOLNOŚĆ tworzenia, ale ta wolność nie jest absolutna, w pewnych ryzach utrzymują ją bowiem IDEE, np. piękna i prostoty, a także różne PARY BIEGUNÓW, np. stałość — zmienność, między którymi matematycy się znajdują. Połączenie wolności i tych ograniczeń sprawia, że matematyka nie rozpłynęła się w bełkotliwym abstrakcie, lecz pozostaje piękna, prosta i silna.