Filozofia Nauki
Rok XXI, 2013, Nr 1(81)

Michał Sochański

Wizualizacje w poznaniu matematycznym a kategoria intuicji przestrzennej

Celem artykułu jest analiza roli diagramów, czy szerzej — wizualizacji w poznaniu matematycznym w świetle kategorii intuicji.[1] W filozofii matematyki XX wieku dominował pogląd, iż diagramy są w poznaniu matematycznym zbędne, a często nawet szkodliwe. Zgodnie z takim stanowiskiem wizualizacje mogą pełnić co najwyżej rolę heurystyczną bądź też pedagogiczną, nie powinny być jednak nigdy używane w kontekście uzasadniania — każde rozumowanie oraz każdy dowód może i powinien być sprowadzony do przekształceń symboli.[2] W ostatnich latach następuje ponowny wzrost zainteresowania rolą wizualizacji w poznaniu matematycznym. W ramach tego szerokiego nurtu zwraca się uwagę na bardzo wiele zastosowań i funkcji poznawczych diagramów; oprócz pełnienia niezbywalnej roli w nauczaniu diagramy pomagają mianowicie kształtować nasze pojęcia matematyczne, mogą stanowić źródło inspiracji czy odkrycia, odgrywają też często istotną rolę w rozumowaniach. Przestrzenne reprezentacje obiektów matematycznych są również szeroko stosowane w wielu gałęziach matematyki, które były intensywnie rozwijane w ubiegłym wieku (teoria grafów, teoria kategorii czy teoria krat); dodatkowo, w ostatnich latach możliwości wizualizowania obiektów matematycznych znacznie wzrosły dzięki komputerom.

---

[1] Znaczenie terminów „diagram", „wizualizacja" i innych objaśniam szerzej w dalszej części tekstu.

[2] Można wskazać kilka źródeł takiego stanowiska: po pierwsze, był to rozwój często sprzecznych ze zwykłymi intuicjami wizualnymi geometrii nieeuklidesowych; po drugie, zwodniczość intuicji przestrzennej w analizie matematycznej; po trzecie, znane już od starożytności zasadnicze wady diagramów, jak ich jednostkowość (fakt, iż każdy diagram reprezentuje tylko konkretny obiekt) i nadmiarowość (każdy diagram zawiera więcej informacji niż jest to potrzebne — np. długość boku trójkąta); po czwarte wreszcie, rozwój logiki matematycznej, w którego konsekwencji każdy dowód matematyczny mógł być sprowadzony do przekształceń symboli.

Wydaje się, że wzmożone badania nad naturą poznania zapośredniczonego przez diagramy zmuszają do ponownej refleksji nad rolą, którą odgrywa w nim intuicja przestrzenna. W jakim sensie można powiedzieć, iż w trakcie analizy diagramów aktywna jest (jakkolwiek rozumiana) intuicja? Czy zastosowanie kategorii intuicji jest w analizie wizualizacji w ogóle zasadne czy też użyteczne? W celu odpowiedzi na te pytania omówimy najpierw ważniejsze zagadnienia związane z kategorią intuicji w ogóle, następnie rozważymy wybrane aspekty współczesnych badań nad wizualizacjami, aby dalej ocenić, jakie miejsce w tych badaniach można przypisać intuicji. Szczególna uwaga zwrócona będzie przy tym na dychotomie, które zazwyczaj są z nią wiązane: przeciwstawienie intuicji i rozumowania (w szczególności dedukcji) jako źródeł poznania czy tego co intuicyjne i tego co pojęciowe w naszym poznaniu. Dychotomie te, odnoszące się do funkcji lub władz poznawczych, chcielibyśmy rozważyć w świetle badań nad własnościami diagramów i symboli jako przeciwstawionych sobie typów *reprezentacji* w matematyce.

Intuicja była i jest rozumiana w teorii poznania na wiele odmiennych sposobów. Poszczególne koncepcje intuicji można systematyzować bardzo różnie, wydaje się jednak, że daje się wyszczególnić dwa ogólne jej ujęcia (zarówno w matematyce, jak i w odniesieniu do innych sfer poznania). Po pierwsze, o intuicyjnym poznaniu bądź o intuicjach mówi się jako o tym, co nieścisłe czy niejasne bądź też niekompletne w naszym poznaniu (wymagające doprecyzowania matematycznego, ściślejszego ujęcia). Autorzy książki *Świat matematyki* piszą w tym duchu również, iż „przy braku dowodu, intuicyjne oznacza prawdopodobne lub przekonujące” czy inaczej stanowiące „rozsądne przypuszczenie” (Davis i in., 2001, s. 374). Po drugie, intuicja rozumiana jest jako źródło bezpośredniego, natychmiastowego oraz całościowego poznania badanego przedmiotu bądź jako wytwór poznania o podobnych charakterystykach. Bezpośredniość czy natychmiastowość intuicji jako pewnej relacji poznawczej z przedmiotem poznania bywa przy tym rozmaicie rozumiana. Może ona oznaczać niezależność poznania intuicyjnego od rozumowania lub uzasadnienia czy fakt, iż odbywa się ono bez konieczności stosowania symboli i pojęć (Parsons 2008, s. 138-144). Intuicja bywa w tym duchu przeciwstawiana dedukcji, a poznanie intuicyjne poznaniu uzyskanemu za pośrednictwem pojęć. Z uwagi na przypisywaną poznaniu intuicyjnemu całościowość to, co „intuicyjne” można rozumieć jako „holistyczne lub scalające w przeciwstawieniu do szczegółowego lub analitycznego” (Davis i in. 2008, s. 375). Dodajmy wreszcie, iż można mówić o intuicji jako władzy poznawczej bądź po prostu o intuicyjnym poznaniu.

Spośród wielu rozróżnień, które można wprowadzić, starając się usystematyzować ujęcia intuicji, można zwrócić uwagę na jeszcze jedno, mianowicie na rozróżnienie między „intuicją, że” oraz intuicją obiektową[3]. Pierwsza z nich ma zdaniowy czy propozycjonalny charakter: mieć „intuicję, że” to żywić pewne przekonanie.

[3] Por. Parsons 2008, s. 139. Terminy te są tłumaczeniami używanych w literaturze anglojęzycznej *intuition that* oraz *intuition of*.

Trudniej scharakteryzować intuicję obiektową; można ją rozumieć jako jakiś rodzaj uchwycenia przedmiotu poznania czy innej relacji poznawczej z nim, która nie musi mieć ze swojej natury charakteru propozycjonalnego.

Autorzy *Świata matematyki* wymieniają wreszcie intuicję wizualną czy intuicję przestrzenną (terminy te traktuję jako równoznaczne) jako odrębny typ intuicji lub kontekst, w którym kategoria intuicji jest stosowana. Posiada ona swoją specyfikę, choć również do niej odnosić można wspomniane wyżej dwa ogólne rozumienia intuicji, jak również dychotomie intuicja–dedukcja i poznanie intuicyjne-poznanie pojęciowe.

Czym jednak jest intuicja przestrzenna? Paradygmatyczna i najbardziej wpływowa jej koncepcja pochodzi oczywiście od Immanuela Kanta.[4] Wymieńmy więc główne charakterystyki kantowskiej intuicji czy też w terminologii niemieckiego filozofa — naoczności. Kant postuluje dychotomiczność naoczności i pojęć w naszym poznaniu, wypływającą z bardziej fundamentalnej dychotomii intelekt–zmysłowość.[5] Wyróżnia on, jak wiadomo, naoczność empiryczną, za której pośrednictwem uzyskujemy konkretne dane naoczne, oraz naoczność czystą, czyli niezmienną formę wszystkich zmysłowych treści naocznych w ogóle. Czysta naoczność przestrzeni, rozumiana też jako przestrzeń, a przez późniejszą tradycję filozoficzną jako intuicja przestrzenna, stanowi w pewnym sensie przedmiot geometrii, stanowiąc jednocześnie (jako wrodzona i niezmienna) źródło aprioryczności i konieczności jej sądów. Według Kanta odwołania do czystej naoczności czy przedstawienie pojęcia w odpowiadającej mu czystej naoczności są koniecznymi elementami dowodów geometrycznych, do których przeprowadzenia nie starcza analiza znaczenia pojęć lub też ich definicji.[6] Kantowską intuicję-naoczność można interpretować jako władzę poznawczą, dzięki której podmiotowi poznającemu bezpośrednio dana jest treść zmysłowa (dana przez naoczność empiryczną) oraz aprioryczna, przestrzenna (naoczność czysta). Dodajmy również, iż każde poznanie ma, według Kanta, zarówno wymiar

[4] Jak wiadomo, Kant używa terminu *Anschauung*, przetłumaczonego przez Ingardena jako „naoczność". Idąc m.in. za tłumaczeniami angielskimi, które tłumaczą go jako *intuition*, traktuję kantowską naoczność jako typ intuicji.

[5] Zmysłowość (*Sinnlichkeit*) to zdolność uzyskiwania wyobrażeń czy odbiorczości wrażeń zmysłowych, intelekt (*Verstand*) jest natomiast „zdolnością wytwarzania samemu przedstawień lub też samorzutnością poznania", intelekt to „zdolność pomyślenia przedmiotu naoczności zmysłowej" (Kant, I., *Krytyka czystego rozumu*, A51/B75); „przez pierwszą z nich przedmioty są nam dane, przez drugi zaś są pomyślane" (tamże, A15/B29).

[6] Pytanie, jaką dokładnie rolę czysta naoczność odgrywa w rozumowaniach i dowodach geometrycznych, jest, jak wiadomo, jednym z trudniejszych punktów w interpretacji kantowskiej filozofii geometrii. Nie ma tu miejsca na analizę tego problemu. Dość stwierdzić, iż zasadniczym elementem stanowiska Kanta jest to, że poznanie matematyczne zachodzi dzięki konstrukcji pojęć matematycznych, czyli przedstawieniu ich sobie w czystej naoczności: „matematyka zawiera dowody unaoczniające, ponieważ swe poznanie wyprowadza nie z pojęć, lecz z ich konstrukcji, tzn. naoczności, która może być *a priori* dana jako odpowiadająca pojęciom" (tamże, A734/B762). Aby udowodnić jakąś własność np. trójkąta, konieczne jest więc przedstawienie go w czystej naoczności, co wiąże się w szczególności z konstrukcją odpowiedniego diagramu.

pojęciowy, jak i naoczny.[7] Nie może być więc u Kanta mowy o intuicji jako o poznaniu bezpośrednim, rozumianym jako pozapojęciowe lub też jako osiągniętym bez udziału dedukcji dostępie do prawd geometrycznych.

Kantowska filozofia geometrii ukształtowała XIX-wieczną dyskusję na temat intuicji przestrzennej (rozumianej jako *Anschauung*). Sformułowano wiele stanowisk odnośnie do jej charakteru i roli, którą odgrywa w poznaniu geometrycznym.[8] Nie ma tu miejsca na ich analizę. Dość stwierdzić, iż w wyniku XIX-wiecznego rozwoju geometrii nieeuklidesowych oraz aksjomatyzacji geometrii przeprowadzonej przez Davida Hilberta w *Grundlagen der Geometrie* bardzo trudne do utrzymania stało się stanowisko, zgodnie z którym intuicja przestrzenna jest koniecznym elementem dowodów geometrycznych; trudna do obrony wydaje się również koncepcja intuicji jako czegoś, co gwarantuje sądom geometrii jej aprioryczność i konieczność. Otwarta pozostaje natomiast możliwość zawężonego rozumienia intuicji, do czego wrócę w dalszej części tekstu.

Przejdźmy do współczesnych rozważań na temat wizualizacji w poznaniu matematycznym. Zacznijmy od uwag terminologicznych. Przez diagram rozumiem, najogólniej rzecz ujmując, wszelki układ kresek, kropek i innych kształtów wykonany w celu reprezentacji obiektów matematycznych (nie tylko geometrycznych). Diagramem jest więc rysunek geometryczny, wykres funkcji czy grafika komputerowa. Można dalej przyjąć, iż symbole to zapisane liczby, litery oraz inne znaki, którym w ramach danego systemu sformalizowanego nadane jest ścisłe znaczenie, jak np. nawiasy itp. Należy tu zaznaczyć, iż sformułowanie jednoznacznego kryterium, za pomocą którego poszczególne reprezentacje traktować można jako diagramy lub symbole nie jest prostym zadaniem.[9] Możemy jednak, ogólnie rzecz biorąc przyjąć,

[7] Jak podkreśla królewiecki filozof, naoczności oraz pojęcia „stanowią składniki wszelkiego poznania, tak że ani pojęcia bez odpowiadającej im w pewien sposób naoczności, ani naoczność bez pojęć nie może dostarczyć poznania" (tamże, A50/B74).

[8] Według wielu filozofów i matematyków, takich jak np. Felix Klein czy Henri Poincaré, intuicja przestrzenna jest koniecznym elementem poznania geometrycznego na pewnym etapie rozwoju geometrii. Nawet David Hilbert nie odrzucał idei, iż intuicja przestrzenna stanowi źródło poznania geometrycznego. Zauważa to m.in. Ulrich Majer, podkreślając, iż „zadanie ‘ustanowienia (*establishing*) aksjomatów geometrii’ musi, zgodnie z poglądem Hilberta, odwoływać się (*have recourse to*) do naszej ‘intuicji przestrzennej’ oraz poddawać tę intuicję analizie logicznej przy pomocy metody aksjomatycznej, w celu odnalezienia logicznych zależności pomiędzy aksjomatami" (Majer 2006, s. 61). Niewielką rolę przypisywał za to intuicji przestrzennej Bernhard Riemann, termin „intuicja" odgrywał też znikomą rolę w filozofii Charlesa Sandersa Peirce'a, który szeroko omawia rolę diagramów w poznaniu matematycznym.

[9] Giaquinto proponuje na przykład rozważyć sześć własności, które mogą przysługiwać każdej reprezentacji, dzieląc je na trzy „typowo diagramowe" oraz trzy „typowo symboliczne". Można stąd, według Giaquinto, wyróżnić 64 typy reprezentacji, spośród których każdy może posiadać powyższe własności lub nie. W takim ujęciu tylko jeden typ reprezentacji można określić jako „typowo symboliczny" i jeden jako „typowo diagramowy", pozostałe mają natomiast status pośredni (por. Giaquinto 2007, s. 249).

iż diagram to reprezentacja, która składa się z czegoś więcej niż symbole, reprezentując obiekty matematyczne na mocy pewnych przestrzennych własności swoich części (dodajmy, że używa się tu również czasem terminów „reprezentacja przestrzenna" oraz „przedstawienie wizualne").

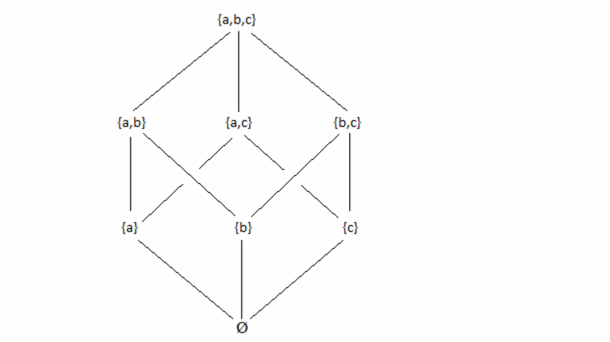
Szeroko rozpowszechnione we współczesnych pracach jest również pojęcie wizualizacji. Określa się ją przy tym szeroko zarówno jako diagram, jak i tzw. wizualizację wewnętrzną, czyli wyobrażenie odbywające się w wewnętrznej przestrzeni mentalnej; można wreszcie mówić o dynamicznych wizualizacjach, takich jak animacje komputerowe lub wyobrażone przekształcenia diagramów. W dalszej części pracy będę rozważał przede wszystkim diagramy, chociaż poruszane w związku z nimi zagadnienia odnoszą się też w dużym stopniu do pozostałych dwóch typów wizualizacji.

Dalej będę używał również terminu „poznanie diagramowe", które rozumiem jako wszelką aktywność poznawczą zapośredniczoną przez diagram, tzn. przeprowadzaną w konsekwencji wizualnego kontaktu z diagramem. Może to być nabywanie przekonań odnośnie do twierdzenia matematycznego, rozumowanie, dowodzenie bądź zrozumienie idei dowodu, kształtowania się pojęć matematycznych lub wreszcie — jak to się potocznie mówi wśród matematyków — wyrobienie sobie intuicji co do jakiegoś pojęcia matematycznego.

Czym się zatem różnią diagramy od symboli? Jakie funkcje poznawcze spełnia diagram, jak oddziałuje na matematyka, jakie ma wreszcie słabości oraz zalety? We współczesnej literaturze odnaleźć można wiele takich zestawień własności diagramów, czy poznania zachodzącego w efekcie kontaktu z diagramem.[10] Chciałbym tu zwrócić uwagę na kilka z nich. Zacznijmy od dwóch zasadniczych słabości diagramów, tzn. ich jednostkowości i nadmiarowości. Diagram jest jednostkowy w tym sensie, że reprezentuje zawsze konkretny obiekt, np. konkretny, równoramienny bądź równoboczny trójkąt; nadmiarowość diagramów zasadza się z kolei na tym, iż w każdym diagramie zawartych jest więcej informacji, niż jest zamierzone lub niż jest to potrzebne w celu reprezentacji danego obiektu. Wymieńmy dalej trzy zasadnicze zalety diagramów jako typu reprezentacji. Po pierwsze, na diagramie możliwe jest jednoczesne przedstawienie dużej ilości informacji. Jak podkreślają Jon Barwise i John Etchemendy (1996, s. 18), „diagram może reprezentować w zwartej formie to, co wymagałaby niezliczonej ilości zdań". Za przykład mogą tu służyć diagramy tak złożonych obiektów matematycznych, jak np. słynny zbiór Mandelbrota. Wizualna reprezentacja może w ten sposób powodować wrażenie wglądu w strukturę całości badanego obiektu. Po drugie, niektóre diagramy charakteryzują się podobieństwem swego zewnętrznego kształtu czy swoich czysto wizualnych własności do struktury obiektów, które reprezentują. Można tu wspomnieć choćby o diagramach Venna lub grafach. Po trzecie wreszcie, cechą reprezentacji diagramowej jest jej zdolność do

[10] Można tu wymienić m.in. następujące prace: Potter 2006, Shimojima 2004 czy Barwise i Etchemendy 1996.

odkrywania przed obserwatorem — w konsekwencji samego dokonania aktu konstrukcji — nowych faktów, tzn. takich, które nie były znane przed konstrukcją diagramu.[11] Sytuacje takie mogą mieć miejsce w przypadku wykonania rysunku grafu, wykonania grafiki komputerowej lub sporządzenia np. diagramu Eulera czy Venna.[12]



Rys. 1. Krata podzbiorów zbioru {a, b, c} z częściowo uporządkowaną relacją zawierania się zbiorów. Diagramy krat posiadają trzy zasadnicze zalety diagramów: ich struktura jest analogiczna do struktury krat algebraicznych (zgodnie z odpowiednią interpretacją fizycznych charakterystyk diagramu), zawarta jest na nich „jednocześnie" duża ilość informacji oraz umożliwiają wyciąganie pewnych wniosków dzięki samej konstrukcji

Zadajmy więc pytanie: czy i w jakim sensie poznanie diagramowe można nazwać intuicyjnym? Pamiętając o tym, iż intuicja jest rozumiana bardzo różnie, można też zapytać, czy własności zazwyczaj przypisywane intuicji jako typowi poznania, a słowami Parsonsa — szczególnej relacji poznawczej z przedmiotem poznania — charakteryzują również poznanie diagramowe?[13]

Przyjrzyjmy się najpierw przypisywanej poznaniu intuicyjnemu bezpośredniości, natychmiastowości i całościowości. Jak wspominałem, bezpośredniość czy natychmiastowość poznania intuicyjnego można rozumieć na różne sposoby. Niesłuszne wydaje się ujmowanie poznania diagramowego jako pozapojęciowego. Po pierwsze, diagramy — rozumiane jako reprezentacje niezawierające liter, liczb bądź innych symboli — są niedookreślone. Ten sam diagram może reprezentować wiele obiektów

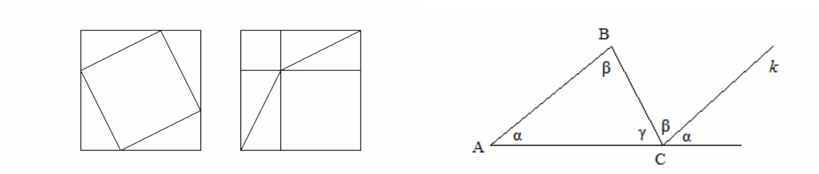
[11] Na podobną własność diagramów zwracał uwagę Charles S. Peirce. Pisał, że po sporządzeniu diagramu możemy odkryć nowe prawdy dzięki bezpośredniej obserwacji. Nowa informacja może być również ujawniona przez manipulację na diagramie. Dodajmy, iż Peirce, który wszystkie reprezentacje nazywał diagramami, wyróżniał wśród nich ikony, które reprezentują na mocy podobieństwa ich zewnętrznego kształtu do przedmiotu poznania, symbole, które reprezentują na mocy konwencji, oraz indeksy, które można postrzegać jako nazwy własne (por. Shin 2002, s. 23-24).

[12] W wypadku reprezentacji wnioskowań sylogistycznych za pomocą diagramów Venna po zaznaczeniu na diagramie przesłanek (np. za pomocą cieniowania) wniosek możemy często niejako „odczytać" z diagramu.

[13] Por. Parsons 2008, s. 144.

matematycznych (np. trzy odcinki połączone w końcach mogą reprezentować trójkąt, graf lub jeszcze inny obiekt). Odpowiednie oznaczenia bądź np. komentarze zawarte w części tekstowej dowodu muszą wskazywać, jakie pojęcia matematyczne reprezentowane są przez odpowiednie elementy diagramu. Po drugie, w celu przeprowadzenia rozumowania musimy być w posiadaniu — oprócz aparatu pojęciowego — odpowiedniej wiedzy. Jak piszą Kajsa Bråting i Johanna Pejlare (2008, s. 357), to, co leży „między wierszami" w rysunku, może być zrozumiane jedynie przez kogoś, kto ma odpowiednie przygotowanie i doświadczenie matematyczne.

Bardziej kontrowersyjne wydaje się pytanie, czy za pośrednictwem diagramu możemy przekonać się o prawdziwości niektórych twierdzeń w sposób niezależny od *rozumowania*. Wydaje się, że żaden diagram nie daje natychmiastowego poznania prawdziwości danego twierdzenia — również poniższe diagramy „dowodzące" twierdzenia Pitagorasa oraz twierdzenia o sumie kątów w trójkącie euklidesowym wymagają przeprowadzenia jakiegoś rozumowania lub też zaistnienia określonego procesu myślowego.



Rys. 2. Diagramy „dowodzące" prawdziwości twierdzenia Pitagorasa oraz twierdzenia o sumie kątów w trójkącie

Inną kwestią jest natomiast, czy rozumowanie, które tu przeprowadzamy, jest tego samego typu, co „zwykłe" rozumowanie zapisywane jako ciąg symboli. Postuluje się w istocie czasem istnienie specyficznego typu rozumowań opartych na diagramach, choć bywa on bardzo różnorodnie charakteryzowany. Jako „rozumowanie diagramowe" czy „wizualne" można więc postrzegać takie, w którego trakcie jesteśmy skłonni (bądź zmuszeni) do wyobrażania sobie jakichś kształtów lub ich przekształceń bądź też takie, które odwołuje się w sposób istotny do diagramów (jak np. rozumowania z *Elementów* Euklidesa).[14] Można tu również odwołać się do wspomnianych wcześniej własności diagramów: fakt, iż w diagramie można zawrzeć wiele informacji „na raz" lub też możliwość „odczytania" z nich nieznanych przed wykonaniem jego konstrukcji faktów może usprawniać niektóre rozumowania, stanowiąc o ich specyficznym charakterze. Nie ma tu miejsca na bliższą analizę tego problemu

[14] Tezy o istnieniu specyficznie wizualnych rozumowań i wnioskowań bronią m.in. Barwise i Etchemendy. Przez wnioskowanie Barwise i Etchemendy rozumieją ogólnie zadanie wydobycia pewnej informacji bądź uczynienie jej bezpośrednio dostępną czy też wyraźną (*extraction or making explicit*). Informacja ta jest dana w sposób ukryty (*implicit*) w informacji już nam dostępnej. Na diagramie zawarta jest przy tym informacja specyficznego typu — informacja wizualna (Barwise, Etchemendy 1996, s. 4).

— dość, że rozumowania wykonywane w efekcie kontaktu z diagramem można określić jako odmiennego typu niż zwykłe — choć (jak wspominałem) nie są przeprowadzane bez udziału pojęć. To, czy nazwiemy takie rozumowanie „intuicyjnym", wydaje się przy tym dalej kwestią otwartą.

Można oczywiście również zapytać, do *czego* ma diagram zapewniać bezpośredni dostęp. Jest to równoznaczne z postawieniem pytania o przedmiot matematyki. U Kanta przedmiot geometrii można rozumieć jako samą czystą naoczność przestrzeni; według królewieckiego filozofa osiągamy więc za pomocą diagramu bezpośredni — naoczny — dostęp do czystej formy danych zmysłowych. Jak można jednak rozumieć relację diagramu i obiektu przezeń reprezentowanego przy założeniu, iż przedmiot matematyki jest wobec nas zewnętrzny? Omówienie tej kwestii wymagałoby szerszego rozważenia zagadnienia przedmiotu matematyki, na co nie ma tutaj miejsca. Warto tu tylko przywołać jedną interpretację roli diagramów w duchu platonizmu matematycznego, sformułowaną przez Jamesa Roberta Browna. Według niego „niektóre 'obrazki' (*pictures*) nie są w rzeczywistości obrazkami, ale oknami do platońskiego nieba" (Brown 1999, s. 39). Można przy tym wskazać na rolę zarówno percepcji zmysłowej, jak i intuicji matematycznej w analizie diagramów. Są one do siebie podobne — w słowach Browna „widzimy diagram (percepcja zmysłowa), który przywołuje (*induces*) intuicję (percepcja matematyczna) czegoś zupełnie innego" (*ibidem*, s. 40). Diagram może więc — w taki sam sposób jak reprezentacja symboliczna — pośredniczyć w poznaniu obiektywnego przedmiotu matematyki, uaktywniając intuicję, która nie jest przy tym rozumiana jako intuicja przestrzenna, ale władza poznawcza gwarantująca bezpośredni dostęp do obiektywnego przedmiotu matematyki.[15]

Wrażenie bezpośredniego, natychmiastowego i całościowego poznania obiektu matematycznego można uzyskać również dzięki omawianym przeze mnie wcześniej własnościom diagramów. I tak, możliwość ujęcia dużej ilości informacji na diagramie może dawać wrażenie całościowego spojrzenia na dany obiekt lub problem; dzięki temu można też odnieść wrażenie „jednoczesnego" ujęcia wielu aspektów, a więc rodzaju natychmiastowego poznania. Podobne wrażenie może wywoływać również strukturalne podobieństwo diagramu do obiektu przezeń reprezentowanego. Dzięki temu można w pewnym sensie obserwować na diagramie odpowiednie zależności (jak np. spójność grafu). Jako „natychmiastowe" można też postrzegać rozumowanie, w przypadku którego sama konstrukcja diagramu ujawnia nowe fakty. Zaznaczmy, iż mówimy tu w dużym stopniu o subiektywnych „wrażeniach" podmiotu poznającego — ich dalsza filozoficzna interpretacja w kontekście np. przedmiotu matematyki jest odrębną kwestią. Zdaje się jednak, iż wrażenia te odpowiadają charakterystykom poznania intuicyjnego — niektóre własności matematyczne wydają się nam w efekcie obserwacji diagramu w jakimś sensie obecne czy naoczne.

---

[15] Przypomnijmy, iż podobną koncepcję intuicji sformułował Kurt Gödel.

Zostawmy kwestię bezpośredniości, całościowości i natychmiastowości poznania opartego na diagramach i zwróćmy się ku kilku innym możliwym interpretacjom kategorii intuicji. W pierwszej kolejności przyjrzyjmy się kwestii percepcji zmysłowej. Wydaje się mianowicie, iż należy postawić następujące pytanie: czy charakter wizualnego doświadczenia diagramu wypływa z czegoś więcej niż po prostu współgrania percepcji i pojęć? Jeśli tak, to czy elementem tym jest intuicja? U Kanta owym dodatkowym składnikiem była sama forma naszego poznania — czysta naoczność przestrzeni. Odrzucając jednak ów kantowski dogmat, wskazanie takiego pozapojęciowego i pozazmysłowego źródła poznania, które odgrywa rolę w poznaniu diagramowym, nie jest łatwe. Współcześnie za tego typu ujęciem myślenia wizualnego opowiada się Marcus Giaquinto. Analizując sposób, w jaki postrzegamy m.in. proste symetryczne figury geometryczne (takie jak kwadraty) dochodzi do wniosku, iż percepcja symetrii uaktywnia niejako automatycznie i nieświadomie dyspozycje do posiadania pewnych przekonań[16] (Giaquinto 2007, s. 24-40). Proces poznawczy tu zachodzący nie ma przy tym, według Giaquinto (*ibidem*, s. 52-54), ani charakteru pojęciowego (jako że przekonania nie wypływają z analizy pojęć czy definicji), ani też empirycznego (nie stanowią indukcyjnego uogólnienia danych zmysłowych). Nie ma tu miejsca na szerszą analizę tej koncepcji. Warto jednak podkreślić, że kategoria intuicji nie odgrywa w niej prawie żadnej roli.[17] Zamiast o intuicji Giaquinto pisze o *myśleniu* wizualnym, nie podejmuje też kwestii rozumowań wizualnych, skupiając się raczej na odkryciu matematycznym. Również wspomnianego wyżej pozapojęciowego i nieempirycznego źródła przekonań odnośnie do prostych obiektów geometrycznych nie określa Giaquinto jako intuicyjnego. Używa po prostu terminu „wizualizowanie” (*visualizing*), odróżniając je od zwykłego „wizualnego postrzegania” (*visual perceiving*) czy percepcji wzrokowej (por. *ibidem*, s. 60).

Warto tu również zwrócić uwagę na koncepcję Felixa Kleina, który — ujmując intuicję w odniesieniu do poznania zmysłowego i pojęciowego — czyni to w sposób odbiegający zarówno od koncepcji Giaquinto, jak i filozofii kantowskiej. Wyróżniał on dwa rodzaje intuicji — intuicję naiwną (*naive intuition*) i „ulepszoną”, czyli „wzmocnioną” (*refined intuition*). Ta pierwsza to zwykła percepcja wzrokowa, za pomocą której postrzegamy m.in. kształty i takie proste relacje, jak „większe od” czy „leży obok” — jest ona niedokładna i niewystarczająca do uprawiania matematyki. Intuicja wzmocniona rozwija się, gdy w celu zaradzenia niedokładności intuicji fizycznej idealizujemy dane percepcyjne, nadając im „przymusem intelektualnym” dokładność, której wrażenia zmysłowe mieć nie mogą (por. Toretti 1997, s. 147). Intuicja wzmocniona stanowi więc niejako „zmieszanie” pojęć i percepcji zmysłowej, konieczne w celu nadania rozważaniom matematycznym niezbędnej ścisłości.

---

[16] Może to być np. przekonanie o tym, iż przekątna dzieli kwadrat na dwa trójkąty o równych polach.

[17] Mam tu na myśli książkę *Visual Thinking in Mathematics*, w której Giaquinto analizuje szeroko bardzo różne typy wizualizacji i myślenia wizualnego w matematyce.

Termin „intuicja" można stosować również w odniesieniu do wizualizacji w zawężony sposób, nawiązując do wspomnianego wcześniej rozróżnienia na „intuicję, że" oraz intuicję obiektową. O intuicji obiektowej mówimy, gdy rozważając dany obiekt matematyczny, skłonni jesteśmy wykonywać odpowiednie rysunki bądź wizualizować go sobie. Jest tak z pewnością w wypadku pojęć geometrycznych lub topologicznych, które w jakimś stopniu wyrosły z analizy przestrzennych kształtów lub ogólniej — z doświadczenia wizualnego. Mamy jednak również tendencję do wizualizowania sobie grafów czy np. niektórych struktur algebraicznych, jak zbiory częściowo uporządkowane bądź drzewa.[18] Możemy dalej powiedzieć, iż mamy „intuicję, że", jeśli dochodzimy do przekonania matematycznego w konsekwencji samej obserwacji diagramu. Może to być „odczytanie" prostego wyniku rozumowania sylogistycznego z diagramu Venna lub przekonanie o ciągłości funkcji uzyskane na podstawie obserwacji kształtu wykresu czy też ogólniej — w konsekwencji łączenia własności funkcji, jaką jest ciągłość, z tym, że jej wykres ma kształt „nieprzerwanej kreski" (dodajmy, iż jedynie w taki, zawężony sposób, używa terminu „intuicja" Giaquinto).[19]

Wydaje się, że można wyróżnić jeszcze jeden sposób postrzegania kategorii intuicji przestrzennej, a mianowicie uznać ją za władzę poznawczą lub też jakiegoś typu umiejętność, która pozwala — za pośrednictwem wizualizacji — osiągnąć szeroką perspektywę, ogólny wgląd w daną dziedzinę bądź szerszy problem (a nie tylko metodę przeprowadzania poszczególnych rozumowań). Tak na intuicję zapatrywał się Henri Poincaré (1996, s. 1016-1018), według którego pełni ona co najmniej trzy istotne funkcje poznawcze: jest źródłem inwencji twórczej, umożliwia widzenie wewnętrznej jedności i całości w matematyce, oraz podpowiada, kiedy wykorzystać w rozumowaniu którąś ze znanych nam analitycznych technik dowodowych.

Należy podkreślić, że wszystkie wspomniane wyżej użycia terminu „intuicja" są w jakimś stopniu konwencjonalne. Zagadnienie roli wizualizacji w poznaniu matematycznym można więc badać, nie stosując w ogóle pojęcia intuicji, lecz rozważając po prostu różne typy reprezentacji (w szczególności diagramy i symbole) — ich wady, zalety czy sposób, w jaki oddziałują na użytkownika. Postępuje tak w istocie z powodzeniem wielu filozofów matematyki zajmujących się wizualizacjami, jak m.in. wspominani tu Barwise i Etchemendy czy Giaquinto. Kategoria intuicji odgrywa mniejszą rolę w szczególności w tych ujęciach diagramów, które za cel stawiają sobie uściślenie bądź formalizację ich roli w dowodach. W ramach takich formalizacji w sposób systematyczny określa się język diagramów oraz ściśle formułuje reguły posługiwania się nim wraz z np. regułami wnioskowania, traktując diagram

[18] Giaqutino pisze, iż mamy „wizualne ujęcie" (*visual grasp*) takich obiektów, jak graf czy krata. Podkreśla on, iż posiadamy wizualne ujęcie nawet niektórych pojęć algebraicznych i arytmetycznych, w szczególności np. takich jak oś liczbowa (Giaquinto 2007, s. 217-225).

[19] Jak wiadomo, takie intuicyjne przekonanie stoi w sprzeczności z istnieniem funkcji ciągłych nigdzie-różniczkowalnych, na których istnienie pierwszy wskazał Karl Weierstrass.

jako w istocie szczególny typ symbolu.[20] Trudno się tutaj dopatrywać jakiegoś miejsca dla kategorii intuicji. Należy tu jednak podkreślić, iż podobne formalizacje rozumowań diagramowych są wciąż raczej rzadkością, co więcej — w słowach Zenona Kulpy (2006, s. 69) — „niweczą główną zaletę diagramów, jaką jest bezpośredni wgląd w sens przestawionej informacji".

Podsumowując powyższe rozważania, należy stwierdzić, iż kategorię intuicji przestrzennej można odnosić do poznania matematycznego na różne sposoby, co ma swoje źródło m.in. w tym, iż wizualizacje czy myślenie wizualne pełnią bardzo różne funkcje w poznaniu matematycznym. Po pierwsze, niektóre aspekty poznania diagramowego, w szczególności te związane z omawianymi tu własnościami diagramów, są zgodne z charakterystykami przypisywanymi zazwyczaj poznaniu intuicyjnemu. Nawiązując do tych własności diagramów, można poznanie diagramowe rozważać jako bezpośrednie, natychmiastowe oraz całościowe i w tym sensie intuicyjne. Bezpośredniości czy natychmiastowości poznania diagramowego nie powinno się przy tym rozumieć jako braku konieczności stosowania pojęć czy przeprowadzania rozumowania. Pod drugie, intuicję można również ujmować w jakiś zawężony sposób, np. jako „intuicję, że" rozumianą jako skłonność do posiadania określonych przekonań w konsekwencji obserwacji diagramu. Dyskusyjne pozostaje natomiast, czy można mówić o intuicji jako odrębnej władzy poznawczej, nie dającej się sprowadzić ani do poznania zmysłowego ani pojęciowego. Takiemu rozumieniu terminu „intuicja" bliskie jest jednak jedno z jego powszechniejszych zastosowań, zgodnie z którym intuicja jest najogólniej rzecz biorąc, tym w naszym poznaniu, co umożliwia całościowy, syntetyczny wgląd w badany obiekt matematyczny poprzez obserwację i analizę diagramu. Tak chyba postrzegał intuicję matematyk Michael Atiyah, laureat medalu Fieldsa, gdy na jednym z kongresów matematycznych podkreślał, że w matematyce „intuicja [przestrzenna] jest naszym najpotężniejszym narzędziem" (Hodges 2005, s. 282). Na koniec dodajmy, iż analiza roli wizualizacji w poznaniu matematycznym może się również obyć bez kategorii intuicji przestrzennej, czyniąc przedmiotem badań jedynie własności diagramów jako typów reprezentacji obiektów matematycznych bądź posługujące się nimi rozumowania.

BIBLIOGRAFIA

Barwise, J., Etchemendy, J. 1996, *Visual information and valid reasoning*, [w:] *Logical reasoning with diagrams*, red. G. Allwein, J. Barwise, Oxford.

BrÍting, K., Pejlare, J. 2008, *Visualizations in Mathematics*, „Erkenntnis", Vol. 68, s. 345-358.

[20] W swojej formalizacji zastosowań diagramów Venn'a Erich Hammer (1994, s. 74) rozważa na przykład cztery typy wnioskowań: tradycyjne wnioskowania, których przesłankami i wnioskami są zdania (czy formuły zdaniowe), dalej wnioskowania prowadzące od zdań do diagramów, od diagramów do zdań i wreszcie od diagramów do diagramów. Dla każdego typu wnioskowań formułuje Hammer odpowiednie reguły wnioskowania.

Brown, J. R. 1999, *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, Routledge, London and New York.

Davis, P. J., Hersh, R., Marchisotto, E. A. 2001, *Świat matematyki*, PWN, Warszawa.

Giaquinto, M. 2007, *Visual Thinking in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York.

Hammer, E. 1994, *Reasoning with Sentences and Diagrams*, „Notre Dame Journal of Formal Logic", Vol. 35, No 1, Winter, s. 73-87.

Hodges, W. 2005, *Mathematical Problems from Applied Logic*, [w:] *New Logics for the XXIst Century*, red. D. M. Gabbay, International Mathematical Series, Springer, s. 277-316.

Kant, I. 1986, *Krytyka czystego rozumu*, Tom I, II, PWN Warszawa.

Kulpa, Z. 2006, *Diagramy kontra predykaty*, źródło: http://www.ippt.gov.pl./~zkulpa/diadrams/diagser/tytrob11.pdf.

Kulpa, Z. 2009, *Main Problems of Diagrammatic Reasoning. Part I: The generalization problem*, „Foundations of Science", vol. 14, s. 75-96.

Majer, U. 2006, *The Relation of Logic and Intuition in Kant's Philosophy of Science, Particularly Geometry*, [w:] *Intuition and the Axiomatic Method*, red. E. Carson and R. Huber, Springer, s. 47-66.

Parsons, C. 2008, *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge University Press, Cambridge.

Poincaré, H. 1996, *Science and Hypotheses*, [w:] *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. 1, red. Ewald, W. B., Clarendon Press, Oxford, s. 1012-1020.

Potter, D. 2006, *Diagrammatic Representation in Geometry*, „Dialectica", Vol. 60, No 4, s. 369-382.

Shimojima, A. 2004, *Tutorial: Inferential and Expressive Capacities of Graphical Representations,* źródło: www.jaist.ac.jp/~ashimoji/Diagrams_2004_tutorial.ppt.

Shin, S-J., B. 2002, *The Iconic Logic of Peirce'a Graphs*, MIT Press.

Torretti, R. 1978, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston-London.