Filozofia Nauki
Rok XXII, 2014, Nr 2(86)

Andrzej Indrzejczak

Powstanie i ewolucja dedukcji naturalnej[1]

WSTĘP

W 1934 r. ukazały się dwie przełomowe prace poświęcone nowym sposobom formalizacji logiki: Stanisława Jaśkowskiego *On the Rules of Suppositions in Formal Logic* (Jaśkowski 1934) i Gerharda Gentzena *Untersuchungen über das Logische Schließen* (Gentzen 1934-1935). Choć doszli do swoich wyników niezależnie, a systemy, które przedstawili, są istotnie różne, nie ulega wątpliwości, że obu przyświecała ta sama idea stworzenia systemu dedukcji, który w formalnie poprawny sposób rekonstruuje stosowane w matematyce od wieków sposoby dowodzenia twierdzeń. Ponieważ w systemach Jaśkowskiego i Gentzena — w przeciwieństwie do „sztucznego" z punktu widzenia matematyka sposobu konstrukcji dowodu w systemie aksjomatycznym — nacisk był położony na naturalne sposoby wnioskowania, powszechnie określa się je mianem systemów dedukcji naturalnej (DN)[2].

Niestety, w literaturze światowej poświęconej historii dedukcji naturalnej w rażący sposób pomijane są dokonania Jaśkowskiego. Często odnotowuje się Gentzena jako jedynego jej twórcę i nawet jeżeli pojawia się nazwisko Jaśkowskiego, to jego sposób podejścia do tej problematyki zazwyczaj mylnie przypisywany jest Gentzenowi. Nieznane szerzej są też dokonania w tej dziedzinie innych polskich badaczy, np. Suszki (por. Indrzejczak 2009). Rewizja stanu wiedzy, wyjaśnienie nieporozumień i dokładne scharakteryzowanie różnic w podejściach Jaśkowskiego i Gentzena jest zatem ważnym zadaniem.

---

[1] Praca została wykonana w ramach realizacji projektu 2011/03/B/HS1/04366 finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

[2] Nazwa pochodzi od Gentzena, Jaśkowski stosował określenie „systemy złożone", w przeciwieństwie do aksjomatycznych „systemów prostych".

Dysproporcja w znajomości wyników Gentzena i Jaśkowskiego wynika w dużej mierze stąd, że Gentzen w swej pracy wprowadził też rachunki sekwentowe jako dogodny sposób prezentacji metalogicznych wyników badań nad dowodami w systemach dedukcji naturalnej. Chociaż sam Gentzen wprowadził je jako pomocniczy w stosunku do dedukcji naturalnej rodzaj formalizacji, to szybko stały się popularne. Rozwój badań nad rachunkami sekwentowymi gruntownie zmienił charakter teorii dowodu pierwotnie sformułowanej przez Hilberta na bazie systemów aksjomatycznych. Przyjęcie rachunków sekwentowych jako podstawy badań pozwoliło uzyskać znacznie dokładniejsze wyniki dotyczące m.in. struktury dowodu, procesu jego poszukiwania czy znaczenia stałych logicznych. Metody dowodzenia twierdzeń o niesprzeczności, pełności, rozstrzygalności, interpolacji czy eliminacji reguły cięcia uzyskane na gruncie badań nad rachunkami sekwentowymi należą do najbardziej eleganckich, efektywnych i ogólnych rezultatów tego rodzaju. Aparat formalny Gentzena był wielokrotnie z powodzeniem stosowany w badaniach nad rozmaitymi typami logik, a nawet doprowadził do ukonstytuowania klasy tzw. logik podstrukturalnych oraz osobnej gałęzi teorii dowodu, tzw. strukturalnej teorii dowodu (Negri, von Plato 2001). Warto też podkreślić, że teoriodowodowe rezultaty otrzymane w badaniach nad rachunkami sekwentowymi są od lat stosowane w badaniach nad automatyzacją dowodzenia twierdzeń, co znajduje m.in. wyraz w implementacji licznych programów opartych na wariantach rachunku sekwentów dla rozmaitych logik oraz teorii.

Osiągnięcia związane z wykorzystaniem rachunków sekwentowych nie przekreślają jednak ważności systemów dedukcji naturalnej, a raczej je dopełniają. W ciągu ostatnich osiemdziesięciu lat rezultaty Jaśkowskiego i Gentzena były wielokrotnie wykorzystywane, doczekały się też daleko idących rozwinięć i przeróbek. Możemy wyróżnić tu co najmniej trzy płaszczyzny badań: praktyczną, teoretyczną i filozoficzną:

1. Upowszechnienie po II wojnie światowej wyników dotyczących dedukcji naturalnej radykalnie wpłynęło na sposób nauczania logiki. Kolejne wersje tych systemów zdominowały, przynajmniej w literaturze anglosaskiej, sposób prezentacji systemów formalnych, zbliżając praktykę dowodową do wykorzystywanych od starożytności naturalnych sposobów wnioskowania, doprowadziły też pośrednio do powstania innych rodzajów systemów formalnych, takich jak systemy tablicowe, rezolucyjne czy odrzuceniowe.

2. W latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku prace Prawitza (1965) dotyczące normalizacji dowodów w DN zapoczątkowały nowy etap w rozwoju teorii dowodu. Podstawowymi obiektami badań stały się dowody i ich własności, a nie teorie czy relacje konsekwencji.

3. Blisko z poprzednim punktem związany jest też filozoficzny problem definiowania znaczenia stałych logicznych. Charakterystyczny dla Gentzena sposób patrzenia na reguły inferencji doczekał się rozwinięcia (np. Dummett 1991, Brandom 2000), doszło też do rozpowszechnienia terminu „semantyka teoriodowodowa", wprowadzonego w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku przez Schroedera-Heistera (1991).

W dalszej części pracy rozwiniemy te trzy punkty. Zaczniemy od pewnych uwag natury historycznej oraz próby określenia, czym właściwie jest dedukcja naturalna. Następnie omówimy podobieństwa i różnice między systemami Jaśkowskiego i Gentzena oraz scharakteryzujemy inne warianty DN. Dwie ostatnie sekcje poświęcimy najważniejszym teoretycznym i filozoficznym aspektom dedukcji naturalnej.

1. PREHISTORIA DEDUKCJI NATURALNEJ

Genezy naturalnej dedukcji jako sposobu formalizacji logiki można dopatrywać się już w starożytności. Np. Corcoran (1972) w polemice z Łukasiewiczem, który zrekonstruował sylogistykę Arystotelesa jako system aksjomatyczny (Łukasiewicz 1951), proponuje takie jej rozumienie, przy którym podstawową rolę odgrywa dowód z założeń, a tryby sylogistyczne traktowane są jako reguły. Podobnie, wielu badaczy (np. Mates 1971) uważa, że logicy stoiccy posługiwali się twierdzeniem o dedukcji oraz innymi regułami charakterystycznymi dla systemów DN. Mamy również wiele przykładów stosowania dowodu nie wprost przez greckich matematyków (por. analizy Kneale, Kneale 1962). Przykłady te można mnożyć, ale nawet jeżeli zgodzimy się z argumentami takich historyków logiki, jak Corcoran czy Mates, to są to jedynie przykłady używania technik dowodowych charakterystycznych dla DN, nie towarzyszą im jednak badania nad ich uzasadnieniem czy systematycznym ujęciem.

To, że Jaśkowski i Gentzen niezależnie i w tym samym czasie skonstruowali pierwsze systemy DN, nie powinno dziwić. Od dawna istniała potrzeba formalizacji stosowanych przez matematyków naturalnych sposobów dowodzenia. Za pierwszy krok w tym kierunku można uznać udowodnienie przez Herbranda twierdzenia o dedukcji dla systemu aksjomatycznego (Herbrand 1930)[3]. W tym samym czasie Tarski wprowadził twierdzenie o dedukcji jako jeden z aksjomatów teorii konsekwencji (Tarski 1930); w praktyce używał go jednak już od 1921 r., podobnie zresztą jak Leśniewski, Salamucha i inni logicy z kręgu szkoły lwowsko-warszawskiej.

Historycznie rzecz ujmując, propozycja Jaśkowskiego była wcześniejsza od tej przedstawionej przez Gentzena. W 1926 r. Łukasiewicz na prowadzonym przez siebie seminarium postawił problem, jak formalnie poprawnie opisać metody dowodzenia w praktyce używane przez matematyków. Rok później Jaśkowski rozwinął te sugestie, a swoje wyniki przedstawił w 1927 r. na Pierwszym Polskim Kongresie Matematyków we Lwowie (por. Jaśkowski 1929), nie zadbał jednak o ich rozpowszechnienie. Artykuły Jaśkowskiego i Gentzena ukazały się w tym samym 1934 r., zwięzła praca Jaśkowskiego *On the Rules of Suppositions in Formal Logic* w pierwszym numerze „Studia Logica", natomiast obszerne studium Gentzena *Untersuchungen über das Logische Schließen*, będące jego habilitacją, w dwóch częściach w „Mathematische Zeitschrift".

[3] Bez dowodu twierdzenie o dedukcji podane było już w (Herbrand 1928).

2. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA DN

Spróbujmy ustalić, czym właściwie są systemy dedukcji naturalnej. Niestety nie istnieje precyzyjna i powszechnie akceptowana definicja. Bogactwo rozwiązań stosowanych w różnych systemach określanych mianem DN prowadzi do poważnych problemów teoretycznych przy próbach ustalania zakresu tego terminu. Problem demarkacyjny był omawiany przez wielu autorów (por. Barth, Krabbe 1982, Pelletier 1999, Anellis 1991), którzy starali się podać kryteria ustalania, czym jest DN. Termin ten jest czasem używany w bardzo szerokim sensie, tak że w jego zakres wchodzą prawie wszystkie rodzaje formalizacji niebędące systemami aksjomatycznymi w stylu Hilberta. Przy takim rozumieniu zarówno rachunki sekwentowe, jak i systemy tablicowe zaliczane bywają do DN[4]. Mimo bliskich związków między tymi systemami takie rozwiązanie jest niesłuszne przynajmniej z trzech powodów:

1. Historycznego: Gentzen wyraźnie odróżnia swój system DN od rachunku sekwentowego, który traktuje jako wariant systemu aksjomatycznego.
2. Etymologicznego: DN ma być rachunkiem formalizującym tradycyjne sposoby wnioskowania. Nawet jeżeli istniejące systemy nie spełniają tego wymogu w zadowalający sposób (por. Anellis 1991), to systemy tablicowe i rachunki sekwentowe są jeszcze dalszym od niego odstępstwem.
3. Praktycznego: używanie terminu DN w zbyt szerokim sensie stanowi zabieg klasyfikacyjny o wątpliwej przydatności.

Również rozwiązania oparte na podaniu dużej liczby kryteriów napotykają poważne trudności. Zazwyczaj wyłączają z zakresu DN wiele systemów, które są powszechnie uznawane za dedukcję naturalną. Wydaje się, że rozsądnym posunięciem jest uznanie terminu DN za tzw. termin rodzinny w sensie Wittgensteina i rezygnacja z prób jego ścisłego zdefiniowania. Na pojęcie takie składa się zespół wielu cech, często stopniowalnych, i może się zdarzyć, że rozmaite desygnaty bardzo się różnią, ponieważ nie dzielą wielu cech (czasem żadnej), a nawet te własności, które przysługują im obu, występują w innym nasileniu.

W naszym przekonaniu, żeby system mógł zostać uznany za DN, powinien spełniać trzy warunki:

1. Gwarantować możliwość wprowadzania i eliminowania dodatkowych założeń w trakcie konstruowania dowodu.
2. Charakteryzować stałe logiczne raczej za pomocą reguł niż aksjomatów.
3. Charakteryzować się bogactwem stosowanych form konstrukcji dowodu.

Charakterystykę tę spełniają zarówno oryginalne systemy Jaśkowskiego i Gentzena, jak i wiele ich naśladownictw i rozwinięć. Punkt pierwszy oznacza, że w sys-

[4] Takie szerokie ujęcie występuje np. w (Marciszewski 1987); sam Beth (1962) traktuje swój wariant metody tablicowej jako system DN.

temie DN możemy w obrębie dowodu nadrzędnego otwierać dowody podporządkowane (poddowody), oparte na dodatkowych założeniach. Ze względu na tę własność systemy DN bywają też określane mianem rachunków założeniowych (np. Słupecki, Borkowski 1958). Oczywiście, wprowadzanie w obręb danego dowodu dodatkowych założeń wymaga stosowania technik, które umożliwiają później zamknięcie odpowiedniego poddowodu. Typowym przykładem takiego postępowania jest dowodzenie nie wprost, w którym dojście do sprzeczności w poddowodzie opartym na dodatkowym założeniu A pozwala dołączyć do dowodu nadrzędnego negację A, przy jednoczesnym zamknięciu tego poddowodu.

Punkt drugi odróżnia DN od systemów aksjomatycznych, nie wyklucza jednak sytuacji, że oprócz reguł do pierwotnych elementów systemu zalicza się pewne aksjomaty. Gdybyśmy zakazali używania aksjomatów w systemach DN, to — paradoksalnie — nawet oryginalny system DN Gentzena dla logiki klasycznej nie byłby systemem DN, ponieważ powstaje przez dołączenie prawa wyłączonego środka do systemu DN dla logiki intuicjonistycznej. Zazwyczaj w systemach DN dla logiki pierwszego rzędu z identycznością używa się przynajmniej aksjomatu wyrażającego zwrotność identyczności, ponieważ jest to najprostsze rozwiązanie, a prostotę systemu traktuje się często jako ważną własność DN. Również definiowanie reguł jako reguł wprowadzania i eliminacji stałych logicznych, choć niekonieczne, jest dość charakterystycznym wyróżnikiem DN; o wadze tej cechy powiemy więcej w końcowej części artykułu.

Punkt trzeci jest blisko związany z pierwszym w tym sensie, że formalne ujęcie tradycyjnych technik dowodzenia warunkowego, nie wprost i przez przypadki wiąże się z wprowadzaniem i eliminacją założeń (poddowodów). Ponadto, wyklucza on poza zakres DN wiele innych rodzajów formalizacji, takich jak rachunki sekwentowe czy tablicowe, ponieważ oparte są one na zastosowaniu jednej formy dowodu. Ta swoboda w konstrukcji dowodu jest, w naszym przekonaniu, najistotniejszą cechą DN.

Ogólna charakterystyka DN ograniczona do spełniania tych trzech kryteriów jest na tyle pojemna, że pokrywa mnogość systemów na pozór bardzo różniących się w takich szczegółach, jak format dowodu (ciąg, drzewo itp.), rodzaj obiektów (struktur danych), z których buduje się dowody (formuły, sekwenty, zbiory formuł itp.), czy graficzne środki wykorzystywane do reprezentacji hierarchii poddowodów (prefiksy, linie, prostokąty itp.).

3. JAŚKOWSKI I GENTZEN: PODOBIEŃSTWA

Porównanie propozycji Jaśkowskiego i Gentzena pokazuje istotne podobieństwo charakteru reguł systemu oraz istotną różnicę w definicji dowodu.

Zarówno Jaśkowski, jak i Gentzen wykorzystują dwa rodzaje reguł — reguły inferencji oraz reguły konstrukcji dowodu. Reguły inferencji służą przekształcaniu jednych formuł (przesłanek) w drugie (wnioski) i można je wygodnie reprezentować jako sekwenty o postaci: $X \vdash A$, gdzie X jest skończonym zbiorem przesłanek, a A wnioskiem. Oto lista reguł inferencji systemu Gentzena dla logiki intuicjonistycznej:

(~E) $A, {\sim}A \vdash \bot$ oraz $\bot \vdash A$
(∧E) $A \wedge B \vdash A$ oraz $A \wedge B \vdash B$
(∧D) $A, B \vdash A \wedge B$
(→E) $A \to B, A \vdash B$
(∨D) $A \vdash A \vee B$ oraz $B \vdash A \vee B$
(∀E) $\forall xA \vdash A(x/t)$
(∃D) $A(x/t) \vdash \exists xA$
gdzie A(x/t) to rezultat poprawnego podstawienia termu t za zmienną wolną x.

Reguły konstrukcji dowodu pozwalają na wprowadzanie założeń i charakteryzują warunki, które muszą być spełnione, aby części dowodu zależne od dodatkowych założeń (dowody podporządkowane) mogły być zamknięte. Są to w istocie metareguły postaci: jeżeli $X_1 \vdash A_1, \ldots, X_n \vdash A_n$, to $Y \vdash B$, gdzie ciąg dowodów $X_1 \vdash A_1, \ldots, X_n \vdash A_n$ odpowiada dowodom podporządkowanym, a $Y \vdash B$ dowodowi nadrzędnemu, który otrzymujmy w wyniku zastosowania odpowiedniej reguły konstrukcji dowodu.

W systemie Gentzena dla logiki intuicjonistycznej mamy następujące reguły:

(~D) Jeżeli $X, A \vdash \bot$, to $X \vdash {\sim}A$
(→D) Jeżeli $X, A \vdash B$, to $X \vdash A \to B$
(∨E) Jeżeli $X, A \vdash B$ i $Y, C \vdash B$, to $X, Y, A \vee C \vdash B$
(∀D) Jeżeli $X \vdash A(x/a)$, to $X \vdash \forall xA$
(∃E) Jeżeli $X, A(x/a) \vdash B$, to $X, \exists xA \vdash B$
gdzie a jest zmienną wolną niewystępującą w X i w B.

Aby scharakteryzować logikę klasyczną, Gentzen dodaje jako aksjomat prawo wyłączonego środka lub regułę inferencji ${\sim\sim}A \vdash A$. Charakterystycznym rozwiązaniem wprowadzonym przez Gentzena i akceptowanym w ogromnej liczbie systemów DN jest podział reguł na reguły eliminacji i dołączania; o jego teoretycznym znaczeniu powiemy w dwóch ostatnich paragrafach. Jaśkowski używa języka implikacyjno-negacyjnego i jedynie kwantyfikatora ogólnego, chociaż w dodatkowej uwadze podaje również reguły dla koniunkcji — takie same jak u Gentzena, co wskazywałoby, że idea używania par reguł dołączania i eliminacji dla każdej stałej nie była mu obca. Na poziomie zdaniowym charakteryzuje implikację takimi samymi regułami jak Gentzen, natomiast dla uzyskania logiki klasycznej wprowadza mocną regułę dowodu nie wprost:

(~E) Jeżeli $X, {\sim}A \vdash \bot$, to $X \vdash A$

Reguły Jaśkowskiego dla ∀ są innego rodzaju, ponieważ charakteryzują logikę pierwszego rzędu słabszą od klasycznej, tzw. logikę inkluzywną.

4. JAŚKOWSKI I GENTZEN: RÓŻNICE

Najpoważniejsza różnica między systemami Gentzena i Jaśkowskiego dotyczyła sposobu reprezentacji dowodu. Gentzen zapisywał dowody w postaci drzew (D-dowody), Jaśkowski natomiast jako ciągi formuł (L-dowody). Zapoczątkowali w ten sposób dwa istotnie różniące się od siebie typy DN.

W D-dowodach korzeniem drzewa jest dowodzona teza, liście to założenia, natomiast pozostałe węzły drzewa zawierają formuły wydedukowane za pomocą reguł systemu. Drzewo stanowi idealną reprezentację gotowego dowodu, dobrze ukazującą dedukcyjne zależności między formułami. Jeżeli rozpatrujemy jednak DN jako system praktycznego poszukiwania dowodu, to taka forma reprezentacji jest niewygodna. W szczególności często jesteśmy zmuszeni do powtarzania identycznych albo bardzo podobnych części dowodu, ponieważ w D-dowodach inferencje są wykonywane na konkretnych wystąpieniach formuł; np. jeżeli $A \wedge B$ jest założeniem, z którego mamy wydedukować zarówno A, jak i B, to odpowiednia gałąź dowodu zaczynająca się od $A \wedge B$ musi być zastosowana przynajmniej dwukrotnie. Gentzen był świadom tych trudności, lecz taka reprezentacja dowodu była użyteczna w jego teoretycznych rozważaniach. Dlatego też D-dowody są nadal z powodzeniem wykorzystywane w badaniach teoriodowodowych z użyciem DN (por. np. Prawitz 1965, Negri, von Plato 2001).

System Jaśkowskiego był natomiast od początku pomyślany jako praktyczne narzędzie przeprowadzania dowodów, dlatego też linearna reprezentacja dowodu była naturalnym rozwiązaniem. W L-dowodzie inferencje są przeprowadzane przy wykorzystaniu formuł, a nie ich konkretnych wystąpień: aby wydedukować A i B z $A \wedge B$, wystarczy tylko raz tę ostatnią wprowadzić jako założenie. Oczywiście, za to uproszczenie trzeba zapłacić pewną cenę. Jeżeli stosujemy regułę konstrukcji dowodu, np. ($\rightarrow$D), musimy *explicite* zaznaczyć, że dowód podporządkowany oparty na dodatkowym założeniu jest zamknięty: żadna formuła, która w nim się pojawiła, nie może być dalej używana w dowodzie (nadrzędnym). W D-dowodzie sprawa jest prosta, ponieważ aby użyć formuły jako przesłanki do zastosowania reguły, musimy ją (i całe drzewo dowodowe, które do niej prowadziło) umieścić bezpośrednio nad wnioskiem. W L-dowodzie musimy użyć dodatkowych technik, aby wykluczyć z dalszego użycia zawartość zamkniętych poddowodów. Jaśkowski wprowadził dwa rozwiązania tego problemu: graficzne i z użyciem tzw. prefiksów. W pierwszym z nich dowód podporządkowany po jego zakończeniu (tzn. zastosowaniu którejś z reguł konstrukcji dowodu) zamykany był w prostokącie i odtąd nie można było już dalej używać znajdujących się w nim formuł. W drugim rozwiązaniu formuły w dowodzie poprzedzone były prefiksami w postaci skończonych ciągów liczb naturalnych; wprowadzenie nowego założenia związane było z dołączeniem kolejnej liczby do prefiksu, a zastosowanie reguły konstrukcji dowodu ze skasowaniem ostatniej liczby w prefiksie. Setki podręczników logiki stosują do dziś warianty tych rozwiązań, np. prostokąty (Kalish, Montague 1964), pionowe linie (Fitch 1952), prefiksy (Słupecki, Borkowski 1958). Zazwyczaj systemy tego typu określane są mianem DN w stylu Fitcha, choć właściwsze byłoby określenie *w stylu Jaśkowskiego*.

L-dowody w systemach w stylu Jaśkowskiego nie są linearne w ścisłym tego słowa znaczeniu; dowody te są raczej hierarchicznie uporządkowanymi strukturami, w których poddowody zawierają się w dowodzie nadrzędnym, ale same też mogą zawierać poddowody.

5. SYSTEMY SEKWENTOWE DN

Trzeba podkreślić, że większość używanych dziś systemów DN naśladuje rozwiązania Jaśkowskiego i Gentzena, toteż można je określić jako tzw. F-systemy, czyli systemy, w których formuły są podstawowymi jednostkami budowy dowodów. Nie wszystkie systemy DN są jednak F-systemami. Gentzen (1936) wprowadził jeszcze inną formę DN, która może być postrzegana jako forma kompromisu między jego systemem DN a rachunkiem sekwentów z (Gentzen 1934-1935). Jednostkami, na których zdefiniowane są reguły inferencji, nie są w niej formuły, lecz sekwenty, toteż stosujące ją systemy można nazwać S-systemami DN (systemami sekwentowymi DN). W takim systemie np. obie reguły dla koniunkcji przybierają następujący kształt:

($\wedge$E') Jeżeli $X \vdash A \wedge B$, to $X \vdash A$ oraz Jeżeli $X \vdash A \wedge B$, to $X \vdash B$
($\wedge$D') Jeżeli $X \vdash A$ i $Y \vdash B$, to $X, Y \vdash A \wedge B$
gdzie X, Y są po prostu zbiorami (u Gentzena ciągami) aktywnych założeń.

Podane przykłady reguł pokazują, że w kontekście S-systemów różnica między regułami inferencji i konstrukcji dowodu przestaje istnieć, ponieważ sprowadza się do tego, że w regułach inferencji wszystkie operacje są przeprowadzone na następnikach sekwentów, a w wypadku reguł konstrukcji dowodu występują też pewne operacje (mianowicie odejmowanie formuł) na poprzednikach. Odróżnia to S-system DN Gentzena od jego rachunku sekwentów, w którym mamy reguły wprowadzania stałych również do poprzednika, tzn. zamiast reguł eliminacji, takich jak ($\wedge$E'), przyjmujemy:

(D$\wedge$) Jeżeli $X, A, B \vdash C$, to $X, A \wedge B \vdash C$

Później pojawiły się S-systemy DN, w których takie reguły też były dopuszczone (np. Hermes 1963). Podobne systemy zapewniają większą elastyczność konstrukcji dowodów niż oryginalny S-system Gentzena. Jeżeli jednak zachowamy ograniczenie reguł do tych, które działają zasadniczo tylko na następnikach, to możemy uzyskać daleko idące uproszczenie, spopularyzowane przez Suppesa (1957). Jego DN wydaje się pozornie F-systemem, ponieważ formuły w poprzednikach sekwentów są zastąpione przez numery wierszy, w których po raz pierwszy pojawiły się odpowiednie założenia. Unikamy w ten sposób konieczności mozolnego przepisywania wszystkich założeń, na których oparta jest formuła z następnika. S-systemy w takiej postaci dla logiki klasycznej spopularyzował Lemmon (1965). Również systemy DN dla logik implikacji relewantnej (Anderson, Belnap 1975) stosują takie (ukryte) sekwenty.

We wszystkich wspomnianych wyżej S-systemach jedyne sekwenty, które mogą rozpocząć dowód, mają postać $A \vdash A$ lub $X \vdash A$, gdzie A należy do X. Odpowiadają one operacji wprowadzania założeń w F-systemach. Zamiast odpowiednich reguł możliwe jest jednak również wprowadzenie do S-systemów sekwentów o innej postaci, np. zamiast reguł (∧E') i (∧D') możemy do charakteryzacji koniunkcji użyć sekwentów (∧E) i (∧D). Różnica względem F-systemów polega na sposobie ich zastosowania. W F-systemie z pomocą (∧E) wyprowadzamy z koniunkcji, która występuje jako samodzielny element dowodu, jeden z jej składników. W S-systemie zaś cały sekwent reprezentujący tę regułę inferencji może być wprowadzony do dowodu jako jego niezależny element. Systemy tego typu można znaleźć np. w (Suszko 1948), (Rieger 1967) i (Hasenjaeger 1962).

Zauważmy też, że stosowanie rozróżnienia między L- i D-dowodami w odniesieniu do S-systemów nie ma znaczenia. Wprawdzie S-system Gentzena wykorzystywał drzewa, ale użycie L-dowodów w tym wypadku nie wymaga stosowania żadnych dodatkowych środków dla zaznaczenia aktualnej zależności od takich czy innych założeń, ponieważ każda formuła ma zapis wszystkich założeń w poprzedniku sekwentu, którego jest następnikiem. S-system z linearnymi dowodami jest zatem linearny w sensie ścisłym, nie jest bowiem podzielony na poddowody. Oczywiście, inne formy reprezentacji dowodu, jak np. sieci dowodowe Girarda (1987), mogą być też brane pod uwagę.

Wreszcie, oprócz F- i S-systemów pojawiły się też, zwłaszcza dla potrzeb formalizacji rozmaitych logik nieklasycznych, inne warianty DN, w których reguły zdefiniowane są na innego rodzaju obiektach niż formuły czy sekwenty, np. systemy etykietowane lub systemy używające zbiorów formuł (zob. Indrzejczak 2010).

6. NORMALIZACJA I ANALITYCZNOŚĆ

Praca Gentzena leży również u podstaw nowoczesnej teorii dowodu, która bada strukturalne własności dowodów. Prawitz (1971), rozwijając intuicje Gentzena, określił ją mianem ogólnej teorii dowodu, lecz obecnie zyskuje popularność określenie „strukturalna teoria dowodu" (Negri, von Plato 2001).

Podstawowym wynikiem dla systemów DN uzyskiwanym w ramach tej teorii są twierdzenia o normalizacji dowodów. Intuicyjnie rzecz ujmując, dowód powinien być możliwie najekonomiczniejszy w tym sensie, że powinno się unikać w nim zbędnych z punktu widzenia jego celu kroków inferencyjnych. Dowody takie są analityczne w tym sensie, że jak to wyraził Gentzen: „żadne pojęcie nie pojawia się w dowodzie poza tymi, które są zawarte w końcowym rezultacie, a ich użycie było w związku z tym istotne dla osiągnięcia tego rezultatu" (Gentzen 1934-1935, 1969:

289). Innymi słowy, dowody normalne spełniają pewną wersję własności podformuł, w jednym ze znaczeń tego słowa. Przykładowo dla pewnych systemów DN adekwatnych względem zdaniowej logiki klasycznej lub intiucjonistycznej sprowadza się to do tego, że w dowodzie normalnym $X \vdash A$ każda formuła jest podformułą lub negacją podformuły A lub jakiegoś elementu X[5].

W systemie Gentzena uzyskanie tego efektu związane jest z nałożeniem warunków na kolejność stosowania reguł inferencji. Intuicyjnie rzecz ujmując, najpierw należy stosować reguły eliminacji do założeń dowodu, a następnie reguły dołączania tak, aby wydedukować wniosek. Chodzi o uniknięcie w dowodzie takich sytuacji, w których najpierw dedukujemy formułę z użyciem reguły dołączania dla stałej c, a następnie używamy jej jako przesłanki dla zastosowania reguły eliminacji dla c. Np. najpierw z A i B dedukujemy $A \wedge B$, a następnie z $A \wedge B$ ponownie dedukujemy A. Takie następstwo kroków inferencyjnych, chociaż dopuszczalne i poprawne, z pewnością wprowadza do dowodu zbędne elementy i zwiększa jego złożoność. Oczywiście, ten prosty przepis komplikuje się ze względu na korzystanie z reguł konstrukcji dowodu (zwłaszcza nie wprost). W przypadku systemu bez negacji, np. z $\wedge$ i $\rightarrow$ jako jedynymi stałymi, dowód w postaci normalnej można zdefiniować jako taki, w którym żadna formuła nie jest tzw. formułą maksymalną, czyli zarazem wnioskiem z reguły dołączania i przesłanką reguły eliminacji dla tej samej stałej.

Dowody twierdzeń o normalizacji są dość skomplikowane. Pokazują, jak z dowolnego dowodu za pomocą szeregu transformacji dokonać systematycznej eliminacji formuł maksymalnych. Gentzenowi udało się to przeprowadzić jedynie dla logiki intuicjonistycznej. Ponieważ nie był w stanie skonstruować dowodu analogicznego rezultatu dla logiki klasycznej, zrezygnował z zamieszczenia w (Gentzen 1934-1935) nawet dowodu dla intuicjonizmu. Zamiast bezpośredniego dowodu twierdzenia o normalizacji dla DN dla obu logik Gentzen wykazał go drogą pośrednią. Skonstruował rachunek sekwentów, w którym odpowiednikiem dowodów normalnych w DN są dowody bez zastosowań reguły cięcia, i pokazał, że każdy dowód w DN można przekształcić na dowód w tym rachunku. Następnie wykazał, że każdy dowód w rachunku sekwentów można przekształcić na taki dowód, w którym reguła cięcia nie występuje (twierdzenie o eliminacji cięcia). Na koniec wykazał, że każdy dowód w rachunku sekwentów bez użycia cięcia można przekształcić na dowód normalny w DN.

W latach sześćdziesiątych XX wieku bezpośrednie dowody o normalizacji zaprezentowali Raggio (1965) i Prawitz (1965), ten ostatni również dla systemów DN adekwatnych względem wielu logik nieklasycznych. Niemniej nawet w wypadku logiki klasycznej wyniki te można było uznać za niezadowalające, ponieważ dowód Prawitza jest przeprowadzony dla systemu DN z regułami dla $\wedge$, $\rightarrow$, $\bot$ i $\forall$. Biorąc pod uwagę definiowalność pozostałych stałych, można to rozwiązanie zaakceptować, próby poszukiwania dowodu dla pełnego języka trwały jednak dalej i zostały

[5] W wypadku logik nieklasycznych, np. modalnych, definicja własności podformuł często przybiera bardziej skomplikowaną postać.

uwieńczone sukcesem dopiero w pracach (Seldin 1989) i (Stålmarck 1991). Podobnie wyglądała sytuacja w wypadku wielu logik nieklasycznych.

Procedury normalizacji proponowane w dowodach omawianych wyżej twierdzeń, chociaż teoretycznie niezmiernie ważne, z praktycznego punktu widzenia (problem poszukiwania dowodów) są niezadowalające. Pokazują, jak gotowy dowód przekształcić w dowód normalny, nie pokazują jednak, w jaki sposób konstruować dowód tak, aby od początku był dowodem normalnym. Wyjątkową propozycją są tutaj badania Siega (Sieg, Byrnes 1998) nad programem CMU Proof Tutor, który pomaga konstruować dowody w postaci normalnej.

Należy też podkreślić, że dowody normalne niekoniecznie są dowodami najkrótszymi; na gruncie rachunków sekwentowych bez reguły cięcia odnotował ten fenomen Boolos (1984), ale znajduje on naturalne przełożenie na grunt DN. Poszukiwanie systemów dających „krótkie" dowody, nawet kosztem skomplikowania procedury ich poszukiwania, doprowadziło do powstania systemów łączących własności DN i systemów tablicowych, takich jak KE Mondadoriego (por. D'Agostino 1999). Wydaje się, że najważniejszą własnością „dobrego" systemu DN jest to, aby zachował jakąś formę własności podformuł; normalizacja jest zazwyczaj warunkiem wystarczającym, ale nie jest konieczna do otrzymania systemu analitycznego w tym sensie (por. Indrzejczak 2010).

7. FILOZOFIA ZNACZENIA

Rozróżnienie między regułami dołączania i eliminacji dla każdej stałej logicznej, wprowadzone przez Gentzena, miało służyć nie tylko nadaniu systemowi eleganckiego wyglądu, lecz także realizowaniu pewnych głębszych intuicji filozoficznych. Jeżeli reguły takie rzeczywiście są intuicyjne i wystarczające dla pełnego scharakteryzowania danej stałej, to naturalne wydaje się przypuszczenie, że wyrażają one nasz sposób rozumienia tej stałej. Ponadto ze względu na związek reguł z praktyką (w tym wypadku dowodzenia) można powiązać taki sposób ich postrzegania z bardziej fundamentalnym programem semantycznym, wywodzącym się od Wittgensteina, w którym znaczenie wyrażeń sprowadza się do sposobu ich użycia. W szczególności, jak głosi inferencjalizm (Brandom 2000), znaczenie stałych logicznych jest zdefiniowane przez reguły dedukcyjne kierujące ich użyciem. Teorie tego typu są również mocno powiązane ze stanowiskiem antyrealistycznym w teorii znaczenia, ponieważ obiektywne pojęcie prawdy jest tutaj zastępowane pojęciem dowodu (Dummett 1991). Obecnie różne podejścia tego typu określa się zbiorczo mianem semantyki teoriodowodowej.

Chociaż sam termin „semantyka teoriodowodowa" pojawił się stosunkowo późno (Schroeder-Heister 1991), to źródeł tego podejścia można poszukiwać już u Gentzena (1934). Sam Gentzen faworyzował reguły dołączania, które w jego przekonaniu były rodzajem definicji stałych logicznych. Reguły eliminacji były jedynie konsekwencjami tych definicji, w tym sensie, że ich zastosowanie jest niejako odwróceniem (inwersją) reguł dołączania. Nie chodzi tutaj o to, że reguły eliminacji dadzą się wyprowadzić w sensie dedukowalności z reguł dołączania, ale że te ostatnie dostarczają im w jakimś sensie uzasadnienia. Intuicje Gentzena zostały technicznie sprecyzowane przez Prawitza (1965) w pojęciu zasady inwersji, która głosi, że jeżeli w wyniku zastosowania reguły eliminacji r otrzymamy A, to dowody spełniające warunki wystarczające do dedukcji przesłanek r już zawierają dedukcję A. Zatem można bezpośrednio otrzymać A na podstawie tych dowodów bez udziału r. Te wystarczające warunki dowodu przesłanek są oczywiście podane przez reguły dołączania. Innymi słowy, dowód konkluzji zastosowania reguły eliminacji r dla stałej c może być otrzymany bez jej zastosowania, jeśli przesłanka r została wydedukowana za pomocą reguły dołączania dla c. Przykładowo, jeżeli B zostało wydedukowane za pomocą (→E) z A→B i A, ale A→B otrzymaliśmy przez zastosowanie (→D), to wcześniej B było już wydedukowane z założenia dodatkowego A, zatem można z dowodu pozbyć się zarówno dedukcji A, jak i końcowego zastosowania (→E). Nietrudno zauważyć związek zasady inwersji z omawianymi wyżej dowodami twierdzeń o normalizacji; zasada inwersji uzasadnia kroki redukcyjne służące do eliminacji formuł maksymalnych.

Nie wszyscy autorzy rozwijający jakieś wersje semantyki teoriodowodowej naśladowali Gentzena w jego konkretnych rozwiązaniach. Np. Popper (1947) jako pierwszy próbował skonstruować systemy dedukcji, których reguły łącznie dawały definicję znaczenia stałych logicznych. Dla odmiany w niektórych podejściach (np. Dummett 1991: rozdz. 13) lub późniejszych pracach Prawitza (np. 1971) za podstawowe sposoby definiowania stałych traktuje się reguły eliminacji.

Bez względu na to, które rodzaje reguł uznamy za najważniejsze dla wyrażenia znaczenia stałych logicznych, musimy zaznaczyć, że nie każdy zestaw reguł nadaje się, żeby potraktować go jako formę definicji stałej logicznej. Na problem ten jako pierwszy zwrócił uwagę Prior (1960), przytaczając słynny przykład spójnika „tonk". Przede wszystkim reguły takie muszą spełniać własność separacji, tzn. w schematach reguł występuje tylko dana stała logiczna. Spełnienie tego warunku jednak nie wystarczy. Priorowski „tonk" scharakteryzowany jest za pomocą reguły dołączania dla alternatywy oraz eliminacji dla koniunkcji, zatem spełnia warunek separacji. Jednak użycie tych reguł prowadzi do dedukcji dowolnej formuły B z dowolnej formuły A (z A dedukujemy A tonk B, z którego dedukujemy B).

Przykład podany przez Priora nie zniechęcił zwolenników semantyki teoriodowodowej, ale pokazał, że należy starannie określić warunki poprawności dla reguł, które mają aspirować do miana definicji stałych logicznych. Jedna z pierwszych odpowiedzi na problem Priora pochodzi od Belnapa (1962), który zwrócił uwagę, że reguły muszą być, podobnie jak definicje, nietwórcze w tym sensie, że ich dołączenie do danego systemu daje jego konserwatywne poszerzenie. Innymi słowy, jeżeli jakaś formuła nieposiadająca nowej stałej nie była tezą, to nie powinna dać się wydedukować z pomocą nowych reguł. Reguły dla „tonk" w oczywisty sposób nie spełniają tego warunku. Rozwiązanie Belnapa okazało się wprawdzie niewystarczające, lecz otworzyło drogę do dalszych poszukiwań. Współcześnie często stosuje się określenie „harmonia (teoriodowodowa)”[6] w odniesieniu do warunków, które powinny spełniać poprawnie skonstruowane reguły. Niestety termin ten bywa definiowany w różny i nie zawsze precyzyjny sposób.

ZAKOŃCZENIE

Trudno w krótkim szkicu wyczerpująco omówić bogatą problematykę, która rozwinęła się po publikacji przełomowych prac Jaśkowskiego i Gentzena. Omawiając problematykę teoretyczną, należałoby wskazać na powiązania teorii dowodów DN z rachunkiem lambda za pomocą tzw. izomorfizmu Curry'ego–Howarda. Z kolei praktyczne zastosowania DN doprowadziły do skonstruowania wielu programów automatycznego dowodzenia (tzw. *provery*) i wspierających w poszukiwaniu dowodu (typu *checker* lub *proof assistant*), które znakomicie sprawdzają się jako pomoc dydaktyczna w nauczaniu logiki. Wspomnieć tu można chociażby o rodzimym programie MIZAR stworzonym przez Andrzeja Trybulca, cieszącym się dużym uznaniem w środowisku międzynarodowym. Dokładniejsze omówienie problematyki DN znaleźć można m.in. w (Pelletier, Hazen 2013) oraz (Indrzejczak 2010). Podsumowując, w wielkim uproszczeniu możemy powiedzieć, że praca Jaśkowskiego wywarła ogromny wpływ na rozwój praktycznie stosowanych systemów DN, natomiast praca Gentzena przede wszystkim na rozwój badań teoretycznych z zakresu nowoczesnej teorii dowodu.

BIBLIOGRAFIA

Anderson A., Belnap N. (1975), *Entailment*, t. 1, Princeton (NJ): Princeton University Press.

Anellis I. H. (1991), *Forty Years of "Unnatural" Natural Deduction and Quantification. A History of First-Order Systems of Natural Deduction from Gentzen to Copi*, „Modern Logic” 2(2), 113-152.

Barth E. M., Krabbe E. C. (1982), *From Axiom to Dialogue*, Berlin: Walter de Gruyter.

Belnap N. D. (1962), *Tonk, Plonk and Plink*, „Analysis” 22(6), 130-134.

Beth E. (1962), *Formal Methods*, Dordrecht: Reidel.

Boolos G. (1984), *Don't Eliminate Cut*, „Journal of Philosophical Logic” 13(4), 373-378.

Brandom R. (2000), *Articulating Reasons. An Introduction to Inferentialism*, Cambridge (MA): Harvard University Press.

Corcoran J. (1972), *Aristotle's Natural Deduction System* [w:] *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*, J. Corcoran (red.), Dordrecht: Reidel, 85-131.

D'Agostino M. (1999), *Tableau Methods for Classical Propositional Logic* [w:] *Handbook of Tableau Methods,* M. D'Agostino (red.), Dordrecht: Kluwer.

Dummett M. (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge (MA): Harvard University Press.

[6] Termin pochodzi zapewne z pracy Tennanta z 1978.

Fitch F. (1952), *Symbolic Logic*, New York (NY): Ronald Press.

Gentzen G. (1934-1935), *Untersuchungen über das Logische Schließen*, I i II, „Mathematische Zeitschrift" 39(2), 176-210 i 39(3), 405-431.

Gentzen G. (1936), *Die Widerspruchsfreiheit der Reinen Zahlentheorie*, „Mathematische Annalen" 112, 493-565.

Gentzen G. (1969), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, M. Szabo (red.), Amsterdam: North-Holland.

Girard J. (1987), *Proof Theory and Logical Complexity*, Napoli: Bibliopolis.

Hasenjaeger G. (1962), *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der Modernen Logik*, Freiburg: K. Alber.

Hazen A., Pelletier J. (2012), *Natural Deduction* [w:] *Handbook of the History of Logic*, t. 11, D. Gabbay, F. J. Pelletier, J. Woods (red.), Amsterdam: Elsevier.

Herbrand J. (1928), *Abstracts* [w:] *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. 186, Paris: Gauthier-Villars, 1275.

Herbrand J. (1930), *Recherches sur la théorie de la démonstration* [w:] *Travaux de la Société des sciences et des lettres de Varsovie*, Warszawa: Towarzystwo Naukowe Warszawskie.

Hermes H. (1963), *Einführung in die Mathematische Logik*, Stuttgart: Teubner.

Indrzejczak A. (2009), *Suszko's Contribution to the Theory of Nonaxiomatic Proof Systems*, „Bulletin of the Section of Logic" 38(3-4), 151-162.

Indrzejczak A. (2010), *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*, Dordrecht: Springer.

Jaśkowski S. (1929), *Teoria dedukcji oparta na dyrektywach założeniowych* [w:] *Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, Lwów, 7-10. IX. 1927*, Kraków: Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Jaśkowski S. (1934), *On the Rules of Suppositions in Formal Logic*, „Studia Logica" 1, 5-32.

Kalish D., Montague R. (1964), *Logic*, New York (NY): Harcourt, Brace and World.

Kneale W., Kneale M. (1962), *The Development of Logic*, Oxford: Clarendon Press.

Lemmon E. (1965), *Beginning Logic*, London: Nelson.

Łukasiewicz J. (1951), *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Logic*, Oxford: Clarendon Press.

Marciszewski W. (1987), *Dedukcja naturalna* [w:] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, W. Marciszewski (red.), Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Mates B. (1953), *Stoic Logic*, Berkeley (CA): University of California Press.

Negri S., von Plato J. (2001), *Structural Proof Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

Pelletier J. F. (1999), *A Brief History of Natural Deduction*, „History and Philosophy of Logic" 20(1), 1-31.

Popper K. (1947), *New Foundations for Logic*, „Mind" 56(223), 193-235.

Prawitz D. (1965), *Natural Deduction*, Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Prawitz D. (1971), *Ideas and Results in Proof Theory* [w:] *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, J. E. Fenstad (red.), Amsterdam: North-Holland.

Prior A. (1960), *The Runabout Inference Ticket*, „Analysis" 21(2), 38-39.

Raggio A. (1965), *Gentzen's Hauptsatz for the Systems NI and NK*, „Logique et Analyse" 8, 91-100.

Rieger L. (1967), *Algebraic Methods of Mathematical Logic*, Prague: Academia.

Schroeder-Heister P. (1991), *Uniform Proof-Theoretic Semantics for Logical Constants (Abstract)*, „Journal of Symbolic Logic" 56, 1142.

Schroeder-Heister P. (2013), *Proof-Theoretic Semantics* [w:] *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2014 Edition)*, E. N. Zalta (red.), forthcoming URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/proof-theoretic-semantics/>.

Seldin J. (1989), *Normalization and Excluded Middle*, „Studia Logica" 48, 193-217.

Sieg W., Byrnes J. (1998), *Normal Natural Deduction Proofs*, „Studia Logica" 60, 67-106.

Słupecki J., Borkowski L. (1958), *A Logical System Based on Rules and Its Applications in Teaching Mathematical Logic*, „Studia Logica" 7, 71-113.

Stålmarck G. (1991), *Normalization Theorems for Full First Order Classical Natural Deduction*, „Journal of Symbolic Logic" 56(1), 129-149.

Suppes P. (1957), *Introduction to Logic*, Princeton (NJ): Princeton University Press.

Suszko R. (1948), *W sprawie logiki bez aksjomatów*, „Kwartalnik Filozoficzny" 17, 199-205.

Tarski A. (1930), *Fundamentale Begriffe der Methodologie der Deduktiven Wissenschaften*, „Monatshefte für Mathematik und Physik" 37(1), 361-404.

Tennant N. (1978), *Natural Logic*, Edinburgh: Edinburgh University Press.