Filozofia Nauki
Rok XXIV, 2016, Nr 2(94)

Michał Heller

Teoria kategorii, logika i filozofia

Co najmniej od czasów Arystotelesa logika była uważana za narzędzie (*organon*) filozofii i jako takie narzędzie była rozwijana. Dopiero w XIX wieku zaczęła się usamodzielniać, zakreślając własne obszary badawcze. Coraz pełniej stawała się narzędziem sama dla siebie. Powodowało to — na zasadzie samonapędu — coraz gwałtowniejszy rozwój, a stosowanie wyrafinowanych formalizmów zaczęło upodabniać logikę do matematyki, która — równolegle — stawała się coraz bardziej abstrakcyjna. Zwłaszcza w badaniach dotyczących podstaw matematyki i filozofii logiki trudno było ograniczać się tylko do jednej z tych dyscyplin. Jednak zupełnie nową jakość do wzajemnych stosunków logiki i matematyki wprowadziło powstanie matematycznej teorii kategorii.

Początkowo nic na to nie wskazywało. Samuel Eilenberg i Saunders Mac Lane (1945) w swojej założycielskiej pracy na temat tego, co potem nazwano teorią kategorii, ograniczyli się do raczej technicznych zagadnień dotyczących definicji funktora i przekształceń naturalnych oraz pewnych zagadnień wyrosłych głównie z topologii algebraicznej. Wkrótce okazało się jednak, że praca zawierała zalążki przyszłej dziedziny. Kilkanaście lat później fundamentalne wyniki uzyskane przez Daniela Kana (1958) i Williama Lawvere'a (1963) ukazały znaczenie teorii kategorii dla całej matematyki i otworzyły ją na pozamatematyczne, w tym także filozoficzne, zastosowania.

Dziś dobrze już wiadomo, że teoria kategorii ma wielką moc unifikacyjną: łączy algebrę, geometrię i logikę (Mac Lane, Moerdijk 1992). I nie jest to połączenie na zasadzie porównania, analogii lub przekładu, lecz sama ta struktura ma równocześnie aspekt algebraiczny, geometryczny i logiczny. W szczególności logika nie jest czymś, co z metapoziomu stosuje się do danej kategorii, lecz stanowi „wewnętrzną część" jej struktury. Ponieważ pojęcie kategorii jest tak pojemne, że do postaci kategorii można zorganizować bardzo wiele dziedzin (niemal wszystko), stawia to logikę w zupełnie nowym świetle.

Celem artykułu jest zasygnalizowanie — tylko zasygnalizowanie — roli, jaką teoria kategorii może pełnić w stosunku do filozofii, i próba przekonania filozofów, że warto się tym problemem poważniej zająć. Stawka jest duża, ponieważ chodzi o to, jakiej logiki należy używać, mierząc się z różnymi zagadnieniami filozoficznymi. A od tego zależy poprawność rozumowań i uzasadnienie wyciąganych wniosków.

Ażeby moje wprowadzenie spełniło swoje zadanie, należy jeszcze powiedzieć, co rozumiemy przez kategorię.

Kategoria składa się z obiektów: A, B, C, … i strzałek (zwanych również morfizmami) z jednego obiektu do drugiego, na przykład $f : A \to B$ (co zapisujemy również $A \xrightarrow{f} B$). A nazywa się dziedziną, B — kodziedziną strzałki f. Jeżeli mamy również strzałkę $g : B \to C$, to strzałki f i g można złożyć, otrzymując $g \circ f : A \to C$. Składanie jest łączne, tzn. jeżeli $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Istnieją też strzałki identycznościowe, na przykład $\mathbf{1}_A : A \to A$, mające tę własność, że złożenie strzałki identycznościowej z jakąkolwiek inną strzałką, z którą daje się ona złożyć, jest równe tej strzałce. Co istotne, obiekty nie muszą być i często nie są zbiorami, strzałki nie muszą być i często nie są funkcjami między zbiorami. Zapewnia to ogromną pojemność pojęciu kategorii.

Z naciskiem podkreślam, że tak skrótowe omówienie nie może oczywiście zastąpić dogłębnego i popartego wieloma przykładami przyswojenia sobie definicji kategorii. Dotyczy to również innych pojęć z teorii kategorii, do których będę się odwoływał. Dla tych, którzy chcieliby zapoznać się z podstawami teorii kategorii, zamieszczam na końcu tekstu kilka wskazówek dotyczących dalszej lektury.

Artykuł jest zorganizowany w następujący sposób: w części 1 przedstawiam elementarne wiadomości na temat związków między teorią kategorii a logiką. W części 2 przyglądam się bliżej miejscu logiki intuicjonistycznej i parakonsystentnej w teorii kategorii. W części 3 zastanawiam się, jaką logikę, względnie jakie logiki, zakładają teorie matematyczne i teorie fizyczne oraz jakiej logiki, względnie jakich logik, należy używać do analizowania tych teorii. W części 4 nawiązuję do dyskusji na temat pluralizmu logik. Wreszcie, w części 5 sygnalizuję filozoficzne implikacje przeprowadzonych rozważań.

1. TEORIA KATEGORII I LOGIKA

Jak wiadomo, zachodzi ścisła odpowiedniość między spójnikami logiki klasycznej (koniunkcja, alternatywa, negacja, implikacja) a podstawowymi działaniami teorii zbiorów (iloczyn, suma, dopełnienie, zawieranie się). Zbiór potęgowy $\mathcal{P}(D)$, czyli zbiór wszystkich podzbiorów zbioru D, wraz z odpowiednimi działaniami spełniającymi znane warunki tworzy strukturę zwaną algebrą Boole'a. Jest to algebraiczny odpowiednik logiki klasycznej.

Jak łatwo się przekonać, zbiory jako obiekty i funkcje między zbiorami jako morfizmy tworzą kategorię. Okazuje się, że działania teorii zbiorów, a co za tym idzie i spójniki logiczne, można zdefiniować w języku teorii kategorii jako pewne własności uniwersalne. Istnienie tej możliwości zawiera się w jednej z własności definicyjnych klasy kategorii zwanej toposami (chodzi o istnienie tzw. klasyfikatora podobiektów, por. dalej). Prowadzi to do pewnej „algebry podobiektów" danego toposu. W kategorii zbiorów i funkcji między zbiorami algebra ta jest algebrą Boole'a, czyli w kategorii tej obowiązuje logika klasyczna. W ogólnym przypadku jednak wcale tak być nie musi i na ogół tak nie jest. Dla toposów jest to z zasady logika intuicjonistyczna, w której nie musi obowiązywać zasada wyłączonego środka.

Przyjrzyjmy się temu nieco dokładniej. W standardowej teorii mnogości zbiory składają się z elementów. W teorii kategorii odpowiednikiem elementu danego obiektu jest strzałka (morfizm), która kończy się na tym obiekcie (obiekt ten jest jego kodziedziną). Taką strzałkę nazywa się uogólnionym elementem obiektu. Uogólniony element może zaczynać się w różnych obiektach (może mieć różne dziedziny). Tego rodzaju dziedzinę nazywa się sceną (*stage*) uogólnionego elementu. Uogólniony element danego obiektu jest więc zdefiniowany nie w sensie absolutnym, lecz tak, jak jest „widziany" z perspektywy swojej sceny. Dwie strzałki mające tę samą kodziedzinę, lecz różne dziedziny definiują dwa różne elementy danego obiektu.

W wielu kategoriach istnieje tzw. obiekt końcowy. Obiekt nazywamy końcowym (zwykle oznacza się go przez **1**), jeżeli z każdego obiektu danej kategorii prowadzi do niego jedna i tylko jedna strzałka. Można pokazać, że jeżeli dziedziną uogólnionego elementu jakiegoś obiektu jest obiekt końcowy, to element ten jest z każdego innego obiektu „widziany" tak samo. Takie uogólnione elementy nazywamy elementami globalnymi. W kategorii, która ma obiekt końcowy, pewne obiekty mogą mieć elementy globalne, a pewne nie. Co więcej, nawet nie wszystkie elementy tego samego obiektu muszą być globalne.

Zauważmy, że jedynie w wypadku elementu globalnego możemy jednoznacznie rozstrzygnąć, czy jest on elementem danego obiektu, czy nie. Logika klasyczna obowiązuje tylko w przypadku obiektów, których wszystkie elementy są globalne. W takiej sytuacji obowiązuje zasada wyłączonego środka: element albo jest elementem danego obiektu, albo nie. Element, który nie jest globalny, może należeć do danego obiektu z perspektywy pewnego obiektu, a nie należeć z pespektywy innego obiektu. Jest to sygnał, że mamy do czynienia z logiką nieklasyczną.

W kategoriach, które mają obiekt końcowy (tak jest we wszystkich toposach), istnieje mechanizm pozwalający określić, jaka logika obowiązuje w danej kategorii. Istotną rolę w tym mechanizmie spełnia tzw. klasyfikator podobiektów. W teorii kategorii również podobiekty obiektów są wyznaczane przez strzałki. Klasyfikator podobiektów (*subobject classifier*) to obiekt danej kategorii, zwyczajowo oznaczany przez Ω, wraz ze strzałką $\top : \mathbf{1} \to \Omega$; strzałka ta nazywa się strzałką prawdziwościową (*truth arrow*). Ponieważ z każdego podobiektu jakiegoś obiektu rozważanej kategorii do obiektu końcowego **1** prowadzi dokładnie jedna strzałka, a z obiektu końcowego do klasyfikatora Ω prowadzi strzałka $\top$, to klasyfikator Ω kontroluje wszystkie podobiekty rozważanej kategorii i wszystkie „strzałki zawierania się" między nimi (zawieranie podobiektów jednych w drugich, czyli odpowiednia strzałka, również zależy od swojej sceny). Dzięki temu mechanizmowi elementy klasyfikatora podobiektów Ω są wartościami logicznymi logiki obowiązującej w danej kategorii. Oczywiście, klasyfikator podobiektów w kategorii zbiorów ma dwie wartości logiczne, czyli $\Omega = \{\text{prawda, fałsz}\}$. Jest to jednak raczej wyjątek niż reguła[1].

Następnym etapem budowania systemu logiki jest konstrukcja języka formalnego. Czyni się to w dwu etapach: najpierw sformułowanie alfabetu, czyli listy dopuszczalnych symboli, a następnie sformułowanie reguł konstrukcji (reguł syntaktycznych), które określają, w jaki sposób należy łączyć symbole alfabetu, aby tworzyły dopuszczalne formuły, czyli zdania danego języka. Logiczną teorię znaczenia, czyli semantykę, tworzymy, przypisując zdaniom rozważanego języka formalnego pewną wartość logiczną. Dysponując językiem formalnym i jego semantyką, możemy wyróżnić pewne zdania jako aksjomaty, sformułować reguły dowodzenia i budować system formalny, wyprowadzając twierdzenia z aksjomatów za pomocą ustalonych reguł dowodzenia.

To wszystko można powtórzyć w języku algebraicznym. Semantykę określa się wówczas, przypisując wyrażeniom danej algebry wartości logiczne (w przypadku logiki klasycznej odpowiednią algebrą jest algebra Boole'a — por. Rasiowa, Sikorski 1963). Tu właśnie znajduje się newralgiczny punkt, w którym ujawniają się istotne związki łączące logikę z teorią kategorii. Jak widzieliśmy, podobiekty danej kategorii i strzałki między nimi tworzą algebraiczną strukturę, którą można zinterpretować jako strukturę logiczną. Funkcje prawdziwościowe są wówczas zdefiniowane za pomocą strzałek. Zrekonstruowana w ten sposób logika nie jest logiką narzuconą danej kategorii z zewnątrz, lecz logiką, według której dana kategoria funkcjonuje, czyli jest to jej wewnętrzna logika. Jak wspomniałem, wcale nie musi to być logika klasyczna.

Ten związek między logiką a teorią kategorii zasługuje na dokładniejszy komentarz. W tradycyjnym podejściu mamy z góry przyjęty, z powodów filozoficznych lub jakichkolwiek innych, klasyczny rachunek zdań i możemy traktować teorię zbiorów jako źródło semantyki dla tego rachunku, tzn. możemy przypisywać zdaniom rachunku wartości logiczne na podstawie tego, czy dane zdanie „sprawdza się" w teorii mnogości, czy nie. Jak wiadomo, istnieje w tym celu specjalna procedura. Zamiast teorii zbiorów w jej zwykłym ujęciu możemy do tej strategii użyć kategorii zbiorów będącej częścią teorii kategorii. Jak widzieliśmy jednak, teoria kategorii narzuca inną perspektywę: nakazuje przyjąć kategorię zbiorów jako wyjściową strukturę i zrekonstruować logikę (w tym wypadku klasyczny rachunek zdań) jako część lub aspekt tej struktury.

Ta zmiana perspektywy rozszerza horyzonty, ponieważ może być zastosowana nie tylko do kategorii zbiorów, lecz także do wielu innych kategorii, w tym do wszyst-

[1] Jeszcze raz przestrzegam osoby, które nie miały dotychczas bliższego kontaktu z teorią kategorii, że nie można poprzestać na tym opisie. Ma on raczej charakter propagandy na rzecz tezy o związku logiki z teorią kategorii niż rzeczywistego wyjaśnienia tego związku.

kich toposów. Rozważmy jedną z takich kategorii. Oznaczmy ją przez $\mathcal{C}$. Wyznacza ona swoją własną logikę — będziemy ją nazywać wewnętrzną logiką kategorii $\mathcal{C}$ lub jej wewnętrznym rachunkiem zdań. Takiemu rachunkowi logicznemu odpowiada pewien język formalny L i każda formuła dowodliwa w języku L może być dowiedziona przy użyciu tylko logiki wewnętrznej kategorii $\mathcal{C}$ (twierdzenie o adekwatności, *soundness theorem*). Innymi słowy, kategoria $\mathcal{C}$ jest semantyką dla języka L. Semantyka ta ma wszystkie własności zwykłej semantyki (w sensie Tarskiego), ale ponadto jeszcze i inne, na przykład określa wartości logiczne obowiązujące dla języka L. Co więcej, istnieją kategorie, w których znika różnica między $\mathcal{C}$ i L — kategorie takie nazywa się syntaktycznymi (Rodin 2007).

2. LOGIKA INTUICJONISTYCZNA I PARAKONSYSTENTNA

Po tych ogólnych rozważaniach przejdźmy do kilku przykładów. Powiedzieliśmy, że dla toposów logiką wewnętrzną jest na ogół logika intuicjonistyczna. W logice tej, jak wiadomo, nie obowiązuje zasada wyłączonego środka. Podobnie jak zbiór potęgowy $\mathcal{P}(D)$ ma strukturę algebry Boole'a i jest modelem klasycznego rachunku zdań, tak też modelem rachunku zdań logiki intuicjonistycznej jest zbiór $\mathcal{O}(X)$ wszystkich podzbiorów otwartych pewnej przestrzeni topologicznej X. Zbiór ten ma strukturę algebry Heytinga.

Podobnie jak w wypadku logiki klasycznej, koniunkcji odpowiada przecięcie zbiorów otwartych, a alternatywie ich suma. Dopełnienie zbioru otwartego nie może jednak odpowiadać negacji, ponieważ nie jest ono zbiorem otwartym. Naturalnym sposobem zaradzenia tej sytuacji jest przypisanie negacji zdania p operacji wnętrza dopełnienia zbioru otwartego U_p, odpowiadającego zdaniu p, czyli

$$\neg p \to \mathrm{Int}C_X(U_p),$$

gdzie $C_X(U_p) := X - U_p$. Wówczas zasadę wyłączonego środka można zapisać jako

$$U_p \cup \mathrm{Int}C_X(U_p).$$

Zbiór ten nie pokrywa się z przestrzenią topologiczną X, co oznacza, że zasada wyłączonego środka nie jest tautologią intuicjonistycznego rachunku zdań.

Ten model intuicjonistycznego rachunku zdań odgrywa ważną rolę w teorii kategorii, ponieważ jest częścią definicji bardzo ogólnej kategorii zwanej kategorią snopów. Kategoria ta jest toposem i ma istotne znaczenie w teorii toposów. Wewnętrzną logiką tej kategorii jest logika intuicjonistyczna (Goldblatt 2006: rozdz. 15).

Rozpatrzmy inny, wręcz narzucający się przykład. Drugą ważną zasadą, oprócz zasady wyłączonego środka, jest zasada niesprzeczności. Logiką, w której ta zasada nie obowiązuje, jest logika parakonsystentna. Okazuje się, że modelem parakonsystentnego rachunku zdań jest zbiór $\mathrm{Cl}(X)$ podzbiorów domkniętych pewnej przestrzeni topologicznej X. Zbiór ten ma strukturę algebry ko-Heytinga (*co-Heyting al-*

gebra), zwanej również algebrą Brouwera. I w tym wypadku koniunkcji odpowiada przecięcie zbiorów domkniętych, a alternatywie suma zbiorów domkniętych, negacji zdania p odpowiada natomiast domknięcie dopełnienia zbioru domkniętego W_p, odpowiadającego zdaniu p, czyli:

$$\neg p \to \overline{C_X(W_p)}.$$

Zasada sprzeczności wyraża się więc wzorem:

$$W_p \cap \overline{C_X(W_p)}.$$

W klasycznym rachunku zdań obowiązuje tzw. zasada Dunsa Szkota, która stwierdza, że ze sprzeczności wynika cokolwiek (*ex contradictione quodlibet*). Na mocy tej zasady przyjęcie sprzeczności powodowałoby „przepełnienie" systemu, czyli „rozlanie się" sprzeczności na cały system. W logice parakonsystentnej to nie następuje.

Pokażmy to na przykładzie. Niech przestrzenią topologiczną X będzie prosta rzeczywista $\mathbf{R}$ (z naturalną topologią) i niech zdaniu p odpowiada podzbiór domknięty $[0, 1] \subset \mathbf{R}$. Otrzymujemy oczywiście:

$$W_p \cap \overline{C_X(W_p)} = \{0\} \cup \{1\}.$$

To, że zbiór ten nie jest pusty, oznacza, iż w parakonsystentnym rachunku zdań zasada niesprzeczności nie jest tautologią. Nie prowadzi to jednak do przepełnienia systemu, ponieważ sprzeczność jest „uwięziona" w zbiorze brzegowym $\{0\} \cup \{1\}$.

Można pokazać, że algebra ko-Heytinga jest — jak sama jej nazwa wskazuje — dualna (w ściśle określonym sensie) do algebry Heytinga (Estrada-González 2010), a co za tym idzie, że parakonsystentny rachunek zdań należy uznać za dualny w stosunku do intuicjonistycznego rachunku zdań. Dualizm ten wskazuje, że powinna istnieć kategoria dualna w stosunku do kategorii snopów. Istotnie, — taka kategoria istnieje i nazywa się kategorią ko-snopów (Antoine, Lambert, Trapani 2011). Ich wewnętrzną logiką jest logika parakonsystentna.

3. LOGIKA DLA MATEMATYKI I FIZYKI

Cała matematyka tworzy pewnego rodzaju autonomiczną rzeczywistość. Nie musi się tego rozumieć ani w sensie matematycznego platonizmu, ani w sensie konstruktywizmu. Matematyczna rzeczywistość to po prostu *univers du discourse* matematyki. Samą matematykę (tak jak jest ona uprawiana przez matematyków) można uznać za opis tej rzeczywistości, a twierdzenia matematyczne za prawa nią rządzące. Teoria kategorii zajmuje szczególne miejsce w tak rozumianej matematyce, ponieważ daje jej „ogólne ustrukturalizowanie". Różnym strukturom matematycznym można nadać postać kategorii, dzięki czemu da się ustalić nietrywialne zależności funktorialne między nawet bardzo odległymi od siebie działami matematyki.

Fizyka dziedziczy to podejście po matematyce. Każda większa teoria fizyczna superweniuje na pewnym obszarze matematycznego *univers du discourse*, a co za tym idzie na pewnej kategorii (lub kategoriach), która temu obszarowi odpowiada. Nie jest przy tym istotne, czy tę kategorię (te kategorie) potrafimy obecnie *explicite* zrekonstruować; dla dalszych wywodów ważne jest tylko, że taka możliwość w zasadzie istnieje. Dynamicznie rozwijający się program kategoryfikacji fizyki zmierza w kierunku rzeczywistego przeprowadzenia tego rodzaju rekonstrukcji dla różnych teorii fizycznych (por. Baez, Dolan 1998).

Jak widzieliśmy w poprzednich częściach, kategorie mają swoje wewnętrzne logiki. Oznacza to, że różne struktury matematyczne (interpretowane jako kategorie) i superweniujące na nich teorie fizyczne „uczestniczą" w tych logikach. Mówiąc inaczej, logiki te rządzą wynikaniem wewnątrz tych struktur matematycznych i odpowiadających im teorii fizycznych. Na przykład, od dawna wiadomo, że logiką właściwą dla mechaniki kwantowej jest nie tyle logika klasyczna, ile tzw. logika kwantowa. Nie jest jednak oczywiście niespodzianką, że wielkie obszary fizyki odpowiadają kategoriom, dla których logikę wewnętrzną stanowi logika klasyczna.

Logikę w sensie tradycyjnym, tzn. taką, jaka dotychczas jest uprawiana przez profesjonalnych logików i filozofów, można uważać za teorię (lub zbiór teorii) różnego typu rozumowań. Ludzkie myślenie wyewoluowało w świecie makroskopowym i nic dziwnego, że logika naszych wnioskowań odpowiada logice wewnętrznej tych kategorii, które leżą u podstaw fizyki klasycznej. Inne systemy logiczne tworzy się przez odpowiednie manipulowanie prawami logiki klasycznej, np. przez zaprzeczanie lub modyfikowanie niektórych jej aksjomatów.

Nie podlega więc raczej dyskusji, że do analiz bardziej wyrafinowanych teorii fizycznych, czyli takich, w stosunku do których możemy przypuszczać, iż ich wewnętrzną logiką nie jest logika klasyczna, nie powinniśmy *a priori* wykorzystywać instrumentarium logiki klasycznej. Pierwszym krokiem analizy takiej teorii powinno być zrekonstruowanie jej logiki wewnętrznej. I to właśnie takiej logiki należy używać do (filozoficznych) analiz tej teorii.

4. CZY ISTNIEJE LOGIKA UNIWERSALNA?

Ostatnie zdanie poprzedniej części wymaga głębszego namysłu. Jak podkreśla Stewart Shapiro (2014: 176), „należy odróżnić logikę danej teorii matematycznej od logiki leżącej u podstaw filozoficznego dyskursu stosowanego do analizowania tej teorii". Dotychczas w tego rodzaju filozoficznych dyskursach instynktownie wykorzystywano logikę klasyczną i często uzyskiwano tą drogą wartościowe wyniki. Fakt ten nie dziwi, ponieważ dla ogromnej części standardowej matematyki podstaw dostarcza teoria mnogości, a jej wewnętrzną logiką jest logika klasyczna. Także stosowanie klasycznych logik do nieklasycznych teorii matematycznych może dawać poprawne wyniki, ponieważ wiele praw logiki klasycznej zachowuje ważność w logikach nieklasycznych. Trzeba także podkreślić, że często tego rodzaju „filozoficzne dyskursy” teorii matematycznych przebiegają na poziomie intuicyjnym, a logiki nieklasyczne na ogół nie są intuicyjne i dlatego potrzeba ścisłych środków formalnych, aby ujawniła się nieskuteczność lub wręcz szkodliwość (prowadząca do błędów) stosowania niewłaściwej logiki.

W związku z tym pojawia się problem. Przypomniane przez Shapira rozróżnienie między logiką danej teorii a logiką dyskursu dotyczącego tej teorii w gruncie rzeczy sprowadza się do rozróżnienia między logiką a metalogiką (analogicznego do rozróżnienia język przedmiotowy — metajęzyk). Jeżeli metalogika powinna być dostosowana do logiki, to czy istnieje jakaś „ostateczna logika”, której podporządkowana byłaby cała hierarchia meta, meta-meta, meta-meta-meta… logik? Pytanie to w różnych sformułowaniach jest przedmiotem toczącej się wśród logików i filozofów dyskusji na temat pluralizmu logik. Spór toczy się o to, czy istnieje jedna nadlogika, czy też istnieje wiele, niesprowadzalnych do siebie logik (por. Czernecka-Rej 2014).

Zagadnienie to w odniesieniu do logik stosowanych do badania podstaw matematyki podejmuje Shapiro. Uważa on, że „istnieje przynajmniej postulat jednej areny, na której znajdowałyby swoje miejsce wszystkie obiekty matematyczne, klasyczne lub nieklasyczne”. Na tej arenie występowałyby obok siebie różne teorie matematyczne, które mogłyby być ze sobą porównywane „bez względu na to, jaka logika leży u ich podstaw” (Shapiro 2014: 179). Tego rodzaju porównywanie matematycznych teorii musi posługiwać się jakąś logiką. Jaka to logika? Czy jest tylko jedna? Shapiro dość obszernie analizuje te pytania. Pozostając jednak na poziomie takich określeń, jak wcześniej użyte przeze mnie *univers du discourse* czy Shapira „arena matematycznych teorii”, nie można wyjść poza intuicyjne argumenty i hipotezy o różnej wartości. Jeżeli jednak rozważać to zagadnienie, wykorzystując teorię kategorii, to pytania te można uściślić i osiągać przynajmniej częściowe wyniki. Istnieje ciekawa propozycja pochodząca od Johna L. Bella (1986), która wykracza poza same intuicje, choć jest jeszcze dość odległa od ostatecznego sformułowania. Zgodnie z tą koncepcją teorię zbiorów, na której — zgodnie z poglądem standardowym — ma być ufundowana cała matematyka, winno się zastąpić odpowiednimi toposami (wyposażonymi w obiekty liczb naturalnych). W ten sposób pojęcia występujące w matematyce nie będą miały „absolutnego znaczenia”, lecz jedynie znaczenie określone względem danego toposu. Ponieważ każdy topos ma swoją wewnętrzną logikę, logika staje się wewnętrznym elementem całej strategii, zmieniającym się w zależności od rozpatrywanej struktury odnoszonej do danego toposu (strategię tę można stosować do fizyki, por. Król 2006).

Potraktowanie tych idei w całej ogólności nie obejdzie się bez odwołania do *n*-kategorii (Cheng 2000), a także do dyskusyjnej kategorii wszystkich kategorii (Lawvere 1966: 1-21, McLarty 1991: 1243-1260). Jest to droga trudna, która nie wróży szybkich rezultatów. Filozoficzny wniosek wypływający z tych rozważań jest już jednak istotny: trzeba się przynajmniej liczyć z tym, że logika klasyczna nie musi być uniwersalnym narzędziem wszystkich rozumowań.

5. APOFATYZM FILOZOFICZNY

Powiedzieliśmy, że logiką naszych rozumowań jest logika klasyczna. Czy jednak we wszystkich dziedzinach? Jeżeli niektóre obszary świata (jak uczy przykład mechaniki kwantowej) rządzą się inną logiką niż klasyczna, to czy nie należy brać pod uwagę ewentualności, że pewne fundamentalne dziedziny filozofii (pomyślmy o metafizyce czy o podstawowych zagadnieniach ontologii), przynajmniej w niektórych swoich aspektach, wykraczają poza możliwości logiki klasycznej? Czy nie jest naiwnością przekonanie, że nasze zdolności wyciągania wniosków zachowują swoją ważność w obszarach poznawczo odległych od sfery naszych doświadczeń? Przykład logiki parakonsystentnej świadczy o tym, że nawet zasada niesprzeczności, za pomocą której tak chętnie rozstrzygamy najtrudniejsze zagadnienia metafizyczne (podnosimy ją nawet do rangi zasady ontologicznej), może w precyzyjny sposób zostać „odwołana”, nie powodując przy tym logicznego kolapsu całości.

Innymi słowy, trzeba brać pod uwagę, że w odniesieniu do niektórych zagadnień właściwą postawą jest pewnego rodzaju apofatyzm filozoficzny. Apofatyzm, ale nie rezygnacja z poznania. Filozofia mogłaby się tu czegoś nauczyć od teologii. Teologowie od początku wiedzieli, że są bezsilni wobec „logiki Boga”, ale nie ustawali w zmaganiach z tym, co „wykracza poza”.

Oczywiście, musimy pamiętać, że w wielu „filozoficznych obszarach” logika klasyczna sprawuje się dobrze i nie ma podstaw, by sądzić, że powinna tam ustąpić miejsca jakiejś innej logice.

Apofatyzmu filozoficznego, o którym piszę, nie należy traktować jako rezygnacji, lecz jako osiągnięcie. Wielkim krokiem naprzód jest zrozumienie, że różnymi obszarami rzeczywistości mogą rządzić różne logiki i w wielu (bardzo szczególnych i filozoficznie niekoniecznie ciekawych) przypadkach zrekonstruowanie „innych logik” dzięki teorii kategorii okazało się możliwe. To oczywiście tylko początek drogi.

DODATEK: KILKA UWAG DOTYCZĄCYCH DALSZEJ LEKTURY

Artykuł ten jest adresowany głównie do filozofów. Dla tych z nich, którzy dotychczas nie zawarli bliższej znajomości z teorią kategorii, może on stanowić trudną lekturę. Jest wprawdzie, mam nadzieję, „samozwarty” w tym sensie, że zawiera definicje (lub w miarę przystępne wyjaśnienia) wszystkich pojęć niezbędnych do uchwycenia głównego wątku, lecz fakt, że język teorii kategorii i zakładany przez nią sposób myślenia są odmienne od tego, co było przyjęte w dotychczasowej matematyce, na pewno nie ułatwia zadania. Dorzucenie do tekstu garści dodatkowych wyjaśnień nie zmieniłoby znacząco sytuacji. Dlatego też załączam kilka sugestii dotyczących dalszej lektury, która mogłaby pomóc w poznaniu podstaw teorii kategorii.

Za bardzo przystępne wprowadzenie do teorii kategorii uchodzi:

F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel, *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge 2009.

Książka ta jest istotnie „pierwszym wprowadzeniem", zakłada bowiem bardzo elementarne przygotowanie matematyczne, ale prowadzi krok po kroku do dosyć zaawansowanej znajomości teorii kategorii. Powoduje to, że książka jest znacznej objętości (390 stron). Dlatego mniej cierpliwym polecam:

Harold Simmons, *An Introduction to Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 2011.

Dydaktycznie jest bardzo zgrabnie napisana. Zawiera dużą liczbę dobrze dobranych ćwiczeń. Również dobrą opinią cieszy się podręcznik:

Tom Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 2014.

Ponadto w Internecie znajduje się znaczna liczba rozmaitych materiałów przygotowanych przez wykładowców na potrzeby kursów uniwersyteckich. Niektóre z nich są bardzo dobre. Na przykład:

Eugenia L. Cheng, *Category Theory*, http://goo.gl/bNOiqS.

Jest to zwarty, elegancki i przystępny wykład. Polecam też skrypt:

Ryszard Kostecki, *An Introduction to Topos Theory*, http://goo.gl/QyTHrn.

Widać w nim rękę fizyka-teoretyka. Autor ilustruje abstrakcyjne pojęcia prostymi przykładami i pokazuje, „jak liczyć".

Dla zainteresowanych związkami teorii kategorii z logiką niezbędna będzie lektura klasycznej już pozycji:

Robert Goldblatt, *Topoi. The Categorial Analysis of Logic*, Dover Publications, Mineola, NY 2006 (wydanie poprawione; pierwsze wydanie — Elsevier, 1984).

Na koniec dwie pozycje trudniejsze:

Steve Awodey, *Category Theory*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford 2011.

Jest to dość powszechnie używany podręcznik. Wymaga więcej matematycznej dyscypliny.

Zbigniew Semadeni, Antoni Wiweger, *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, wydanie drugie rozszerzone, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978.

O ile mi wiadomo, jest to jedyna monografia w języku polskim na temat teorii kategorii. Napisana w dobrym stylu dawnej „Biblioteki Matematycznej” PWN. Mimo dość już zaawansowanego wieku wciąż warta studiowania.

BIBLIOGRAFIA

Antoine J-P., Lambert D., Trapani C. (2011), *Partial Inner Product Spaces. Some Categorical Aspects*, „Advances in Mathematical Physics” 2011, arXiv:1203.0428.

Baez J. C., Dolan J. (1998), *Categorification* [w:] *Higher Category Theory*, E. Getzler, M. Kapranov (red.), Providence, RI: American Mathematical Society, 1-36, arXiv/math/9802029v1.

Bell J. L. (1986), *From Absolute to Local Mathematics*, „Synthese” 69(3), 409-426.

Cheng E. (2000), *Higher-Dimensional Category Theory*, http://goo.gl/7e49pK.

Czernecka-Rej B. (2014), *Pluralizm w logice*, Lublin: Wydawnictwo KUL.

Eilenberg S., Mac Lane S. (1945), *General Theory of Natural Equivalences*, „Transactions of the American Mathematical Society” 58(2), 231-294.

Estrada-González L. (2010), *Complement Topoi and Dual Intuitionistic Logic*, „Australian Journal of Logic” 9, 26-44.

Goldblatt R. (2006), *Topoi. The Categorial Analysis of Logic*, Mineola, NY: Dover.

Kan D. L. (1858), *Adjoint Functors*, „Transactions of the American Mathematical Society” 87(2), 294-329.

Król J. (2006), *A Model for Spacetime. The Role of Interpretation in Some Grothendieck Topoi*, „Foundations of Physics” 36(7), 1070-1098.

Lawvere F. W. (1963), *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, „Proceedings of the National Academy of Sciences” 50(5), 869-872.

Lawvere F. W. (1966), *The Category of Categories as a Foundation for Mathematics*, „Proceedings of the Conference on Categorical Algebra”, La Jolla, NY: Springer, 1-20.

Mac Lane S., Moerdijk I. (1992), *Sheaves in Geometry and Logic*, New York, NY: Springer.

McLarty C. (1991), *Axiomatizing a Category of Categories*, „The Journal of Symbolic Logic” 56(4), 1243-1260.

Rasiowa H., Sikorski R. (1963), *The Mathematics of Metamathematics*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Rodin A. (2007), *Identity and Categorification*, „Philosophia Scientiae” 11(2), 27-65.

Shapiro S. (2014), *Varieties of Logic*, Oxford: Oxford University Press.