

Wincenty Kulpa, Lech Zaręba

Modele AMA wyliczania wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka operacyjnego w banku

Głębokie przemiany w funkcjonowaniu banków zachodzące w ostatnich latach zwiększyły znaczenie ryzyka operacyjnego w ich działalności.

Jak zauważa A. Wojtasik³¹, *pierwsze kompleksowe analizy dotyczące ryzyka operacyjnego przypadają na wczesne lata '90. i były prowadzone przez Bankers Trust (1992)*. Instytucje nadzoru bankowego od czasu afer finansowych, zdarzeń operacyjnych, aktów terrorystycznych prowadzących nawet do bankructw banków, zaczęły coraz bardziej interesować się ryzykiem operacyjnym i jego wpływem na działalność banków. Wyrazem tego zainteresowania i konsultacji było uwzględnienie ryzyka operacyjnego w Nowej Umowie Kapitałowej (NUK), opublikowanej przez Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego w czerwcu 2004 r. pod nazwą *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*.

Nowe regulacje zawarte w projekcie dyrektywy Capital Requirements Directive (CRD), zmieniającej Dyrektywę 2000/12/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 20 marca 2000 r., wprowadziły do porządku prawnego UE zasady wynikające z CRD, w zakresie metod określania adekwatności kapitałowej instytucji finansowych. NUK zobowiązuje banki do stworzenia wewnętrznych schematów oceny adekwatności kapitałowej, oraz ustalenia docelowego poziomu kapitału, stosownie do profilu występującego

w danym banku ryzyka, które należy objąć właściwym zarządzaniem.

Banki są zobowiązane do obliczania wymogu kapitałowego z tytułu trzech rodzajów ryzyka: kredytowego, rynkowego i operacyjnego. Komitet Bazylejski zwrócił po raz pierwszy szczególną uwagę na ryzyko operacyjne, które odpowiada w instytucjach finansowych za prawie 1/6 strat. W celu obliczania wymogu banki otrzymały do wyboru zestaw metod podzielonych na standardowe i zaawansowane. Śledząc najnowsze wytyczne i rekomendacje instytucji nadzorczych można zauważyć, że pomiar ryzyka operacyjnego powinien być dokonywany za pomocą metod zaawansowanych Advanced Measurement Approaches (AMA).

Wymóg wyliczania kapitału na pokrycie strat związanych z występowaniem ryzyka operacyjnego wywołał wiele dyskusji, dotyczących zarówno metody wyliczania, jak i składników związanych z identyfikacją przyczyn, monitoringiem i zarządzaniem tym rodzajem ryzyka. Ryzyko operacyjne to ryzyko strat pieniężnych wynikające z niewłaściwych lub błędnych procesów wewnętrznych, z winy ludzi bądź systemów, lub spowodowanych wydarzeniami zewnętrznymi. Zatem na ryzyko operacyjne składają się: ryzyko aktywów będących środkami trwałymi, ryzyko technologii, ryzyko interakcji, ryzyko zasobów ludzkich. Sama definicja ryzyka operacyjnego zakłada, że

mamy wyliczać kapitał na pokrycie strat ze zdarzeń losowych mając dane rzeczywiste. Więcej, wyliczamy pewne przyszłe wielkości, które mogą (ale nie muszą) się pojawiać na podstawie danych historycznych. Matematycznie prowadzi to do budowy opartych o teorię prawdopodobieństwa modeli, procesów stochastycznych, statystyki, lub określania ścieżki zmian różnych wielkości finansowych w czasie.

Podstawy metod zaawansowanych pomiaru ryzyka operacyjnego

AMA są ogólnymi modelami pozwalającymi bankom znajdować kapitał na pokrycie strat związanych z ryzykiem operacyjnym, na podstawie ich własnych modeli wewnętrznych, oczywiście przy akceptacji instytucji kontrolnych, i zgodnych z zasadami i instrumentami badań matematyczno-statystycznych. Podstawą zaawansowanych metod pomiaru wielkości kapitału potrzebnego na pokrycie strat związanych z ryzykiem operacyjnym, jest analiza statystyczna historycznych strat i tworzenie modeli matematycznych służących wyliczaniu strat przyszłych. Aby najlepiej z danych historycznych prognozować wielkość przyszłych strat należy spełnić dwa kryteria: ilość danych winna być duża, dane powinny być dokładne i dotyczyć wielu aspektów, zarówno czynników ludzkich, jak i sprzętu. W trakcie analizy należy uwzględnić odpowiednie grupy danych, takie jak dane ilościowe i jakościowe banku, dane wewnętrzne, dane zewnętrzne (źródłem danych publicznych może być baza danych Algo, wcześniej Fitch OpData, IC2 Operational Loss Database First udostępniana przez IC2 Zurich), dane dotyczące analizy scenariuszy (opinie eksperckie), ubezpieczenia, czynniki wpływające na lepsze zabezpieczenie i zarządzanie ryzykiem w banku.

W celu sformalizowania danych przyjmuje się, zgodnie z rekomendacja-

mi Komitetu Bazylejskiego, że dla celów identyfikacji ryzyka operacyjnego i zarządzania tym ryzykiem, straty oblicza się przy uwzględnieniu podziału działalności banku na 8 Linii Biznesowych (BL). Wymieniona rekomendacja definiuje i systematyzuje również 7 kategorii zdarzeń operacyjnych ET (zdarzeń związanych z działalnością banku, które mogą skutkować wystąpieniem strat finansowych).

Oczywiście gromadzenie danych powinno podlegać normom legislacyjnym wydanym przez krajowe instytucje nadzorcze, np. bank uwzględni w wyliczaniu kapitału wymaganego na pokrycie strat zarówno oczekiwane straty, jak i nieoczekiwane. Miara ryzyka operacyjnego musi obejmować przypadki skrajne, a istotność badań statystycznych dla hipotez i przedziałów ufności ma wynosić $\alpha=0,01$. System pomiaru ryzyka obejmuje czynniki ryzyka (zdarzenia) wpływające na kształt ogona rozkładu strat. Korelacje należy wyliczać zgodnie z techniką statystyczną. Miary dotyczące danych wewnętrznych i zewnętrznych można obliczać na podstawie danych historycznych (ostatnie 5 lat), z uwzględnieniem wielkości i częstości strat. Dla analizy scenariuszy należy wykorzystać metody statystyczne porównujące opinie wielu ekspertów z danymi rzeczywistymi oraz dane zewnętrzne z wewnętrznymi, i porównać miary dla danego banku z danymi dla całej grupy banków. Uwzględni się tylko takie dane dotyczące zdarzeń dotyczących otoczenia gospodarczego oraz kontroli wewnętrznej, które w sposób kluczowy mogą wpłynąć na ryzyko operacyjne.

W dokumencie *Rekomendacja M* wydanym w 2013 r. przez KNF, jak również w rekomendacjach NUK obserwujemy wskazania, że zarząd banku powinien uwzględnić występowanie dwóch klas strat operacyjnych: powstałych w wyniku zdarzeń o wysokiej częstotliwości występowania, ale generujących niewielkie straty, powstałych w wyniku zdarzeń o

niskiej częstotliwości występowania, lecz generujących duże straty.

Ta rekomendacja prowadzi do konieczności zastosowania różnego typu analizy danych oraz ustalenia, jaka wielkość straty może być uznana za dużą. W praktyce należałoby stosować różne klasy rozkładów i różne miary dla konkretnego banku.

Należy zauważyć, że metoda AMA może wykorzystywać różne techniki obliczeniowe, niemniej najpowszechniejszą z nich jest metoda Loss Distribution Approach (LDA). W przypadku tej metody podstawą jest dobre ustalenie rozkładu strat, gdyż tylko przy precyzyjnym ustaleniu rozkładu strat regularnych i dotkliwych można precyzyjnie określić wielkość kapitału na pokrycie strat wynikających z ryzyka operacyjnego.

Dane jakimi powinniśmy dysponować w standardowej metodzie LDA, można zobrazować przez tzw. macierz BL-ET¹⁷. Zawiera ona 56 komórek (8 BL i 7 ET, a w każdej z komórek dane powinny być związane z wielkościami strat i częstościami liczonymi na odcinku czasu, np. w kolejnych n – latach z uwzględnieniem strat rzadkich i dotkliwych.

Metoda LDA wyliczania kapitału na pokrycie ryzyka operacyjnego

Metoda LDA jest metodą wyliczania kapitału potrzebnego na pokrycie strat związanych z ryzykiem operacyjnym, z wykorzystaniem przybliżania rozkładu strat. Jest to metoda najczęściej wykorzystywana do modelowania strat wewnętrznych. Wykorzystuje ona analizę rozkładu zagregowanych strat z 56 komórek macierzy BL-ET. Dane historyczne do oszacowania rozkładu, a tym samym do wyliczenia wielkości kapitału, są brane z co najmniej 5 lat, niemniej aby dobrze oszacować przyszłą wielkość strat należałoby wziąć okres dłuższy. W tej metodzie wielkość kapitału na pokrycie strat wynikających z występowania zdarzeń związa-

nych z ryzykiem operacyjnym, jest sumą spodziewanej i niespodziewanej straty.

Zgodnie z zaleceniami BASEL II bank musi przedstawić instytucji kontrolnej, że użyta metoda powoduje, iż kapitał na pokrycie strat przewidywany na kolejny rok jest wyliczony z prawdopodobieństwem co najmniej 99,9 proc.

Standardową metodę LDA można opisać za pomocą czterech kroków:

1. Dla wszystkich linii biznesu i zdarzeń (56) należy dopasować rozkład (dystrybuantę) częstości i wielkości strat.
2. Wyznaczyć łączną (zagregowaną) dystrybuantę dla każdej komórki macierzy BL-ET.
3. Wyznaczyć ogólny obraz zmian kapitału na pokrycie strat dla każdej BL-ET.
4. Wylczyć ogólny kapitał na pokrycie strat.

Zatem praktyczne wykorzystanie tej metody sprowadza się do pewnego matematycznego algorytmu, którego szczegóły są zawarte w wielu pracach^{17, 18, 19}. Modyfikację opisaną powyżej metody proponują stosować badane banki.

Praktyczne wykorzystanie zaawansowanej metody pomiaru w badanych bankach

Rozważmy teraz praktyczne zastosowanie metody LDA przez jeden z banków. Bank przyjmuje następujące założenia wstępne:

Założenie 1. Wymogi z tytułu ryzyka operacyjnego wyliczane są kwartalnie lub półrocznie.

Założenie 2. Bank w celu oszacowania wielkości kapitału K_{AMA} bierze pod uwagę 4 zbiory danych aktualizowanych w pewnych odcinkach czasu: zbiór danych wewnętrznych (A), zbiór danych zewnętrznych (B), zbiór danych wygenerowanych ze scenariuszy (C), zbiór danych z kluczowych wskaźników ryzyka (D).

Założenie 3. Bank zakłada, że procedu-

ra wyliczania K_{AMA} będzie polegać na określeniu rozkładu strat dla każdej tzw. klasy ryzyka operacyjnego (przy czym jako klasę ryzyka rozumie się jednolite dane, takie jak typ zdarzenia, linia biznesowa, itp.).

Odstępstwem od klasycznej metody LDA stosowanym przez badane banki jest posługiwanie się klasą ryzyka, a nie jedną z 56 komórek macierzy BL-ET. Przy czym przynieść to może dużo lepsze efekty i bardziej precyzyjne określenie wielkości kapitału, jeśli właściwie określi się przewidywane klasy. Aby stworzyć te klasy analizuje się wcześniej dane surowe, poszukując wzajemnych podobieństw danych wewnętrznych pod względem np. kategorii zdarzenia, linii biznesu, jednostki samodzielnej, itp. Grupowanie danych w klasy opiera się na aglomeracyjnej, hierarchicznej analizie skupień, przy czym jako miarę podobieństwa przyjmuje się procent podobieństwa wynikający z zastosowanego testu Kołmogorowa-Smirnowa, wykorzystując poziom obrazujący w teście prawdopodobieństwo jednakowości w rozkładach próbek „i” i „j”. W praktyce bankowej bierze się jako miarę odległości wszystkie możliwe kombinacje wyników w dwóch klasach, i jako miarę odległości przyjmuje średnią różnic między elementami pochodzącymi z tych klas. Zaletą nietrzymania się kurczowo standardowego podziału na komórki macierzy BL-ET jest również to, iż pomiędzy klasami jest mała korelacja lub wręcz korelacja zerowa. Oczywiście w szczególności klasami ryzyka mogą być standardowe komórki macierzy BL-ET. Po wyróżnieniu tzw. klasy ryzyka postępowanie dalsze jest zgodne z metodą LDA.

Podstawą uzyskania precyzyjnej prognozy wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka operacyjnego jest dobre dobranie zbiorów danych A, B, C, D. Z punktu widzenia wyliczania wymogu kapitałowego podstawową rolę pełni zbiór danych wewnętrznych A.

Zbiór danych wewnętrznych A to zbiór danych historycznych, w których główną rolę odgrywają dane dotyczące wielkości i częstości strat. Dane te opisują skutek mający odzwierciedlenie w rachunku zysków i strat jako konsekwencję zdarzenia operacyjnego. Na ogół bank zbiera o wiele więcej informacji o takich zdarzeniach. Te dodatkowe informacje pozwalają dobrze zbudować klasy ryzyka, jak również zbudować podstawowy zbiór do zastosowania metody LDA, jakim jest zbiór złożony z sumy ilości i wielkości strat pochodzących z tego samego źródła w tak zwanym okresie obserwacji, czyli tzw. zbiór efektów zdarzeń operacyjnych A'. Okres obserwacji to przedział czasowy brany pod uwagę przy włączaniu zdarzeń operacyjnych do zbioru danych. Najczęściej wynosi on 5 lat ze względu na datę księgowania i 10 lat ze względu na datę zdarzenia.

Aby właściwie dobrać dane jeden z badanych banków postanowił, że w tworzeniu zbioru A' uwzględnić będzie straty ze zdarzeń poddane walidacji, oraz wszystkie efekty, których data księgowania przypada na okres obserwacji. Całkowitą stratę wynikającą z konkretnego zdarzenia operacyjnego obliczać będzie jako sumę strat, rezerw, rozwiązanych rezerw oraz zwrotów innego typu, przyjmując, że straty i rezerwy to elementy dodatnie, a rozwiązane rezerwy i zwroty innego typu to elementy ujemne. W ten sposób scali się w jedną stratę, straty powstałe w różnych momentach czasu, będące skutkiem tego samego zdarzenia (*multiple time losses*). Ponadto do wyliczania wymogu kapitałowego, są brane tylko te zdarzenia operacyjne, dla których całkowita strata jest dodatnia, a odzyski z ubezpieczeń scalane są oddzielnie.

Przy wyborze danych ze zbiorów A, A' należy przeprowadzić dokładną ich analizę oraz uwzględnić inflację. W tym celu należy: przeanalizować podstawowe parametry, zbadać funkcje rozkładu w czasie zjawisk, sprawdzić niezależność danych.

Przy uwzględnieniu inflacji jeden z rozważanych banków proponuje wykorzystać indeksy cenowe, np. *Consumer Price Index* (CPI) lub *Harmonized Indices of Consumer Prices revised excluding Tobacco* (HICP).

Każdą daną ze zbioru A lub A' należy skorygować z wykorzystaniem wyżej wymienionego wskaźnika następująco:

$$X_{\text{skor}} = X \times Wsk \text{ inf}$$

gdzie X – początkowa kwota straty, X_{skor} skorygowana o inflację kwota straty, $Wsk \text{ inf}$ – wskaźnik inflacji. W ten sam sposób korygowane są dane ze zbioru B i ustalany próg.

Po przeprowadzeniu wszystkich podstawowych analiz danych oraz w zależności od ich wyników, przez nowe pogrupowanie danych wewnętrznych dostajemy zmodyfikowany zbiór A danych wewnętrznych do analizy. Oznaczmy ten zbiór jako E.

Zbiór danych zewnętrznych B to dane pozyskiwane z dwóch źródeł: danych o zdarzeniach operacyjnych konsorcjalnych, danych publicznych skorygowanych o opisany wskaźnik inflacji. Najczęściej za istotne dla szacowania wymogu kapitałowego uznaje się dane dotyczące strat związanych ze zdarzeniami zamkniętymi, strat w działalności finansowej, a okres obserwacji to np. 10 lat od daty zdarzenia.

Zbiór danych ze scenariuszy C – to eksperckie teoretyczne wyliczenia i rozważania, mogące służyć jako wskazówki przy ustaleniu typu rozkładu, lub poziomu pewnych parametrów, niedostępnych w publicznych bazach danych.

Zbiór danych z kluczowych wskaźników D – to zbiór danych pozwalających skorygować i ulepszyć wyliczone przez nas wymogi kapitałowe o wskaźniki istotne dla ryzyka operacyjnego, związane z ulepszaniem metod zarządzania ryzykiem w banku.

Oszacowanie rozkładu dotkliwości strat w wybranej klasie ryzyka

W celu wyliczenia teoretycznego rozkładu wielkości strat korzystamy z tych danych ze zbiorów E, B, C, D, które dotyczą strat w wyróżnionej klasie. Aby właściwie oszacować rozkład dotkliwości w przypadku założenia, że wielkości strat są zmienną losową ciągłą, musimy wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej lub gęstość tej zmiennej. Przy czym zgodnie z zaleceniami NUK powinniśmy uwzględnić straty rzadkie, ale dotkliwe. W przypadku wielkości strat, typ rozkładu w dużej mierze zależy od danych pierwotnych, jakimi dysponujemy. Przy oszacowaniu wielkości strat w różnych bankach, na co zezwalają przepisy, można stosować różne rozkłady pod warunkiem, że będą miały uzasadnienie statystyczne. Do najczęściej wykorzystywanych należą rozkłady: wykładniczy, logarytmiczno-normalny, logarytmiczno-logistyczny, rozkład Weibulla, uogólnione rozkłady Pareto (GPD), a także rozkłady Burra, Gamma, Gumbella, Levy'ego, log-gamma i inne⁶.

Zachodzi podstawowe pytanie o kryteria wyboru właściwego rozkładu. Tu jednoznacznej odpowiedzi nie mamy. Możemy posłużyć się wiedzą o ogonie rozkładu. Dla ogonów cienkich stosuje się rozkłady oparte o rozkład Weibulla, dla ogonów średnich stosuje się zazwyczaj rozkłady logarytmiczno-normalny lub logarytmiczno-logistyczny, dla ogonów grubych stosuje się zazwyczaj rozkłady z grupy GPD. Oczywiście po wyborze rozkładu należy oszacować jego parametry. To jaką metodę zastosujemy zależy od kompletności naszych danych. Dane, którymi dysponujemy możemy wstępnie podzielić na dwie grupy: dane kompletne (x_1, \dots, x_n) i dane o wielkościach straty ponad ustalony przez bank próg „u”. W przypadku pierwszym możemy skorzystać ze standardowej metody funkcji największej wiarygodności (MLE).

W drugim przypadku należy ją poprawić lub skorzystać z metod numerycznych, np. metody Expectation Maximization (EM).

Mając rozkład empiryczny z oszacowanymi parametrami, należy zweryfikować, czy jest on również rozkładem teoretycznym wielkości strat. Do tego celu można wykorzystać różne testy statystyczne, np. Kołmogorowa-Smirnowa, test Andersona-Darlinga lub test Cramera von Misesa. Niektóre banki proponują poszukiwać dystrybuanty rozkładu jako połączenia dwóch funkcji – jednej opisującej podstawową część rozkładu, a drugiej opisującej ogon rozkładu. Pierwszą z funkcji wyznacza się na podstawie danych wewnętrznych, a do oszacowania parametrów rozkładu stosuje się statystyczne testy parametryczne. Drugą wyznacza się wykorzystując dane ze zbioru E dla wybranej klasy ryzyka, które są większe od ustalonego progu. Przy czym próg ustala się arbitralnie na podstawie danych zewnętrznych, konsorcjalnych, ze scenariuszy oraz wewnętrznych poddanych walidacji.

Do szacowania rozkładu ogona wykorzystuje się teorię wartości ekstremalnych (*extreme value theory* – EVT)². Zatem w każdej klasie ryzyka ogólna dystrybuanta składa się z dwóch części: podstawowej i ogonowej. W naszym modelu proponujemy przyjąć, że próg to najniższa możliwa wartość pozwalająca uniknąć nieobiektywnych danych szacunkowych, skorygowana o inflację w odniesieniu do daty końcowej. Dla wielkości straty X (dotkliwości) gęstość ma postać:

$$f_X(x) = \begin{cases} \omega \cdot f_{body}^*(x) & x < u \\ (1 - \omega) \cdot f_{tail}^*(x) & x \geq u \end{cases}$$

gdzie: $f_{body}^*(x) = \frac{f_{body}(x)}{F_{body}(u)}$ jest gęstością funkcji podstawowego rozkładu odciętego progiem u (wygenerowanego dla strat mniejszych lub równych od u w wybranej klasie);

$f_{tail}^*(x) = \frac{f_{tail}(x)}{1 - F_{tail}(u)}$ jest gęstością funkcji rozkładu ogona odciętego powyżej progu u (wygenerowanego dla strat większych od u w wybranej klasie); $\omega = F_{body}(u)$ jest współczynnikiem wagowym i jednocześnie służy do uzyskania wymaganej ciągłości funkcji.

Można zauważyć, że jeśli waga ω jest bliska jedynki to bardziej znaczącym jest rozkład części podstawowej, a jeśli jest bliska 0 to większy jest udział części ogona. Oczywiście zgodnie z definicją^{8, 18} dystrybuanta

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

określa skumulowaną stratę.

Oszacowanie podstawowego rozkładu funkcji części podstawowej

Szacowanie rozkładu funkcji gęstości $f_{body}^*(x)$ przeprowadzane jest przy użyciu danych wewnętrznych. Rozkład w danej klasie ryzyka wybierany jest przy zastosowaniu testów statystycznych i analizy graficznej. Stopień dopasowania rozkładu teoretycznego do danych rzeczywistych jest oceniany jednym z testów statystycznych np. testem χ^2 . Przy czym w naszym modelu proponujemy, aby szacować funkcję rozkładu wykorzystując tylko te dane ze zbioru E w danej klasie ryzyka, które są większe od pewnego minimalnego progu H , czyli tych wielkości strat x , które spełniają $H \leq x \leq u$. Jest to bardzo dobre założenie, jeżeli małych strat nie jest zbyt dużo, lub straty o małych kwotach nie są istotne dla banku. Parametry są szacowane za pomocą metody maksymalnego prawdopodobieństwa, stąd wzór funkcji gęstości dla wielkości strat jest następujący:

$$f^*(x; \theta) = f(x; \theta | x \geq H) = \frac{f(x; \theta)}{1 - \Pr(x \leq H)} = \frac{f(x; \theta)}{1 - F(H; \theta)}, \quad x \geq H$$

gdzie θ to wektor zawierający parametry rozkładu (np. logarytmiczno-normalny $\theta = (\mu, \sigma)$); H jest minimalnym progiem strat.

Oszacowanie funkcji rozkładu ogona

Oszacowanie części ogonowej rozkładu $f_{tail}^*(x)$ przeprowadza się z wykorzystaniem matematycznej teorii Extreme Value Theory (EVT)^{2,3)}. W oszacowaniu rozkładu i jego parametrów wykorzystuje się dane wewnętrzne i zewnętrzne, konsorcjalne, zewnętrzne dane publiczne i dane wygenerowane ze scenariuszy przedstawiających kwoty powyżej u .

Przy zastosowaniu podejścia Peak Over Threshold (POT), przekroczenia progu u szacowane są za pomocą rozkładu Pareto (*Generalized Pareto Distribution* – GPD).

Stąd funkcja gęstości rozkładu strat powyżej progu u jest postaci:

$$g(x; \xi, \mu, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\beta} \right)^{\frac{1}{\xi} - 1} & \text{gdym } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} e^{-(x - \mu) / \beta} & \text{gdym } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{gdzie: } \begin{cases} x \geq 0 & \text{gdym } \xi \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \mu - \frac{\beta}{\xi} & \text{gdym } \xi < 0 \end{cases}$$

gdzie:

$\xi \in R$ i $\beta > 0$ są to odpowiednio parametry kształtu i skali. μ jest zbiorem parametrów położenia, równych progowi u ($\hat{\mu} = u$). Przy czym w zależności od ξ możemy mieć różne rozkłady. I tak: rozkład Pareto II-Typu dla $\xi < 0$; rozkład eksponencjalny dla $\xi = 0$; rozkład Pareto dla $\xi > 0$. Bank stosując rozkład Pareto zakłada, że występują tzw. grube ogony, czyli $\xi > 0$.

Podstawowym problemem z wyznaczeniem rozkładu jest oszacowanie jego parametrów. Można tu zaproponować, że parametry GPD będą szacowane za pomocą metody momentów ważonych prawdopodobieństwem (Probability Weighted Moments – PWM). Głównym założeniem PWM jest porównywanie analitycznych i doświadczalnych „momentów ważonych prawdopodobieństwem” zmiennej losowej X w rozkładzie GPD. Wykorzystując tę metodę dostajemy następujący wzór na gęstość rozkładu drugiej części dystrybucji:

$$f_{tail}^*(x) = \frac{f_{tail}(x)}{1 - F_{tail}(u)} = \frac{g(x; \xi, \mu = u, \beta)}{1 - G(u; \xi, \mu = u, \beta)} = g(x; \xi, \mu = u, \beta).$$

Po znalezieniu obu części funkcji gęstości dla rozkładu wielkości strat musimy zadbać, aby była ona funkcją ciągłą. Można to zrobić dobierając odpowiednio parametry funkcji $f_{body}^*(x)$, $f_{tail}^*(x)$ oraz współczynnika wagowego ω , przyjmując, że musi być spełniony następujący warunek:

$$\omega \cdot f_{body}^*(u) = (1 - \omega) \cdot f_{tail}^*(u).$$

Oszacowanie rozkładu ilości (częstotliwości) strat

Rozkład częstotliwości jest rozkładem prawdopodobieństwa liczby strat w zestawieniach rocznych. Rozkład ten oszacowany jest w oparciu o dane wewnętrzne, ponieważ są to jedyne dane, które pozwalają na tego typu obliczenia. Najczęściej stosuje się rozkłady zmiennych losowych dyskretnych, takie jak rozkłady Pascala lub Poissona^{8, 18)}. Jeden z badanych banków postanowił skorzystać z rozkładu Poissona. Aby wyznaczyć

zdefiniowany rozkład należy z danych oszacować, ile wynosi λ . Proponujemy oszacować ten parametr z próby jako zaobserwowaną średnią arytmetyczną rocznej straty, biorąc pod uwagę tylko straty ponad mniejszy próg H , oraz wprowadzić korektę wykorzystując matematyczny związek pomiędzy oszacowaną z próby wartością a danymi rzeczywistymi. Stąd oszacowanie jest następujące:

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\lambda}_{sample}}{P(x > H)} = \frac{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t n_i}{1 - F(H)}$$

gdzie n_i to liczba strat poniesionych w roku i , t to długość okresu obserwacji, mierzona w latach, $\hat{\lambda}$ to wartość szacunkowa parametru rozkładu Poissona dla całego przedziału strat o wartości dodatniej ($x > 0$), F to funkcja rozkładu dotkliwości. Oczywiście w naszym przypadku należy oszacować dwa parametry λ_{body} , λ_{tail} .

Wykorzystując wagę oraz własność rozkładu Poissona dostajemy:

$$\hat{\lambda}_{body(x < u)} = \hat{\lambda} \times P(x < u) = \hat{\lambda} \times \omega, \quad \hat{\lambda}_{tail(x \geq u)} = \hat{\lambda} \times P(x \geq u) = \hat{\lambda} \times (1 - \omega),$$

gdzie: $\hat{\lambda}_{body(x < u)}$ to parametr rozkładu częstotliwości w odniesieniu do strat poniżej u , $\hat{\lambda}_{tail(x \geq u)}$ jest parametrem rozkładu częstotliwości w odniesieniu do strat powyżej u , a ω , $1 - \omega$, to współczynniki wagowe podstawowej części oraz ogona funkcji dotkliwości.

Tworzenie dystrybucyj rozkładu łącznego w wybranej klasie ryzyka

Mając rozkłady dotkliwości strat X , oraz częstotliwości strat N , tworzymy dystrybucję rozkładu łącznego, czyli rozkładu zmiennej losowej S postaci: $S = \sum_{i=1}^N X_i$:

W tym celu proponujemy wykorzystanie standardowego podejścia używając splotu funkcji. Przy takim podejściu dystrybucję rozkładu zmiennej losowej S można przedstawić za pomocą następującego wzoru:

$$F_S(x) = \Pr(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr(S \leq x | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) F_X^{*n}(x) \quad , \quad x > 0,$$

gdzie F_X^{*n} to n -krotny spłot dystrybucyj F_X ¹⁷⁾.

Aby wyznaczyć ten rozkład, jeden z banków proponuje wykorzystać zalecaną i często stosowaną do wyznaczenia rozkładu symulację Monte Carlo⁶⁾.

Należy też zaznaczyć, że jeśli obie części dystrybucyj są szacowane osobno, to symulację Monte Carlo należy zastosować do obydwu części rozkładu. Ponadto jeśli pominiemy dane poniżej progu H to przyspieszy nam to obliczenia, ale wtedy należy skorygować parametr λ_{body} wykorzystując następujący wzór:

$$\hat{\lambda}_{body(H \leq x < u)} = \hat{\lambda}_{body(x < u)} \times \frac{\Pr(H < x < u)}{\Pr(x < u)} = \hat{\lambda}_{body(x < u)} \times \frac{F(u) - F(H)}{F(u)}$$

Ponadto, jeżeli stosujemy symulację Monte Carlo dla obu części rozkładu, to przyjmując, że $\hat{\lambda}_{body(H \leq x < u)} = \lambda_{body}$, $\lambda_{tail} = \lambda_{tail(x \geq u)}$ dostaniemy realizacje n_j^{body} i n_j^{tail} , $j=1, 2, \dots, J$ z rozkładu Poissona o parametrach λ_{body} , λ_{tail} odpowiednio, (gdzie J jest ilością lat). Jeżeli dodatkowo uwzględnimy dla podstawowej części funkcji rozkładu straty poniżej minimalnego progu H to suma J rocznych strat jest zmienną losową opisującą symulowaną wartość rocznych strat $[s_1, s_2, \dots, s_J]$ gdzie:

$$s_j = s_j^{body} + s_j^{tail} = \sum_{i=1}^{n_j^{body}} x_{ij}^{body} + s_{x < H} + \sum_{i=1}^{n_j^{tail}} x_{ij}^{tail} \quad j = 1, 2, \dots, J$$

gdzie s_j^{body} to suma rocznych strat poniżej progu u na etapie j , s_j^{tail} to suma rocznych strat powyżej progu u na etapie j , x_{ij}^{tail} to strata i symulowana dla etapu j otrzymana z ogona rozkładu dotkliwości, x_{ij}^{body} to strata i symulowana dla etapu j z podstawowej części rozkładu dotkliwości, a $s_{x < H}$ to średnia roczna kwota strat poniżej progu H .

Uwzględnianie ubezpieczeń

Kolejną operacją jest skorygowanie (zmniejszenie) strat łącznych S o możliwe zwroty z ubezpieczeń z uwzględnieniem niepewności spłaty. Aby uwzględnić polisy w wyliczaniu wymogu kapitałowego, jeden z banków przyjmuje założenie, że polisa ubezpieczeniowa pokrywa, chociażby częściowo, zestaw klas ryzyka oraz spełnia ich wymogi jakościowe. Przy czym to, którą z polis włączamy do korygowania wartości strat, decyduje się arbitralnie. W modelowaniu pokrycia strat przez ubezpieczenia bierze się pod uwagę wielkość odpisów – d , limit polisy dla każdorazowej straty o wielkości x_{ij} – m .

Przy tak przyjętych oznaczeniach zwrot z tytułu ubezpieczenia dla straty wielkości x_{ij} oblicza się ze wzoru:

$$R_{d,m}(x_{ij}) = \min(\max(x_{ij} - d, 0), m) \quad \forall i = 1, \dots, n_j, \quad \forall j = 1, \dots, J$$

gdzie: n_j pochodzi z rozkładu częstotliwości, x_{ij} to strata i pochodząca z rozkładu dotkliwości w roku j , a J to liczba symulowanych rocznych strat. Oprócz czynników związanych z odzyskiem z tytułu polis należy wziąć pod uwagę także niepewność spłaty, która może być spowodowana np. rozbieżnością pomiędzy polisą ubezpieczeniową a klasą ryzyka operacyjnego, która została wzięta pod uwagę. Proponowany algorytm modelowania niepewności spłaty opiera się na założeniu, że każda strata operacyjna osobno powinna być ubezpieczona z prawdopodobieństwem p ($0 \leq p \leq 1$), przy propozycji wykorzystania rozkładu dwumianowego $B(n, p)^{8, 18}$.

W celu wymodelowania rozkładu posługujemy się znowu symulacją Monte Carlo. Oczywiście w każdej klasie ryzyka, dla każdej ze strat mogą być przyjmowane różne wielkości d i m . A ponieważ w analizie ryzyka operacyjnego bierzemy pod uwagę całkowite straty, zatem lepiej jest rozważać dla danego roku zbiory odpisów jako D , i zbiór agregowanych co roku limitów polisy jako V . Należy zwrócić uwagę, że te uwzględnienia modyfikują zbiory danych, z których wylicza się wymóg kapitałowy. Czyli należy je dokonać przed tworzeniem dystrybuant. Zatem każdą stratę wielkości x_{ij} ze zbioru danych wewnętrznych E pomniejszamy o wielkość zwrotu, czyli tworzymy zbiór danych E' złożony ze strat wyliczanych następująco:

$$\tilde{x}_{ij} = x_{ij} - R_{d,m}(x_{ij}) \quad \forall i = 1, \dots, n_j, \quad \forall j = 1, \dots, J,$$

Po uwzględnieniu ubezpieczeń i niepewności spłaty strata netto wyniesie:

$$\tilde{s}_j = s_j - R_{d,m,D,V}(s_j) \quad \forall j = 1, \dots, J.$$

Wymóg kapitałowy dla pojedynczej klasy ryzyka

Wymóg kapitałowy dla jednej klasy ryzyka jest wyliczany standardowo za pomocą często stosowanej w ekonomii i finansach miary VaR⁴⁾ łącznego rozkładu strat w danej klasie ryzyka. Jeżeli straty s_j , $j = 1, \dots, J$ uporządkowane są rosnąco to VaR jest określana jako:

$$VaR_{99,9\%} = F_S^{-1}(99,9\%) = \inf \left\{ s_{j:J} : \frac{j}{J} \geq 99,9\% \right\}.$$

Kapitał z tytułu ryzyka obliczany na podstawie rzeczywistych danych oraz danych wygenerowanych ze scenariuszy dla jednej klasy ryzyka, wyraża się wzorem:

$$OpVaR^{LDA} = VaR .$$

Przy czym ryzyko ma różne skutki, w zależności od klas ryzyka, zabezpieczeń i zmian ulepszących zarządzanie czynnikami ryzyka, i wykrywanie potencjalnych zagrożeń. Przed wyliczeniem całkowitego wymogu kapitałowego K_{AMA} bank koryguje albo łączne wielkości strat, albo łączne $OpVaR^{LDA}$ w każdej z klas o tzw. wskaźniki ryzyka operacyjnego. Czyli pewną wielkość liczbową γ powiększającą w przypadku $\gamma > 1$, lub pomniejszającą w przypadku $\gamma < 1$ wymóg kapitałowy w danej klasie ryzyka. Oczywiście wartość tego współczynnika zależy od przyjętego przez bank sposobu jego obliczania, uwzględniającego różne aspekty związane ze zmianami w systemach zarządzania ryzykiem w banku. Każda zmiana ulepsząca kontrolę powoduje ich zmniejszenie.

Wyliczanie całkowitego kapitału z tytułu ryzyka

Metoda LDA dąży do wyliczenia całkowitego wymogu kapitałowego uzyskiwanego ze wszystkich klas ryzyka. Opisanie wcześniej metody daje możliwość wygenerowania rozkładu wymogu kapitałowego w pojedynczych klasach ryzyka, zatem należy zagregować wcześniej uzyskane wyniki.

Wyboru metody dokonujemy w zależności od wzajemnych korelacji. Jeśli zachodzi warunek całkowitej korelacji między danymi z różnych klas ryzyka (*perfect correlation*), to wymóg kapitałowy można policzyć jako sumę wymogów kapitałowych ze wszystkich klas. Jeśli mamy nieskorelowanie (*zero correlation*), wtedy całkowity wymóg kapitałowy obliczamy jako $OpVar$ z łącznego rozkładu strat we wszystkich klasach (ten łączny rozkład strat należy najpierw wygenerować wykorzystując np. symulację Monte Carlo). Jeśli natomiast założymy, co jest najczęściej występującym przypadkiem, że nie występuje ani *perfect* ani *zero correlations*, wtedy do wyliczenia wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka operacyjnego możemy użyć tzw. funkcji copula, czyli całkowity wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka operacyjnego wyliczać jako kwantyl rzędu 99,9 proc. całkowitego rocznego rozkładu strat, uzyskiwanego z łącznych rozkładów w każdej klasie ryzyka przez zastosowanie funkcji copula.

Należy zauważyć, że istnieje wiele rodzin funkcji copula, (Gaussa, archimedesowskie, okresowe, empiryczne, t-studenta), które różnią się w szczegółach uzależnienia. Rodziny zwykle mają kilka parametrów, które odnoszą się do siły i formy uzależnienia. Typowym zastosowaniem dla copulas jest wybór jednej takiej rodziny i wykorzystanie jej do określenia wielowymiarowego rozkładu, jaki ma być stosowany. Jeden z rozważanych banków proponuje wykorzystać funkcje Copula t-Studenta (t-Student Copula Function)⁵, a do jej wyznaczenia symulację Monte Carlo. Należy zauważyć, że wielowymiarowe copula t-studenta (MTC) ostatnio zaczynają być coraz modniejsze w matematyce finansowej, gdyż lepiej modelują grube ogony. Zastosowanie funkcji powiązań to dość prosty i skuteczny pomysł polegający na tym, by zamiast rozwiązywać problem poprzez prowadzenie rozważań wielu różnych dystrybuant brzegowych, należy poprzez pewne przekształcenie sprowadzić rozkłady brzegowe do rozkładów jednolitych, a następnie określić zależność jako wielowymiarowy rozkład tych rozkładów i wykorzystać twierdzenie Sklara.

Tym sposobem otrzymujemy symulowaną funkcję empirycznego rozkładu całkowitej rocznej straty, co pozwala określić (z prawdopodobieństwem 99,9 proc.) całkowitą wartość $OpVaR$ („wartość narażoną na ryzyko operacyjne”), odzwierciedlającą poziom

adekwatności kapitałowej banku z tytułu tego ryzyka, a więc wielkość kapitału regulacyjnego potrzebnego na pokrycie ryzyka operacyjnego w skali całego banku na okres jednego roku. Tak obliczona wartość kapitału ma pokryć straty operacyjne z uwzględnieniem nawet tych, które pojawiają się raz na tysiąc lat.

Podsumowanie

Biorąc pod uwagę najnowsze wytyczne należy stwierdzić, że ustalając wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka operacyjnego banki powinny dążyć do zastosowania metod AMA. Nie sposób jednak pominąć słabych i mocnych stron metod zaawansowanych.

Do słabych stron należy zaliczyć to, iż w metodach AMA należy na podstawie danych historycznych ustalić metodami statystycznymi dystrybuantę zmiennej dwuwymiarowej złożonej dla każdej komórki macierzy BL-ET, ze zmiennych częstości pojawienia się straty oraz wielkości straty, co wymaga dużej ilości danych i przyjęcie prognozy 5-letniego może być niewystarczające. Ponadto możemy mieć do czynienia z dwoma rodzajami strat – występującymi regularnie (zwykle straty wynikające z codziennej pracy operacyjnej banku), oraz stratami rzadkimi, ale dotkliwymi. Dla strat typowych można ustalać ich rozkłady i wyliczać kapitał na podstawie danych historycznych. W przypadku strat o małej częstotliwości, ale bardzo dotkliwych, może wystąpić problem konieczności dużego zawyżenia wielkości kapitału na pokrycie strat z powodu ryzyka operacyjnego na przyszły rok. Może to być bardzo dotkliwe dla banków małych i stwarzać duże problemy w ich funkcjonowaniu.

W przypadku zastosowania metod zaawansowanych koszty zbierania danych i ich analizy mogą być niewspółmiernie wysokie do zysków płynących z ich stosowania. Ponadto metody AMA, a szczególnie ich składowe, jakimi są rozkłady strat, nie są uniwersalne dla wszystkich

rodzajów banków, ale dają się modelować do konkretnej sytuacji. Może się to okazać słabością jak i zaletą. Słabością w przypadku fuzji różnych banków lub zrzeszania się banków, np. banków spółdzielczych. Zaletą natomiast jest w tym wypadku to, że dla każdego banku istnieje możliwość dostosowania rozkładów do specyfiki jego działalności.

Mocnymi stronami i zaletami modelu jest to, że mimo zaawansowanego aparatu matematycznego używanego w metodach AMA, właściwe ich dobranie daje o wiele lepsze przybliżenie kapitału potrzebnego na pokrycie strat wynikających z ryzyka operacyjnego, niż w przypadku innych metod (BIA) i (TSA). Oczywiście warunkiem sukcesu ustalenia prawidłowej adekwatności kapitałowej, poprzez poziom wartości zagrożonej z tytułu ryzyka operacyjnego OpVaR, jest prawidłowa identyfikacja wartości straty oraz zastosowanie dobrze dobranego rozkładu strat dla danego banku. Ponadto w metodzie AMA można uwzględnić mechanizmy ograniczające ryzyko, takie jak kluczowe wskaźniki ryzyka (KRI) czy ubezpieczenia. Istnieje również możliwość precyzyjnego określenia składowych procesów zarządzania ryzykiem, a tym samym dokładnej identyfikacji przyczyn ryzyka operacyjnego, dokładniejszego pomiaru wielkości strat, możliwość bieżącego i systemowego zarządzania ryzykiem, bieżącego monitoringu ryzyka operacyjnego.

Wprowadzenie metody AMA w banku PKO BP SA spowodowało w roku 2012 obniżenie wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka operacyjnego o 25 proc., co w konsekwencji wpłynęło na podwyższenie współczynnika wypłacalności banku. Należy zaznaczyć, że wdrożenie metody AMA jest bardzo kosztowne, a następnie jej stosowanie w praktyce wiąże się ze stałą walidacją. Uwzględnienie zmian w czasie powoduje z jednej strony konieczność modyfikacji danych co pewien okres, czyniąc model bardziej szczelnym

i dostosowanym do aktualnych potrzeb kapitałowych i prowadzonego biznesu, bez zbędnej absorpcji kapitału na ryzyko operacyjne. Z drugiej strony okresowa walidacja danych i modelu powoduje lepszą identyfikację zdarzeń operacyjnych, usprawnienie monitoringu, przeciwdziałanie ryzyku oraz zabezpieczanie się przed

jego skutkami poprzez transfer i ubezpieczenia, co sprzyja zmniejszeniu planowanych strat i tym samym uwolnieniu części kapitału ekonomicznego, który może być z powodzeniem przeznaczony na cele wzrostu aktywów banku, generujących dodatkową wartość dla banku i jego właścicieli.

Bibliografia:

1. Basel Committee on Banking Supervision, *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards – a Revised Framework*, Bank for International Settlements, Basel 2004.
2. Bensalah Y., *Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance: a Review*, Bank of Canada, 2000.
3. Blake L.B., Ritirupa S., *Extreme Value Theory and Fat Tails in Equity Markets*, 2004.
4. Capiński M., Zastawniak T., *Mathematics for Finance*, Springer-Verlag, Berlin 2003.
5. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex 2004.
6. Cruz M.G., *Modelling, Measuring and Hedging Operational Risk*, John Wiley & Sons, New York 2002.
7. Davis E., *Operational Risk*, Riskbooks, Londyn 2005.
8. Domański Cz., Pruska K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.
9. Dowd K., *Estimating Expected Tail Loss*, "Financial Engineering News", 2002, Vol. 25, pp. 3-5.
10. Dziekoński P., *Nowa Bazylejska Umowa Kapitałowa – konsekwencje dla rynku kredytowego*, Materiały i studia, NBP, Warszawa 2003.
11. Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej, C227 E/349, Załącznik X, wrzesień 2005.
12. Dziennik Urzędowy NBP Nr 2, załącznik nr 14 do uchwały nr 1/2007 KNB z dnia 13.03.2007.
13. Harrison M., Waldron P., *Mathematical, Economics and Finance*, e-book, 1998.
14. Hunt P.J., Kennedy J.E., *Financial derivatives in theory and practice*, John Wiley & Sons, New York 2000.
15. Informacje ze strony <http://www.bis.org/>.
16. Kamiński B., Czupryna M., Szapiro T., *On Conditional Value-at-Risk Based Goal Programming Portfolio Selection Procedure*, "Multiobjective Programming and Goal Programming Theoretical Results and Practical Applications", 2009, Vol. 618, 243-252, Springer-Verlag, Berlin 2009.
17. Kulpa W., Zaręba L., *Wybrane metody zastosowania matematyki w bankowości i finansach*, RS Druk, Rzeszów 2013.
18. Krzyśko M., *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*, WN-T, Warszawa 2000.
19. Kuziak K., *Koncepcja wartości zagrożonej VaR*, StatSoft Polska, 2003.
20. Manić I., *Mathematical Models for Estimation of Operational Risk and Risk Management*, Univrzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2007.
21. Marcinkowska M., *Standardy kapitałowe banków. Bazylejska Nowa Umowa Kapitałowa w polskich regulacjach nadzorczych*, Regan Press, Gdańsk 2009.
22. Matkowski P., *Zarządzanie ryzykiem operacyjnym*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2006.
23. Orzeł J., *Ilościowe metody pomiaru ryzyka operacyjnego*, „Bank i Kredyt”, 2005.
24. *Rekomendacja M*, KNF, Warszawa 2013.
25. Resnick S.I., *Heavy Tail Modelling and Teletraffic Data*, "Annals of Statistics", 1997, Vol. 25, No 5.
26. Shafer G., Vovk V., *Probability and finance it's only a game!*, John Wiley & Sons, New York 2001.
27. Shevchenko P.V., *Modelling operational risk using bayesian inference*, Springer, Berlin 2011.
28. Ustawa o zmianie ustawy Prawo Bankowe, (Dz.U. z 2007 r., nr 42, poz. 272).
29. Ustawa Prawo Bankowe, (Dz.U. z 1997 r., nr 140, poz. 939).
30. Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998.
31. Wojtasik A., *Wybrane metody pomiaru ryzyka operacyjnego dla instytucji finansowych działających na rynku instrumentów pochodnych*, „Bank i Kredyt”, 2004.

Dr **Wincenty KULPA**, Uniwersytet Rzeszowski.

Dr **Lech ZARĘBA**, Uniwersytet Rzeszowski.