DOI: 10.5604/01.3001.0014.0595

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
TOM LXV – ZESZYT 4 – 2018

Emil PANEK[1]

Niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą produkcyjną. „Słaby", „silny" i „bardzo silny" efekt magistrali

1. WPROWADZENIE

W artykule Panek (2016b) zaproponowano uogólnienie pojęcia magistrali produkcyjnej w gospodarce Gale'a poprzez zastąpienie pojedynczej magistrali (pojedynczego promienia von Neumanna) zwartą wiązką magistral, nazwaną tam umownie magistralą wielopasmową. W efekcie udowodniono „słabe" twierdzenie o wielopasmowej magistrali produkcyjnej w stacjonarnej gospodarce Gale'a (ze stałą w czasie technologią). Jego dowód w przypadku niestacjonarnej gospodarki Gale'a z wielopasową magistralą produkcyjną i graniczną technologią zawiera praca Panek (2017a).

Obecnie prezentujemy – obok „słabego" twierdzenia – także dowód „silnego" oraz „bardzo silnego" twierdzenia o magistrali produkcyjnej w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z wiązką magistral i technologią zbieżną z upływem czasu do pewnej technologii granicznej.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I DEFINICJE

Wersja stacjonarna modelu, którym zajmujemy się dalej, została przedstawiona w artykułach Panek (2016b, 2017b). Poniżej prezentujemy jego postać niestacjonarną. Zakładamy, że czas zmienia się skokowo, $t = 0, 1, \ldots$. W gospodarce mamy n towarów, przez $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$ oznaczamy wektor towarów zużywanych w okresie t (nazywamy go wektorem nakładów), przez $y(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\big)$ wektor towarów wytwarzanych w tym okresie (nazywamy go wektorem wyników lub produkcji). Jeżeli z nakładów $x(t)$ można wytworzyć produkcję $y(t)$, to mówimy, że para $\big(x(t), y(t)\big)$ opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji w okresie t. Zbiór wszystkich technologicznie

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, al. Niepodległości 10, 60–967 Poznań, Polska, e-mail: emil.panek@ue.poznan.pl.

dopuszczalnych procesów produkcji w gospodarce w okresie t oznaczamy przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$. Nazywamy go przestrzenią produkcyjną Gale'a (w okresie t). Zapis $(x, y) \in Z(t)$ (lub $\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t)$) mówi, że w okresie t z wektora nakładów x możliwe jest wytworzenie wektora produkcji y.

Zakładamy, że przestrzenie produkcyjne $Z(t), t = 0, 1, \dots$, spełniają następujące warunki:

(G1) $\forall (x^1, y^1), (x^2, y^2) \in Z(t)\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\ \big(\lambda_1(x^1, y^1) + \lambda_2(x^2, y^2) \in Z(t)\big)$

(warunek proporcjonalności nakładów i wyników oraz addytywności procesów produkcyjnych).

(G2) $\forall (x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Rightarrow y = 0)$

(warunek "braku rogu obfitości").

(G3) $\forall (x, y) \in Z(t)\ \forall x' \geqq x\ \forall\ 0 \leqq y' \leqq y\ \big((x', y') \in Z(t)\big)$

(możliwość marnotrawstwa nakładów i/lub wyników).

(G4) Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ są zbiorami domkniętymi w R_+^{2n}.

(G5) $Z(0) \neq \emptyset\ \wedge\ Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq \dots \subseteq Z$ i Z jest takim najmniejszym zbiorem domkniętym w R_+^{2n} zawierającym wszystkie przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, że jeżeli $(x, y) \in Z$ oraz $x = 0$, to $y = 0$ (tj. zachodzi warunek **(G2)**).

Zbiór Z nazywamy graniczną przestrzenią produkcyjną. Jeżeli $(x, y) \in Z$ to znaczy, że w świetle granicznej technologii możliwe jest wytworzenie wektora produkcji y z wektora nakładów x. Gospodarkę z przestrzeniami produkcyjnymi spełniającymi warunki **(G1)–(G5)** nazywamy niestacjonarną gospodarką Gale'a z graniczną technologią[2]. Łatwo pokazać, że graniczna przestrzeń produkcyjna Z, podobnie jak przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, spełnia warunki **(G1)–(G4)**, zob. Panek (2016, tw. 1). Wprost z definicji wynika, że zbiory $Z(t)$, $t = 0, 1, \dots$, są stożkami domkniętymi w R_+^{2n} z wierzchołkami w 0. Własność tę ma również graniczna przestrzeń produkcyjna Z.

Wybierzmy okres czasu t. Jeżeli $(x, y) \in Z(t) \setminus \{0\}$, to $x \neq 0$ i istnieje nieujemna liczba $\alpha(x, y) = \max\{\alpha \mid \alpha x \leqq y\}$. Nazywamy ją wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x, y) (w okresie t). Analogicznie definiujemy

[2] W literaturze przestrzenie (zbiory) $Z(t)$ spełniające warunki **(G1)–(G4)** nazywane są przestrzeniami (zbiorami technologicznymi) Gale'a. W stacjonarnej gospodarce Gale'a mamy $Z(t) = Z = const., t = 0, 1, \dots$; zob. np. Nikaido (1968, rozdz. IV), Makarov, Rubinov (1977), McKenzie (2005), Panek (2003, rozdz. 5), Takayama (1985, rodz. 7).

wskaźnik technologicznej efektywności granicznego procesu $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$. Dalej interesują nas wyłącznie nietrywialne procesy $(x, y) \in Z(t) \setminus \{0\}$ oraz $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$.

Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G5)**, wówczas (Takayama; 1985, tw. 6.A.1):

— funkcja α jest dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z(t) \setminus \{0\}$, $t = 0, 1, \dots,$ oraz $Z \setminus \{0\}$, 0

— $\exists\ (\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\} \left(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \max\limits_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = \alpha_M \geq 0 \right)$.

Proces $(\bar{x}, \bar{y})$ nazywamy optymalnym procesem produkcji w gospodarce Gale'a z graniczną technologią. Jest on określony z dokładnością do mnożenia przez dowolną stałą dodatnią (z dokładnością do struktury). Liczbę α_M nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w gospodarce Gale'a z graniczną technologią.

Zakładamy, że graniczna przestrzeń produkcyjna Z pozwala na wytworzenie każdego towaru:

(G6) $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\ \exists (x^i, y^i) \in Z\ \left(y_i^i > 0\right)$.

Warunek ten zapewnia, że optymalny wskaźnik technologicznej efektywności produkcji w gospodarce Gale'a z graniczną technologią jest liczbą dodatnią.

Przyjmijmy oznaczenie:

$$Z_{opt} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\} |\ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0\}$$

(zbiór wszystkich optymalnych procesów produkcji w gospodarce Gale'a z graniczną technologią). Przy założeniach **(G1)–(G5)** zbiór Z_{opt} jest stożkiem nie zawierającym 0, mającym m.in. następujące własności[3]:

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} (\bar{x} \geq 0 \land \bar{y} \geq 0)$$

oraz

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \left((\bar{x}, \alpha_M \bar{x}) \in Z_{opt} \land (\bar{y}, \alpha_M \bar{y}) \in Z_{opt} \right).$$

O wektorze[4] $\bar{s} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ mówimy, że charakteryzuje strukturę produkcji w procesie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$. Przez

---

[3] Zob. Panek (2016b, tw. 1). Jeżeli $x \in R^n$ $(n \geq 2)$, wtedy warunek $x \geq 0$ oznacza, że nieujemny wektor x ma co najmniej jedną współrzędną dodatnią. Warunek $x \geqq 0$ jest równoważny z tym, że $x \geq 0$ lub $x = 0$.

$$S = \left\{ s \mid \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \left(s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} \right) \right\}$$

oznaczamy zbiór wektorów struktury produkcji we wszystkich procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$. Przy przyjętych założeniach zbiór S jest niepusty, wypukły i zwarty; Panek (2016b, tw. 2(i)). O każdej półprostej

$$N_s = \{\lambda s | \lambda > 0\},\ s \in S,$$

mówimy, że tworzy tzw. promień von Neumanna (magistralę produkcyjną) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią. Zbiór

$$\boldsymbol{N} = \cup_{s \in S} N_s$$

lub równoważnie

$$\boldsymbol{N} = \{\lambda s | \lambda > 0, s \in S\}$$

nazywamy wielopasmową magistralą produkcyjną w gospodarce Gale'a z graniczną technologią.

Niech $p = (p_1, p_2 \dots, p_n) \geq 0$ oznacza wektor cen towarów w gospodarce z graniczną technologią. Jeżeli $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$, wówczas liczbę[5]

$$\beta(x, y, p) = \frac{\langle p, y \rangle}{\langle p, x \rangle}$$

(tam gdzie $\langle p, x \rangle \neq 0$) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (x, y) przy cenach p. Jeżeli $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$, to o trójce $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ spełniającej warunki:

$$\alpha_M \bar{x} \leqq \bar{y}, \tag{1}$$

$$\forall\ (x, y) \in Z\ (\langle \bar{p}, y \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, x \rangle) \tag{2}$$

$$\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle > 0, \tag{3}$$

mówimy, że tworzy optymalny stan równowagi von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią (krótko: stan równowagi von Neumanna). Wektor $\bar{p}$ nazywamy wektorem cen von Neumanna. Ceny $\bar{p}$ oraz proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y})$ są w równowadze określone z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią (z dokładnością do struktury).

[5] Przez $\langle a, b \rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów $a, b \in R^n$: $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

W ogólnym przypadku, bez dodatkowych założeń taki stan równowagi może nie istnieć. Aby zapewnić istnienie optymalnego stanu równowagi von Neumanna, w literaturze z reguły przyjmuje się mocne i trudne do zweryfikowania złożenie, że przestrzeń produkcyjna (w naszym przypadku graniczna przestrzeń produkcyjna) spełnia tzw. warunek regularności głoszący, w najprostszej wersji, iż w optymalnym procesie produkcji wytwarzane są wszystkie towary, czyli jeżeli $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$, to $\bar{y} > 0$[6]. My postulat regularności przestrzeni produkcyjnej zastąpimy mającym naturalną interpretację warunkiem **(G7)**. Przy jego sformułowaniu korzystamy z pewnej własności gospodarki Gale'a z graniczną technologią, o której mówi poniższy lemat.

□ **Lemat 1.** Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią (spełniającej warunki **(G1)–(G6)**) w pewnym dopuszczalnym procesie $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ struktura nakładów $\frac{x}{\|x\|}$ lub produkcji $\frac{y}{\|y\|}$ różni się od struktury magistralnej,

$$\frac{x}{\|x\|} \notin S \vee \frac{y}{\|y\|} \notin S,$$

to technologiczna efektywność takiego procesu jest niższa od optymalnej.

Dowód. Niech $x \in \boldsymbol{N}$. Wówczas para $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ z wektorem $y = \alpha_M x$ tworzy optymalny proces produkcji w gospodarce Gale'a z graniczną technologią, czyli $(x, y) \in Z_{opt}$. Zatem

$$\forall x \in \boldsymbol{N}\ \exists y \in R^n_+\big((x, y) \in Z\setminus\{0\} \wedge \alpha(x, y) = \alpha_M > 0\big).$$

Jeżeli jednak $x \notin \boldsymbol{N}$, wtedy technologiczna efektywność procesu $(x, y) \in Z\setminus\{0\}$ jest niższa od optymalnej. Istotnie, zakładając $(x, y) \in Z\setminus\{0\}$ oraz $\alpha(x, y) = \alpha_M$ dostajemy: $(x, y) \in Z_{opt}$, czyli $(x, \alpha_M x) \in Z_{opt}$. Wtedy $x \in \boldsymbol{N}$, wbrew założeniu.

Podobnie, jeżeli $y \in \boldsymbol{N}$, to biorąc wektor nakładów $x = \alpha_M^{-1} y$ otrzymujemy dopuszczalny proces $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ z technologiczną efektywnością $\alpha(x, y) = \alpha_M$, wiec $(x, y) \in Z_{opt}$. Zatem

$$\forall y \in \boldsymbol{N}\ \exists x \in R^n_+\big((x, y) \in Z\setminus\{0\} \wedge \alpha(x, y) = \alpha_M > 0\big).$$

Załóżmy teraz, że $(x, y) \in Z\setminus\{0\}, y \notin \boldsymbol{N}$ i $\alpha(x, y) = \alpha_M$. Wówczas $(x, y) \in Z_{opt}$ oraz $(y, \alpha_M y) \in Z_{opt}$, tzn. $y \in \boldsymbol{N}$, wbrew założeniu. Reasumując:

$$\forall\ (x, y) \in Z \setminus \{0\}(x \notin \boldsymbol{N} \vee y \notin \boldsymbol{N} \Rightarrow \alpha(x, y) < \alpha_M). \tag{4}$$

[6] Warunku regularności nie muszą generalnie spełniać przestrzenie produkcyjne $Z(t)$. Jeżeli jednak jest on spełniony w pewnym okresie t', to wobec **(G5)** musi zachodzić także $\forall t > t'$. O jego innych wersjach zob. np. Panek (2003, rozdz. 5, tw. 5.4), (2016b, p. 6, warunek **(G7')**).

Tezę otrzymujemy zważywszy że warunek $x \notin \boldsymbol{N}$ jest równoważny z $\frac{x}{\|x\|} \notin S$, podobnie warunek $y \notin \boldsymbol{N}$ jest równoważny z $\frac{y}{\|y\|} \notin S$. ■

Najwyższą efektywność technologiczną produkcji α_M gospodarka Gale'a z graniczną technologią osiąga tylko w równowadze. Zgodnie z definicją (warunki (1)–(3)) gospodarka w równowadze osiąga także najwyższą efektywność ekonomiczną (równą technologicznej efektywności α_M). Nie znaczy to jednak, że maksymalną efektywność ekonomiczną – podobnie jak najwyższą efektywność technologiczną – niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią może (beż dodatkowych założeń) osiągać tylko w równowadze. Zapewnia to następujący warunek:

(G7) $\forall\ (x,y) \in Z \setminus \{0\}(\alpha(x,y) < \alpha_M \Rightarrow \beta(x,y,\bar{p}) < \alpha_M)$.

Warunek ten łącznie z **(G1)–(G6)** jest istotny także dlatego, że gwarantuje istnienie optymalnego stanu równowagi von Neumanna, niezależnie od warunku regularności. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

□ **Twierdzenie 1.** Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią spełnia warunki **(G1)–(G6),** to istnieją takie ceny $\bar{p} \geq 0$, przy których zachodzi warunek (2). Gdy spełniony jest ponadto warunek **(G7)**, to każda trójka $\{\alpha_M, (\bar{x},\bar{y}), \bar{p}\}$, z dowolnym procesem produkcji $(\bar{x},\bar{y}) \in Z_{opt}$, tworzy stan równowagi von Neumanna (spełnia warunki (1)—(3)).

Dowód[7]**.** Jeżeli $(\bar{x},\bar{y}) \in Z_{opt}$, to oczywiście $\alpha_M\bar{x} \leqq \bar{y}$ i zachodzi warunek (1). Weźmy graniczną przestrzeń produkcyjną Z i utwórzmy zbiór

$$C = \{c \in R^n |\ c = \alpha_M x - y, (x,y) \in Z\}.$$

Zbiór ten jest stożkiem wypukłym w R^n (jako liniowy obraz stożka Z) nie zawierającym wektorów ujemnych. Istotnie, gdyby istniał taki proces $(x',y') \in Z$, że $c' = \alpha_M x' - y' < 0$, to znalazłaby się również taka liczba $\varepsilon' > 0$, że prawdziwa byłaby nierówność $(\alpha_M + \varepsilon')x' \leqq y'$. Wówczas zachodziłby także warunek:

$$\alpha_M = \max_{(x,y)\in Z\setminus\{0\}} \alpha(x,y) \geq \alpha(x',y') \geq \alpha_M + \varepsilon',$$

co jest oczywiście niemożliwe. Zbiór

$$D = C + R^n_+ = \{c + x | c \in C, x \in R^n_+\}$$

też jest stożkiem wypukłym z wierzchołkiem w 0 (jako suma pary stożków) nadal nie zawierającym wektorów ujemnych (nie ma ich bowiem w żadnym ze

[7] Dowód warunków (1), (2) przytaczamy za Panek (2003, tw. 5.4), dowód warunku (3) jest wzorowany na Panek (2017a, tw. 4).

zbiorów C, R^n_+) oraz $C \subset D$. Natomiast do D należą wektory jednostkowe $e^i = (0, \dots, 1, \dots, 0))$, $i = 1, 2, \dots, n$. Z twierdzenia o hiperpłaszczyźnie oddzielającej wnioskujemy, że istnieje taki wektor $\bar{p} \neq 0$, że

$$\forall d \in D(\langle \bar{p}, d \rangle \geq 0).$$

Ponieważ $e^i \in D, i = 1, 2, \dots, n$, więc $\bar{p}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$. W szczególności

$$\forall c \in C(\langle \bar{p}, c \rangle \geq 0),$$

czyli

$$\forall (x, y) \in Z(\langle \bar{p}, \alpha_M x - y \rangle \geq 0),$$

tzn. zachodzi warunek (2).

Pokażemy, że jeżeli tak wyznaczony wektor cen $\bar{p}$ spełnia warunek **(G7)**, to zachodzi także warunek (3). W tym celu weźmy dowolny proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$. Z (1), (2) otrzymujemy $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle \geq 0$, natomiast zgodnie z definicją procesu optymalnego:

$$\exists k \left(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \min_i \frac{\bar{y}_i}{\bar{x}_i} = \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} = \alpha_M > 0 \right).$$

Niech $\tilde{x} = \bar{x} + e^k$, gdzie $e^k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, jest *n*-wymiarowym wektorem z *k*-tą współrzędną równą 1. W gospodarce Gale'a z graniczną technologią para $(\tilde{x}, \bar{y})$ jest procesem dopuszczalnym (w myśl **(G3)**), ale nie optymalnym, gdyż $\alpha(\tilde{x}, \bar{y}) < \alpha_M$. Wówczas, wobec **(G7)**,

$$\beta(\tilde{x}, \bar{y}, \bar{p}) < \alpha_{M.} \tag{5}$$

Załóżmy, że $\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle = 0$, wtedy $\bar{p}_k = 0$, czyli $\langle \bar{p}, \tilde{x} \rangle = \langle \bar{p}, \bar{x} \rangle$. Jednocześnie z (1), (2) wynika, że $\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle = 0$, zatem:

$$\beta(\tilde{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \tilde{x} \rangle} = \frac{\langle \bar{p}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{p}, \bar{x} \rangle} = \frac{0}{0},$$

co przeczy (5) i zamyka dowód. ■

Przy dowodach twierdzeń o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią (twierdzenia 2–4) będzie nam potrzebny następujący lemat, który jest dostosowaną do specyfiki naszego modelu wersją lematu Radnera (1961).

□ **Lemat 2.** Jeżeli spełnione są warunki **(G1)–(G7)**, to

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z \setminus \{0\} \ (d(x, \boldsymbol{N}) \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon), \quad (6)$$

gdzie

$$d(x, \boldsymbol{N}) = \inf_{x' \in \boldsymbol{N}} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\|$$

jest miarą odległości (kątowej) wektora x od wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$.
Dowód, Panek (2017a, tw. 5). ■

Warunek (6) jest równoważny z następującym:

$$\exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z(\varepsilon) (\langle \bar{p}, y \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, x \rangle), \quad (6')$$

gdzie

$$Z(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z \setminus \{0\} | d(x, \boldsymbol{N}) \geq \varepsilon \}.$$

3. DOPUSZCZALNE I OPTYMALNE PROCESY WZROSTU. TRZY TWIERDZENIA O MAGISTRALI

Standardowo przyjmujemy, że:

— ustalony jest horyzont $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$ funkcjonowania gospodarki ($t_1 < +\infty$);

— w gospodarce nakłady w okresie następnym pochodzą z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim:

$$x(t+1) \leqq y(t), t = 0, 1, \ldots, t_1 - 1,$$

co w świetle **(G3)** prowadzi do warunku:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1), t = 0, 1, \ldots, t_1 - 1; \quad (7)$$

— dany jest początkowy wektor produkcji (wytworzonej w okresie $t = 0$):

$$y(0) = y^0 \geq 0. \quad (8)$$

O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (7)–(8) mówimy, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a (z przestrzeniami produkcyjnymi $Z(t)$). Przy założeniach **(G1)–(G4)** procesy takie istnieją $\forall y^0 \geq 0$ oraz $\forall t_1 < +\infty$.

Zakładamy, że na wektorach produkcji $y \in R^n_+$ określona jest funkcja użyteczności $u: R^n_+ \to R^1_+$ o następujących własnościach:

(U1) funkcja $u: R^n_+ \to R^1_+$ jest ciągła, dodatnio jednorodna stopnia 1, wklęsła i rosnąca,

(U2) $\exists a > 0\ \forall\, y \geq 0\ (u(y) \leq a\, \langle \bar{p}, y \rangle)$,

(U3) $\forall s \in S\ (u(s) > 0)$.

Zgodnie z **(U2)** funkcję użyteczności aproksymuje z góry forma liniowa z wektorem współczynników $a\bar{p}$, gdzie $a > 0$ oraz $\bar{p}$ jest wektorem cen von Neumanna. Warunek **(U1)** ma standardową postać. Warunki **(U1)–(U3)** spełniają m.in. dodatnio jednorodne stopnia 1 funkcje użyteczności typu CES.

Interesuje nas zadanie maksymalizacji użyteczności produkcji wytworzonej w końcowym okresie t_1 horyzontu T[8]:

$$\begin{gathered} \max u\big(y(t_1)\big) \\ \text{p.w. (7) –(8)} \\ (\text{wektor } y^0 \text{ ustalony}). \end{gathered} \tag{9}$$

Rozwiązanie zadania (9) nazywamy (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią i oznaczamy przez $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$.

Zakładamy, że gospodarka Gale'a z graniczną technologią spełnia następujący warunek mówiący o możliwości jej dojścia ze stanu początkowego y^0 do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$[9]:

(G8) Istnieje $(y^0, \check{t} + 1)$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}$, $\check{t} < t_1$, w którym:

$$\alpha\big(\check{y}(\check{t}), \check{y}(\check{t}+1)\big) = \alpha_M.$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\check{y}=\check{y}(\check{t}),\ \check{s} = \frac{\check{y}}{\|\check{y}\|},\ \check{y}(t) = \alpha_M^{t-\check{t}}\check{y}, t = \check{t}+1, \ldots, t_1, \tag{10}$$

z **(G1)–(G5)** otrzymujemy:

$$(\check{y}, \alpha_M \check{y}) \in Z(\check{t}+1) \subseteq Z,$$

czyli $(\check{y}, \alpha_M \check{y}) \in Z_{opt}$ (równoważnie $(\check{s}, \alpha_M \check{s}) \in Z_{opt}$) oraz

$$\check{y}(t) \in N_{\check{s}}, t = \check{t}+1, \ldots, t_1, \tag{11}$$

gdzie półprosta (promień von Neumanna)

[8] Tzw. zadanie wzrostu docelowego. Przy założeniach **(G1)**–**(G7)**, **(U1)** zadanie to ma rozwiązanie, zob. Panek (2017b, p. 4, zad. (24')–(25')).

[9] Zob. np. Panek (2017a, lemat 1).

$$N_{\check{s}} = \{\lambda \check{s} | \lambda > 0\} \in \boldsymbol{N}$$

jest pojedynczą magistralą produkcyjną wyznaczoną przez wektor $\check{s} = \frac{\check{y}}{\|\check{y}\|}$ struktury produkcji w optymalnym procesie $(\check{y}, \alpha_M \check{y}) \in Z_{opt}$.

Warunek **(G8)** zapewnia, że po dojściu w okresie $\check{t}$ do wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$ (dokładniej, do jednego z tworzących ją promieni $N_{\check{s}} \in \boldsymbol{N}$) gospodarka może rozwijać się dalej (zwiększać produkcję) zgodnie z (10) w tempie α_M, pozostając równocześnie cały czas na magistrali (zob. (11)). Jest to najwyższe tempo wzrostu produkcji możliwe do osiągnięcia w gospodarce Gale'a. Bez względu na stan początkowy (8), nie istnieje bowiem ani jeden dopuszczalny proces $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym choćby raz zachodził warunek $y(t+1) \geqq \gamma y(t)$ z tempem $\gamma > \alpha_M$. Istotnie, zakładając

$$y(t+1) \geqq \gamma y(t) \; (\gamma > \alpha_M)$$

i pamiętając, że

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1) \; \subseteq Z$$

dochodzimy do sprzeczności:

$$\alpha_M = \max_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x,y) \geq \alpha\big(y(t), y(t+1)\big) \geq \gamma > \alpha_M.$$

Procesy wzrostu postaci (10) nazywamy optymalnymi stacjonarnymi procesami w gospodarce Gale'a. Wszystkie biegną po wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$ złożonej z wiązki pojedynczych promieni $N_s, s \in S$.

□ **Twierdzenie 2** („Słabe" twierdzenie o wielopasmowej magistrali). Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G8)** oraz funkcja użyteczności charakteryzuje się własnościami **(U1)–(U3)**, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, iż liczba okresów czasu, w których (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$d(y^*(t), \boldsymbol{N}) \geq \varepsilon \tag{12}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód.[10] Z definicji (y^0, t_1, u) – optymalnego procesu wzrostu, w świetle twierdzenia 1, zgodnie z (2) (wobec **(G5)**, (7)) mamy:

[10] Dowód przytaczamy za Panek (2017a, tw. 6) z tą różnicą, że przy dowodzie twierdzenia 6 w pracy Panek (2017a) korzystamy z warunku (silnej) regularności granicznej przestrzeni produkcyjnej Z, który obecnie zastępujemy znacznie słabszym warunkiem **(G7).**

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1)\rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t)\rangle, \qquad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1 \tag{13}$$

Załóżmy, że w okresach $0 \leq \tau_1, \dots, \tau_k < t_1$ zachodzi warunek (12). Wówczas, w myśl lematu 2 (warunek (6')) istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1)\rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \bar{p}, y^*(t)\rangle,\ t = \tau_1, \dots, \tau_k.$$

Stąd i z (13) otrzymujemy nierówność:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_M^{t_1-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0\rangle,$$

co po uwzględnieniu własności **(U2)** funkcji użyteczności u prowadzi do górnego ograniczenia jej wartości w punkcie $y^*(t_1)$:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \leq a\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq a\alpha_M^{t_1-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0\rangle. \tag{14}$$

Z drugiej strony, jeżeli zachodzi warunek **(G8)**, to (y^0, t_1) – dopuszczalny jest proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ następującej postaci:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \check{y}(t), t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \rho \check{s} \alpha_M^{t-\check{t}}, t = \check{t}+1, \dots, t_1, \end{cases}$$

gdzie $\rho = \|\check{y}(\check{t})\| > 0$, $\check{s} = \frac{\check{y}(\check{t})}{\|\check{y}(\check{t})\|} \in S$. Zważywszy na własność **(U3)** funkcji użyteczności dostajemy:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \geq u\big(\tilde{y}(t_1)\big) = u\left(\rho \check{s} \alpha_M^{t_1-\check{t}}\right) = \rho \alpha_M^{t_1-\check{t}} u(\check{s}) > 0. \tag{15}$$

Z (14), (15) wynika nierówność:

$$0 < \rho \alpha_M^{t_1-\check{t}} u(\check{s}) \leq a\alpha_M^{t_1-k}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)^k \langle \bar{p}, y^0\rangle,$$

która pozwala na oszacowanie liczby k:

$$k \leq \frac{\ln A}{\ln \alpha_M - \ln(\alpha_M - \delta_\varepsilon)} = B,$$

gdzie $0 < A = \max\limits_{s \in S} \frac{a\alpha_M^{\check{t}}\langle \bar{p}, y^0\rangle}{\rho u(s)} < +\infty$. W charakterze liczby k_ε, o której mowa w tezie, wystarczy wziąć np. najmniejszą liczbę naturalną większą od $\max\{0, B\}$. ■

Twierdzenie głosi, że w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią optymalne procesy wzrostu, niezależnie od długości horyzontu T, „prawie zawsze" przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu wielopasmowej magistrali[11]. Nie precyzuje jednak w której fazie wzrostu optymalne procesy zbliżają się do magistrali, czy są zbieżne w sensie Lapunowa, czy asymptotycznie etc. Mówią o tym kolejne dwa twierdzenia. Dowód „bardzo silnego" twierdzenia o magistrali (twierdzenie 4) wymaga jedynie pewnej modyfikacji warunku **(U3)** nakładanego na postać funkcji użyteczności. Przy dowodzie „silnego" twierdzenia o magistrali (twierdzenie 3) potrzebne są dodatkowe warunki **(G9)–(G11)**, które formułujemy poniżej.

Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ i oznaczmy przez $Z(\varepsilon)$ zbiór dopuszczalnych procesów produkcji z nakładami odległymi o co najmniej ε od wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$ (w sensie metryki $d(\cdot)$, zob. lemat 2):

$$Z(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z \setminus \{0\} | d(x, \boldsymbol{N}) \geq \varepsilon \}.$$

Zgodnie z lematem 2 (warunek (6')) efektywność ekonomiczna $\beta(x, y, \bar{p})$ każdego procesu $(x, y) \in Z(\varepsilon)$ jest niższa od optymalnej o co najmniej $\delta_\varepsilon > 0$. W kolejnych lematach 3, 4 prezentujemy niektóre własności funkcji $\beta(\cdot, \cdot, \bar{p})$ potrzebne przy dowodzie „silnego" twierdzenia o wielopasmowej magistrali.

□ **Lemat 3.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)—(G7)**, to:

(i) $\beta(\cdot, \cdot, \bar{p}) \in C^0(Z(\varepsilon) \to R^1_+)$,
(2i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \max\limits_{(x,y) \in Z(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon) < \alpha_M$.

Dowód, Panek (2017b, Fakt 1, 2). ■

Wprowadzając oznaczenie $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$ możemy warunek (2i) lematu 3 zapisać równoważnie tak[12]:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M] \ \forall (x, y) \in Z(\varepsilon) \big(\beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta(\varepsilon)\big). \tag{16}$$

Funkcja $b(\cdot)$ jest nierosnąca (tam gdzie jest określona), $b(\varepsilon) \to \alpha_M$ przy $\varepsilon \to 0$, zatem $\delta(\varepsilon) \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$. Przy dowodzie „silnego" twierdzenia o magistrali zakładamy monotoniczność funkcji $b(\cdot)$:

(G9) Funkcja $b(\cdot)$ maleje (równoważnie, funkcja $\delta(\cdot)$ rośnie) na obszarze określoności.

Zgodnie z tym warunkiem maksymalna efektywność ekonomiczna procesu $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$ w gospodarce z graniczną technologią maleje w miarę oddalania się, w sensie metryki $d(\cdot)$, nakładów x od wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$. Warunek

[11] Zawsze, poza skończoną liczbą okresów czasu niezależną od długości horyzontu T.
[12] Liczba $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ jest największą liczbą spełniającą warunek (6).

jest spełniony w szczególności, gdy wszędzie poza Z_{opt} graniczna przestrzeń produkcyjna Gale'a jest stożkiem silnie wypukłym: dla dowolnych liczb $\alpha, \beta > 0$ i każdej pary liniowo niezależnych procesów $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in Z \setminus Z_{opt}$ ich kombinacja liniowa $(x, y) = \alpha(x^1, y^1) + \beta(x^2, y^2)$ jest punktem wewnętrznym przestrzeni produkcyjnej Z.

O zbiorze S wektorów struktury produkcji w optymalnych procesach $(x, y) \in Z_{opt}$ zakładamy, że spełnia ponadto następujący warunek:

(G10) $\exists\, I = \{i_1, i_2, \dots, i_k | 0 < k \leq n\}\ \forall s \in S\ \big(i \in I \Rightarrow s_i > 0\ \wedge j \notin I \Rightarrow s_j = 0\big)$.

Ponieważ $(x, y) \in Z_{opt}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s = \frac{y}{\|y\|} \in S$, warunek ten mówi, że w każdym optymalnym procesie produkcji $(x, y) \in Z_{opt}$ wytwarzane są wyłącznie towary $i_1, i_2, \dots, i_k$.[13]

□ **Lemat 4.** Jeżeli zachodzą warunki **(G1)-(G6)** oraz **(G10)**, to

$$\forall s \in S_+^n(1)\ \forall \bar{s} \in S\ \exists \sigma(s, \bar{s}) \in (0,1]\ \forall \delta \in (0, \alpha_M)\ \exists \varepsilon' > 0$$
$$\Big(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow \big((s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \wedge \alpha(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta\big)\Big),$$

gdzie: $S_+^n(1) = \{x \in R_+^n \| x \| = 1\}, \Omega(1) = \{(x, y) \in Z | \|x\| = 1\}$.
Dowód[14]. Weźmy wektor $\bar{s} \in S \subset S_+^n(1)$. Niech $I = \{i |\, \bar{s}_i > 0\}$. Pokażemy, że istnieje takie $\tilde{\varepsilon}$ – otoczenie wektora $\bar{s} \in S\ w\ S_+^n(1)$:

$$U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) = \{s \in S_+^n |\ \|s - \bar{s}\| < \tilde{\varepsilon}\},$$

że $\forall s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s})\ \forall i \in I (s_i > 0)$. Niech $\tilde{\varepsilon} = \min_{i \in I} \bar{s}_i = \bar{s}_k > 0$ oraz $s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s})$. Wówczas

$$\forall i \in I(|s_i - \bar{s}_i| \leq \|s - \bar{s}\| < \bar{s}_k),$$

tzn. $-\bar{s}_k < s_i - \bar{s}_i < \bar{s}_k$, czyli $s_i > \bar{s}_i - \bar{s}_k \geq 0$.

Zważywszy że $\|s\| = \|\bar{s}\| = 1$ stwierdzamy, że istnieje liczba

$$\lambda(s, \bar{s}) = \min\{\lambda | \lambda s \geqq \bar{s}\} = \max_{i \in I} \frac{\bar{s}_i}{s_i} \geq 1.$$

---

[13] Nie wyklucza to w szczególności przypadku, gdy $k = n$, tj. gdy w każdym optymalnym procesie wytwarzane są wszystkie towary, zob. Panek (2016b, 2017b).

[14] W pracy Panek (2017b) elementami zbioru S wektorów struktury produkcji we wszystkich optymalnych procesach $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt}$ są wektory dodatnie, obecnie mogą to być wektory półdodatnie. Lemat jest zmienioną (dostosowaną do specyfiki obecnego modelu) wersją Faktu 3 z tejże pracy.

Ponieważ $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \subset Z$, więc z **(G3)** dostajemy $(\lambda(s,\bar{s})s, \alpha_M \bar{s}) \in Z$, czyli

$$(s, \sigma(s,\bar{s})\alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1), \tag{17}$$

gdzie $\sigma(s,\bar{s}) = \frac{1}{\lambda(s,\bar{s})} \leq 1$, funkcja $\sigma(\cdot,\bar{s})$ jest ciągła w otoczeniu punktu $\bar{s}$ i $\sigma(\bar{s},\bar{s}) =$ $= 1$.

Funkcja α jest ciągła w otoczeniu $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s})$ oraz

$$\alpha(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) = \max_{(x,y)\in\Omega(1)} \alpha(x,y) = \alpha_M,$$

Więc

$$\forall \delta \in (0, \alpha_M) \exists \varepsilon' > 0 (\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \leq \tilde{\varepsilon} \Rightarrow \alpha(s, \sigma(s,\bar{s})\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta). \tag{18}$$

Z (17), (18) wynika teza. ■

Lemat głosi, że jeżeli wektor (unormowanych) nakładów s leży blisko któregokolwiek wektora $\bar{s}$ (struktury produkcji na wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$), to istnieje proces, który (z efektywnością dowolnie bliską optymalnej) z nakładów s prowadzi do wielopasmowej magistrali.

Zgodnie z warunkiem **(G8)**, począwszy od okresu $\check{t}$ w gospodarce mamy co najmniej jeden promień $N_{\check{s}} \in \boldsymbol{N}$, na którym może ona rozwijać się (zwiększać produkcję) w maksymalnym tempie α_M[15]. Warunek **(G11)**, który formułujemy poniżej, rozszerza z czasem tę możliwość na wszystkie promienie von Neumanna (pojedyncze magistrale produkcyjne) $N_s, s \in S$, składające się na wielopasmową magistralę. Dodatkowo stanowi, że okresy t_s sukcesywnego udostępniania gospodarce kolejnych „pasów szybkiego ruchu" (promieni von Neumanna) N_s na wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$ nie przekraczają pewnego granicznego okresu $\bar{t} < +\infty$:

(G11) $\exists \bar{t} < +\infty \ \forall s \in S \ \exists t_s < \bar{t} \left((s, \alpha_M s) \in Z(t_s + 1) \subseteq \cdots \subseteq Z \right)$.

Jeżeli horyzont T jest dostatecznie długi, $t_1 > \bar{t}$, to

$$\forall s \in S \ \forall y^s \in N_s \left((y^s, \alpha_M y^s) \in Z(t_s + 1) \subseteq Z(t_s + 2) \subseteq \cdots \subseteq Z \right),$$

co oznacza, że dla $t_1 > \bar{t}$:

$$\forall s \in S \ \forall N_s \in \boldsymbol{N} \ \forall y^s \in N_s \ \forall t \in \{t_s + 1, \dots, t_1\} \left(y^s(t) = \alpha_M^{t-t_s} y^s \in N_s \right).$$

[15] Promień (pojedyncza magistrala) $N_s \in \boldsymbol{N}$ jest swoistym „pasem szybkiego ruchu" gospodarki na wielopasmowej magistrali, dostępnym od okresu $t = \check{t} + 1$.

Po granicznym okresie $\bar{t}$ wszystkie optymalne procesy produkcji są w zasięgu możliwości technologicznych gospodarki:

$$Z_{opt} \subset Z(t) \text{ dla } t \geq \bar{t}.$$

Zakładamy ponadto, że funkcja użyteczności zamiast warunku **(U3)** spełnia następujący (silniejszy) warunek:

(U3') $\forall s \in S\ (u(s) = a\ \langle \bar{p}, s\rangle\ > 0).$ [16]

□ **Twierdzenie 3** („Silne " twierdzenie o magistrali). Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią. Jeżeli spełnione są warunki **(G1)–(G11), (U1)**, **(U2)**, **(U3')**, to

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall t_1 > \bar{t} + 2k_\varepsilon$$
$$\forall t \in \{\bar{t} + k_\varepsilon, \bar{t} + \ k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\}\ (d(y^*(t), \boldsymbol{N}) < \varepsilon)$$

($\mathbb{N}$ oznacza tutaj zbiór liczb naturalnych).

Dowód[17]. Pokażemy najpierw, że

$$\exists \tilde{\varepsilon} > 0\ \forall \bar{s} \in\ S\left(s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) \Rightarrow \forall i \in I(s_i > 0)\right) \tag{19}$$

gdzie $U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s}) = \{s \in S_+^n | \|s - \bar{s}\| < \tilde{\varepsilon}\}$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Istotnie, ponieważ zbiór S $\subset R_+^n$ jest zwarty, to wobec **(G10)**

$$\forall i\ \in I\ \exists\ \nu_i = \min_{s \in S} \bar{s}_i > 0.$$

Niech $\tilde{\varepsilon} = \min_{i \in I} \nu_i = \nu_k = \nu > 0,\ \bar{s} \in\ S$ oraz $s \in U_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{s})$. Wówczas (podobnie jak przy dowodzie lematu 4) stwierdzamy, że

$$\forall i \in I(|s_i - \bar{s}_i| \leq \|s - \bar{s}\| < \nu),$$

tzn. $-\nu < s_i - \bar{s}_i < \nu$, czyli $s_i > \bar{s}_i - \nu \geq 0$.

[16] Warunek ten jest równoważny z następującym: $\forall y \in \boldsymbol{N}\ (u(y) = a\ \langle \bar{p}, y\rangle\ > 0)$. Głosi, że forma liniowa $H_{a\bar{p}}(y) = a\langle \bar{p}, y\rangle$ aproksymująca z góry funkcję użyteczności u jest (wzdłuż wielopasmowej magistrali) styczna do jej wykresu.

[17] Dowód wzorowany na Panek (2017b, tw. 2).

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, liczbę $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M]$ spełniającą warunek (16), liczbę $\delta \in \big(0, \delta(\varepsilon)\big)$ oraz odpowiadającą jej liczbę $\varepsilon' \in (0, \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\})$ z lematu 4. Zgodnie ze „słabym" twierdzeniem o magistrali istnieje taka liczba naturalna $k_{\varepsilon'}$, że jeżeli $t_1 > k_{\varepsilon'}$, to

$$d(y^*(\tau_1), \boldsymbol{N}) < \varepsilon'. \tag{20}$$

co najmniej w jednym okresie $t < t_1$. Niech $t_1 > \bar{t} + 2k_{\varepsilon'}$. Przez $\tau_1 > \bar{t}$ oznaczmy pierwszy (po $\bar{t}$), a przez τ_2 ostatni okres horyzontu T, w którym zachodzi warunek (20). Wówczas

$$\exists \bar{s} \in S\ \exists k \leq n(\bar{s}_i > 0, i = i_1, i_2, \dots, i_k \wedge \parallel s^*(\tau_1) - \bar{s}\| = d(y^*(\tau), \boldsymbol{N}) < \varepsilon').$$

gdzie $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} \geq 0$. W świetle (19), zważywszy że $\varepsilon' \ \leq \tilde{\varepsilon}$, mamy

$$\frac{y_i^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} > 0,\ i = i_1, i_2, \dots, i_k,$$

a w myśl lematu 4:

$$\left(\frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}, \sigma^* \alpha_M \bar{s}\right) \in\ \Omega(1),$$

tzn.

$$(y^*(\tau_1), \rho\sigma^* \alpha_M \bar{s}) \in Z, \tag{21}$$

oraz $\alpha(s^*(\tau_1), \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta$, gdzie $\sigma^* = \sigma(s^*(\tau_1), \bar{s}), \rho = \|y^*(\tau_1)\| > 0$.

Ponieważ $\tau_1 > \bar{t}$, więc zgodnie z **(G11)**:

$$(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in\ Z(t_{\bar{s}} + 1) \subseteq Z(\bar{t}) \subseteq \cdots Z(\tau_1) \subseteq \cdots \subseteq Z,$$

czyli (wobec **(G1)**):

$$(\rho\sigma^* \alpha_M \bar{s}, \rho\sigma^* \alpha_M^2 \bar{s}) \in\ Z(\tau_1 + 1) \subseteq \cdots \subseteq Z,$$

$$(\rho\sigma^* \alpha_M^2 \bar{s}, \rho\sigma^* \alpha_M^3 \bar{s}) \in\ Z(\tau_1 + 2) \subseteq \cdots \subseteq Z,$$

itd. Stąd i z (21) płynie wniosek, że (y^0, t_1) – dopuszczalny jest następujący proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), t = 0, 1, \dots, \tau_1, \\ \rho\sigma^* \alpha_M^{t-\tau_1} \bar{s}, t =\ \tau_1 + 1, \dots, t_1. \end{cases}$$

Z definicji procesu optymalnego $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (zważywszy na dodatnią jednorodność stopnia 1 funkcji użyteczności) wynika, że:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \geq \rho\sigma^*\alpha_M^{t_1-\tau_1}u(\bar{s}) > 0. \tag{22}$$

Załóżmy, że k' jest liczbą okresów (między τ_1, τ_2), w których

$$d(y^*(t), \boldsymbol{N}) \geq \varepsilon.$$

Z (2), (6') (wobec **(G5)**, (7)) otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle\big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{t_1-\tau_2}\alpha_M^{t_1-\tau_2-k'}\big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{k'}\langle \bar{p}, y^*(\tau_1)\rangle.$$

czyli (ze względu na własność **(U2)** funkcji użyteczności):

$$\begin{gathered} u\big(y^*(t_1)\big) \leq a\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq a\big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{t_1-\tau_2}\alpha_M^{t_1-\tau_2-k'} \\ \big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{k'}\langle \bar{p}, y^*(\tau_1)\rangle, \end{gathered} \tag{23}$$

przy czym $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon)$ (gdyż funkcja $\delta(\cdot)$ jest rosnąca, zob. **(G9)**), zatem $\delta(\varepsilon) < \alpha_M$. Łącząc (22), (23) dochodzimy do nierówności:

$$0 < \rho\sigma^*\alpha_M^{t_1-\tau_1}u(\bar{s}) \leq aa\big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{t_1-\tau_2}\alpha_M^{t_1-\tau_2-k'}\big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{k'}\langle \bar{p}, y^*(\tau_1)\rangle,$$

którą (zważywszy na własność **(U3')** funkcji użyteczności oraz pamiętając, że, $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}$, $\langle \bar{p}, s^*(\tau_1)\rangle > 0$ oraz $\rho = \|y^*(\tau_1)\| > 0$) można zapisać inaczej tak:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2}\left(\frac{\sigma^*\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1)\rangle}\right) \tag{24}$$

W myśl lematu 4:

$$\alpha = \alpha(s^*(\tau_1), \sigma^*\alpha_M\bar{s}) \geq \alpha_M - \delta,$$

Więc $\alpha s^*(\tau_1) \leq \sigma^*\alpha_M\bar{s}$, oraz $(\alpha_M - \delta)s^*(\tau_1) \leq \sigma^*\alpha_M\bar{s}$. Wówczas:

$$(\alpha_M - \delta)\langle \bar{p}, s^*(\tau_1)\rangle \leq \sigma^*\alpha_M\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle,$$

czyli

$$\frac{\sigma^*\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1)\rangle} \geq \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}$$

Stąd i z (24) dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}$$

Pamiętając, że $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon) < \alpha_M$ oraz $\delta \in \big(0, \delta(\varepsilon)\big)$ i $t_1 - \tau_2 \geq 0$, dochodzimy do nierówności:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} > \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M},$$

z której wynika, że $\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'-1} > 1$ lub równoważnie $\big(\alpha_M - \delta(\varepsilon)\big)^{k'-1} > \alpha_M^{k'-1}$. Jedyną nieujemną liczbą całkowitą spełniającą ten warunek jest $k' = 0$. W charakterze liczby k_ε, o której mowa w tezie twierdzenia, można przyjąć $k_\varepsilon = k_{\varepsilon'}$. ■

Udowodnione „silne” twierdzenie o wielopasmowej magistrali pokazuje, że w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią optymalne procesy wzrostu przebiegają zawsze w pobliżu wielopasmowej magistrali $\boldsymbol{N}$, za wyjątkiem ewentualnie początkowych i/lub końcowych okresów horyzontu T. Im dłuższy jest horyzont, tym dłużej – w jego środkowym okresie – wszystkie optymalne procesy wzrostu pozostają w dowolnie bliskim otoczeniu wielopasmowej magistrali.

Kolejne twierdzenie wyjaśnia co się dzieje z optymalnym procesem, który w pewnym okresie dociera do magistrali.

□ **Twierdzenie 4** („Bardzo silne ” twierdzenie o magistrali). Jeżeli spełnione są warunki **(G1)–(G7), (U1), (U2), (U3’)** i $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w okresie $\check{t} < t_1$ spełnia warunek:

$$\alpha\big(y^*(\check{t}), y^*(\check{t}+1)\big) = \alpha_M$$

(dociera w okresie $\check{t}$ do wielopasmowej magistrali), to

$$\forall t \in \{\check{t}+1, \dots, t_1 - 1\}\ (y^*(t) \in \boldsymbol{N}).$$

Dowód. Jeżeli w okresie $\check{t} < t_1$ optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ dociera do magistrali, wówczas istnieje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \rho\bar{s}\alpha_M^{t-\check{t}}, t = \check{t}+1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$\rho = \|y^*(\check{t})\| > 0$, $\bar{s} = \frac{y^*(\check{t})}{\|y^*(\check{t})\|} \in S$, co prowadzi do nierówności:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \geq u\big(\tilde{y}(t_1)\big) = \rho\alpha_M^{t_1-\check{t}} u(\bar{s}) > 0. \tag{25}$$

Z warunku $\alpha\big(y^*(\check{t}), y^*(\check{t}+1)\big) = \alpha_M$ wynika, że $y^*(\check{t}+1) \in \boldsymbol{N}.$ Załóżmy, że $y^*(\tau) \notin \boldsymbol{N}$ w pewnym okresie $\tau \in \{\check{t}+2, \dots, t_1 - 1\}$. Wówczas

$$\exists \varepsilon > 0 \; (d(y^*(\tau), \boldsymbol{N}) \geq \varepsilon),$$

i zgodnie z (6') istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że

$$\langle \bar{p}, y^*(\tau+1)\rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \bar{p}, y^*(\tau)\rangle. \tag{26}$$

Pamiętając, że $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces spełnia warunek (13), po uwzględnieniu (26) otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_M^{t_1-\check{t}-1}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \bar{p}, y^*(\check{t})\rangle,$$

gdzie $y^*(\check{t}) = \rho\bar{s},$ a stąd (wobec **(U2)**):

$$u\big(y^*(t_1)\big) \leq a\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq a\rho\alpha_M^{t_1-\check{t}-1}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle. \tag{27}$$

Łącząc (25), (27) dostajemy nierówność:

$$a\rho\alpha_M^{t_1-\check{t}-1}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle \geq \rho\alpha_M^{t_1-\check{t}}u(\bar{s}) > 0.$$

Warunek **(U3')** stanowi, że $a\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle = u(\bar{s})$ co prowadzi do nierówności:

$$\frac{\alpha_M - \delta_\varepsilon}{\alpha_M} \geq 1,$$

z której wynika, że $\delta_\varepsilon \leq 0$, wbrew (6'). Otrzymana sprzeczność zamyka dowód.■

4. UWAGI KOŃCOWE

Postulowana w pracy niestacjonarność (zmienność) technologii jest w długich okresach czasu zgodna z przebiegiem realnych procesów gospodarczych. Natomiast hipoteza zbieżności technologii – będącej wytworem potęgi umysłu ludzkiego – do pewnej technologii granicznej (zakładająca implicite, przynajmniej w wymiarze technologicznym, istnienie nieprzekraczalnych granic rozwoju naszej cywilizacji) może już budzić zastrzeżenia. Na pewno jest trudna do weryfikacji empirycznej.

Choćby dlatego w dalszych badaniach warto przyjrzeć się stabilności optymalnych procesów wzrostu w niestacjonarnych gospodarkach input-output typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa z wielopasmowymi magistralami, ale bez założenia o zbieżności ich technologii do hipotetycznej technologii granicznej. Wielopasmowe magistrale będą wówczas reprezentowane przez wiązki krzywych w przestrzeniach fazowych takich gospodarek lub przez (zmieniające się w czasie) wiązki promieni von Neumanna w ich przestrzeniach stanów[18].

Znacznie trudniejszym i dlatego tym bardziej interesującym w dalszej perspektywie problemem jest uwzględnienie, obok postulatu niestacjonarności gospodarki, także faktu zmieniającej się liczby towarów (zużywanych i/lub wytwarzanych).

Do prześledzenia pozostaje także przebieg optymalnych procesów w długich okresach czasu ocenianych z perspektywy szerszego wachlarza kryteriów wzrostu[19].

LITERATURA

Gantz D., (1980), A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48 (7), 1977–90.

Joshi S., (1997), Turnpike Theorems in Nonconvex Nonstationary Envirenments, International Economic Review, 38 (1), 225–248.

Keeler E. B., (1972), *A Twisted Turnpike*, International Economic Review, 13 (1), 160–166.

Makarov V. L., Rubinov A. M., (1977), *Mathematical Theory of Economic Dynamic and Equilibrium*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

Mc Kenzie L. W., (2005), Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, w: Arrow K. J., Intriligator M. D., (red.), *Handbook of Mathematical Economics*, wyd. 2, wol. III, rozdział 26, 1281–1355.

McKenzie L. W., (1976), Turnpike Theory, *Econometrica*, 44 (5), 841–866.

Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York.

Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wyd. AEP, Poznań.

Panek E., (2016a), "Silny" efekt magistrali w modelu niestacjonarnej gospodarki Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 63 (2), 109–121.

Panek E., (2016b), Gospodarka Gale'a z wieloma magistralami. „Słaby" efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 63 (4), 356–374.

Panek E., (2017a), „Słaby" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią i wielopasmową magistralą produkcyjną, w: Appenzeller D., (red.), *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, Wyd. UEP, 94–110.

Panek E., (2017b), Gospodarka Gale'a z wieloma magistralami. „Silny" i „bardzo silny" efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 64 (2), 137–152.

Radner R., (1961), Path of Economic Growth that are Optimal with Regard to Final States: A Turnpike Theorem, *Review* of Economic Studies, 28 (2), 98–104.

Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.

---

[18] A nie przez pojedyncze półproste (promienie von Neumanna), jak to ma miejsce w gospodarkach stacjonarnych. Należy zauważyć, że jest to jak dotąd stosunkowo słabo zbadany rozdział teorii magistral. Do nielicznych znanych autorowi prac poświęconych efektowi tzw. zakrzywionej magistrali w modelach niestacjonarnych gospodarek typu input-output należą m.in. artykuły Gantz (1980), Joshi (1997), Keeler (1972). W pracach tych magistrale są reprezentowane przez pojedyncze promienie, a nie ich wiązki w przestrzeniach stanów.

[19] Nie tylko maksymalizacji użyteczności produkcji w końcowym okresie horyzontu T, ale także np. kryterium maksymalizacji sumy użyteczności produkcji w całym horyzoncie T, z uwzględnieniem dyskonta etc.

**NIESTACJONARNA GOSPODARKA GALE'A
Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ
I WIELOPASMOWĄ MAGISTRALĄ PRODUKCYJNĄ.
„SŁABY", „SILNY" I „BARDZO SILNY" EFEKT MAGISTRALI**

Streszczenie

W pracach Panek (2016a, 2016b) zaproponowano uogólnienie pojęcia magistrali w stacjonarnej gospodarce typu Gale'a poprzez zastąpienie pojedynczej magistrali (pojedynczego promienia v. Neumanna) przez zwartą wiązkę magistral, którą nazwano magistralą wielopasmową. Udowodniono w nich tzw. „słabą" wersję twierdzenia o wielopasmowej magistrali (a) w stacjonarnej gospodarce Gale'a ze stałą (niezmienną w czasie technologią produkcji) oraz (b) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z technologią zbieżną z czasem do pewnej technologii granicznej. W niniejszym artykule, w nawiązaniu do w/w prac, przy częściowo zmodyfikowanych założeniach przedstawiono – obok dowodu „słabego" twierdzenia – także dowód „silnego" oraz „bardzo silnego" twierdzenia o wielopasmowej magistrali w niestacjonarnej gospodarce z technologią zbieżną z czasem do pewnej technologii granicznej.

Słowa kluczowe: niestacjonarna gospodarka Gale'a, równowaga chwilowa von Neumanna, wielopasmowa magistrala produkcyjna

**NON-STATIONARY GALE ECONOMY WITH LIMITED TECHNOLOGY
AND MULTILANE TURNPIKE. "WEAK", "STRONG"
AND "VERY STRONG" TURNPIKE THEOREM**

Abstract

I*n the author's previous papers (2016a, 2016b) the generalized concept of turnpike in the stationary Gale's economy has been proposed – a single turnpike (single von Neumann's ray) has been replaced with a compact bundle of turnpikes and it has been called multilane turnpike. It has been proven that the "weak" turnpike theorem holds in (a) stationary Gale's economy with fixed (unchangeable in time) production technology and in (b) non-stationary Gale's economy with technology convergent with time to a limit technology. In this article, in reference to the aforementioned papers, alongside with the "weak" turnpike theorem, the proof of the "strong" and "very strong" turnpike theorem has been presented for the partially modified assumptions in a non-stationary economy with multilane turnpike and with technology convergent with time to a limit technology.*

Keywords: non-stationary Gale model, von Neumann temporary equilibrium, multilane production turnpike