



**Adrianna Mastalerz-Kodzis**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Zarządzania  
Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki  
adrianna.mastalerz-kodzis@ue.katowice.pl

**Ewa Pośpiech**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Zarządzania  
Katedra Statystyki, Ekonometrii i Matematyki  
ewa.pospiech@ue.katowice.pl

## STOCHASTYCZNA ANALIZA RYZYKA SZEREGÓW CZASOWYCH

**Streszczenie:** Celem artykułu jest pomiar ryzyka w przypadku stacjonarnych i niestacjonarnych szeregów czasowych. Jako narzędzie do oceny ryzyka wykorzystano funkcję Höldera generującą multiułamkowe procesy ruchów Browna. Za pomocą wybranych metod badania szeregów czasowych przeanalizowano zmienność kursów walut: USD/PLN, EUR/PLN oraz CHF/PLN. Biorąc pod uwagę historyczne i obecne trendy w szeregach czasowych oraz wartości miary zmienności wyciągnięto wnioski z badań. Artykuł składa się z dwóch części zasadniczych: elementów metodyki badań oraz analizy empirycznej.

**Słowa kluczowe:** modelowanie szeregów czasowych, stacjonarne i niestacjonarne procesy stochastyczne, pomiar ryzyka.

**JEL Classification:** G19.

### Wprowadzenie

Podczas analiz rynku kapitałowego rozważa się dwie hipotezy: rynku efektywnego<sup>1</sup> i rynku zachowującego pamięć<sup>2</sup>. W licznych opracowaniach naukowych teoretycznych, a także w pracach natury empirycznej podważa się efektywność rynku kapitałowego. Uważa się, że istnieje pamięć (zawarta w strukturze walo-

<sup>1</sup> Rynek efektywny wg E.E. Famy [1970] to taki, w którym cena dyskontuje dostępne informacje, wszystkie istotne zdarzenia mogące wpływać na cenę są już w niej uwzględnione.

<sup>2</sup> Istnienie korelacji pomiędzy kolejnymi wartościami szeregu, istnienie pamięci potwierdza hipoteza rynku fraktalnego (zob. [Mandelbrot, 1997]).

rów), krótka i długa<sup>3</sup>. Niniejszy artykuł wpisuje się w drugi nurt – istnienia pamięci w ekonomicznych i finansowych szeregach czasowych.

W modelowaniu zjawisk i procesów ekonomicznych, w szczególności finansowych, często mamy do czynienia ze zmiennymi losowymi zależnymi od parametru. Najczęściej tym parametrem jest czas  $t$ . Między innymi notowania akcji na giełdzie, a także kursy walutowe można modelować za pomocą procesów stochastycznych [Sobczyk, 1996]. Procesy stochastyczne obrazujące zjawiska zachodzące w ekonomii, w finansach, bardzo często są niestacjonarne, ich własności zmieniają się dynamicznie pod wpływem czasu. Nie można wówczas wyznaczać charakterystyk dotyczących wartości szeregu globalnie – w całym badanym przedziale czasu, należy analizować własności lokalnie<sup>4</sup>. Ponadto, na GPW w Warszawie występują notowania ciągłe wielu walorów, rozważa się szeregi czasowe o wysokich częstotliwościach. Wówczas, z matematycznego punktu widzenia, dobrym narzędziem do modelowania są procesy stochastyczne z czasem ciągłym. Istnieje potrzeba wprowadzenia metodyki analizy ryzyka tego typu szeregów.

Analiza ryzyka w przypadku szeregów stacjonarnych jest już dobrze w literaturze opisana<sup>5</sup>. Stałość charakterystyk w czasie pozwala na pomiar ryzyka globalnie. W przypadku szeregów niestacjonarnych wyznaczanie globalnej miary ryzyka jest nieuzasadnione, bowiem zmiany własności szeregu wymuszają rozważanie własności lokalnie. Połączenie niestacjonarności szeregów z istnieniem efektu pamięci rodzi potrzebę opracowania nowej metodyki analiz.

Celem artykułu jest wskazanie metody pomiaru zmienności (ryzyka) szeregów czasowych o znaczącej liczbie danych lub o dużej częstotliwości. Hipotezę badawczą można sformułować następująco: zastosowanie metodyki procesów stochastycznych – multiłamkowych ruchów Browna – pozwala na lokalną analizę ryzyka z uwzględnieniem efektu pamięci, zaś funkcja Höldera wyznacza wartość prawdopodobieństwa wzrostu bądź spadku wartości szeregu<sup>6</sup>.

<sup>3</sup> Hipotezy rynku efektywnego i fraktalnego nie są przeciwstawne. W literaturze podaje się także przypadki istnienia rynków efektywnych zachowujących pamięć (zob. [Mandelbrot, 1997; Mastalerz-Kodzis, 2003, 2013, 2016]).

<sup>4</sup> W przypadku szeregów niestacjonarnych interesującym podejściem jest analiza lokalnej stacjonarności i jej cykliczności (zob. [Leskov i in., 2014]).

<sup>5</sup> Zob. Jajuga [2015], Jajuga, Jajuga [2017]. W przypadku szeregów z pamięcią zob. Mandelbrot [1997], Mastalerz-Kodzis [2003, 2008, 2010].

<sup>6</sup> W pracach Mastalerz-Kodzis [2003, 2008, 2016] przeprowadzono dyskusję nad interpretacją wartości punktowych wykładników Höldera jako lokalnych mierników ryzyka.

## 1. Rynek efektywny czy zachowujący pamięć

Definicja hipotezy rynku efektywnego została sformułowana w 1970 r. przez Eugene'a E. Fama. Hipoteza zakłada, że ceny papierów wartościowych w pełni odzwierciedlają wszystkie informacje rynkowe<sup>7</sup>.

Rynek efektywny zakłada, że istnieje nieskończona liczba uczestników, z których każdy niezależnie wycenia wartość akcji i dąży do maksymalizacji zysku. Działanie pojedynczego inwestora nie jest w stanie zmienić cen akcji. Bezpłatne informacje docierają natychmiast do wszystkich uczestników rynku, zaś wszyscy inwestorzy od razu wykorzystują otrzymane informacje i mają takie samo zdanie co do kierunku wpływu informacji na cenę waloru oraz taką samą oczekiwaną stopę zwrotu. Nie istnieją koszty transakcji oraz komunikaty mogące wpływać na wartość akcji generowane w sposób nieskorelowany. Zakłada się także, że horyzonty inwestycyjne wszystkich inwestorów są jednakowe. Ceny akcji podlegają następującym regułom: oddają wartość akcji, natychmiast zmieniają się na podstawie nowych informacji, a następnie pozostają stałe aż do pojawienia się nowego komunikatu. Zakłada się, że długotrwałe osiąganie zysków większych od przeciętnych nie jest możliwe, zaś zmiany cen na kolejnych sesjach są niezależne. Reguły dotyczące innych szeregów finansowych, np. kursów walut, także poddają się tym zasadom, cena aktualna w pełni odzwierciedla wszelkie dostępne na rynku informacje.

Liczne badania teoretyczne oraz analizy empiryczne potwierdziły, że hipoteza rynku efektywnego w żadnej z ww. postaci nie jest prawdziwa (np. [Grossman, Stiglitz, 1980; Mastalerz-Kodzis, 2003]). Ponadto, S. Grossman i J.E. Stiglitz [Grossman, Stiglitz, 1980] stwierdzili, że wysoki poziom efektywności rynku jest wewnętrznie sprzeczny<sup>8</sup>.

<sup>7</sup> Ponadto, w literaturze rozważa się trzy wersje hipotezy rynku efektywnego, mianowicie:

- Słaba hipoteza zakłada, że aktualne ceny odzwierciedlają wszystkie historyczne informacje. Przyszłych zmian cen nie można przewidzieć na podstawie cen historycznych. Prawdziwość tej hipotezy powodowałaby, że zastosowanie analizy technicznej jako narzędzia do podejmowania decyzji o zakupie czy sprzedaży nie mogłoby przynieść ponadprzeciętnych zysków.
- Półsilna hipoteza zakłada, że ceny uwzględniają wszystkie publicznie dostępne informacje, włączając w to dane historyczne, raporty finansowe, prognozy ekonomiczne itp. Gdyby była prawdziwa, to zastosowanie analizy technicznej oraz fundamentalnej do podejmowania decyzji inwestycyjnych nie mogłoby przynieść ponadprzeciętnych zysków.
- Silna hipoteza zakłada, że aktualne ceny odzwierciedlają wszystkie dostępne informacje, publiczne oraz niepubliczne. Gdyby była prawdziwa, to analiza techniczna, fundamentalna, a także transakcje notowane na rynku dokonywane przez osoby mające dostęp do informacji niejawnych nie mogłyby przynieść ponadprzeciętnych zysków (zob. Fama [1970]).

<sup>8</sup> W sytuacji braku możliwości uzyskania ponadprzeciętnych zysków inwestorzy nie mają motywacji do analizy papierów wartościowych i ich wyceny. Rynki charakteryzujące się wysokimi kosztami analizy mają niższy poziom efektywności, zaś rynki o niskich kosztach analizy winny być bardziej efektywne.

Jednakże, biorąc pod uwagę dynamiczny rozwój informatyzacji oraz powszechną dostępność danych po 1980 r., wielu teoretyków oraz analityków giełdowych podaje w wątpliwość tezę stawianą przez Grosmana i Stiglitz. Pod koniec XX w. podważono istnienie rynków efektywnych, pojawiła się teoria istnienia pamięci w szeregach walorów giełdowych<sup>9</sup>. Można wykazać, że w większości przypadków szeregi giełdowe są niestacjonarne i zachowują pamięć. Obecnie uważa się, że hipotezy rynku efektywnego oraz rynku zachowującego pamięć nie są przeciwstawne. Dopuszcza się istnienie rynku efektywnego zachowującego pamięć.

Hipoteza E.E. Famy dotyczy rynku kapitałowego. Jednakże można wykazać, że na rynku walutowym (FOREX), oprócz popytu i podaży walut występuje także efekt pamięci. Szeregi kursów w stosunku do PLN można także modelować za pomocą procesów stochastycznych, wykorzystując efekt pamięci. Dlatego też w artykule, w części empirycznej, wykorzystano szeregi kursów walutowych.

## 2. Metodyka analiz

Do opisu zmian wartości szeregów czasowych można wykorzystać uogólniony, multiułamkowy proces ruchu Browna [Peltier, Lévy Véhel, 1995; Daoudi, Lévy Véhel, Meyer, 1998; Mastalerz-Kodzis, 2003]. Jest to proces stochastyczny stacjonarny lub niestacjonarny, zawiera czynnik losowy<sup>10</sup>.

Niech będzie dana funkcja  $f : D \rightarrow R$  ( $D \subset R$ ) oraz parametr  $\alpha \in (0,1)$ . Parametr ten jest wyznacznikiem stopnia różniczkowalności funkcji<sup>11</sup>. Poniżej rozważane będą funkcje o ułamkowej klasie różniczkowalności<sup>12</sup>. Wartość  $\alpha$  nieprzypadkowo należy do przedziału  $(0,1)$ . Funkcja Höldera, która charakteryzuje zmienność procesu, zależy od czasu. Wartości funkcji Höldera należą do przedziału  $(0,1)$ . Interpretacja wartości  $H(t)$  dla szeregu czasowego jest następująca: z prawdopodobieństwem  $H(t)$  po wzroście (ceny waloru giełdowego) na-

<sup>9</sup> W nurt tej teorii wpisują się m.in. prace: [Peltier, Lévy Véhel, 1995; Daoudi, Lévy Véhel, Meyer, 1998; Mastalerz-Kodzis, 2003].

<sup>10</sup> W przypadku stacjonarnego szeregu czasowego funkcja Höldera jest stała, gdy szereg jest niestacjonarny funkcja przyjmuje różne wartości.

<sup>11</sup> Funkcja klasy  $C^0$  jest ciągła, funkcja klasy  $C^1$  ciągła i różniczkowalna oraz jej pochodna jest ciągła.

<sup>12</sup> Na temat pochodnej ułamkowej (definicje oraz sposób obliczania) można znaleźć w pracy Mastalerz-Kodzis [2003].

stąpi kolejny wzrost, z prawdopodobieństwem  $1-H(t)$  nastąpi spadek. Zatem wartość  $H(t)$  to prawdopodobieństwo zachowania kierunku zmian<sup>13</sup>.

Funkcja  $f$  jest w punkcie  $x_0$  funkcją klasy  $C_{x_0}^\alpha$  Höldera ( $f \in C_{x_0}^\alpha$ ), jeżeli istnieją stałe  $\varepsilon, c > 0$  takie, że dla każdego  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  spełniona jest nierówność

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c |x - x_0|^\alpha \quad (1)$$

Punktowym wykładnikiem Höldera funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  nazywamy liczbę  $\alpha_f(x_0)$  daną wzorem  $\alpha_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C_{x_0}^\alpha\}$ . Funkcja Höldera każdemu punktowi  $x \in D$  przyporządkowuje liczbę  $\alpha_f(x)$ .

Niech  $H_t : [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$  będzie funkcją Höldera o wykładniku  $\alpha > 0$ . Uogólnionym multiułankowym procesem ruchu Browna z parametrem funkcyjnym  $H(t)$  i  $\lambda$  – liczbą rzeczywistą nazywamy proces  $\{B_{H,\lambda}(t)\}_{t \in R}$  taki, że dla każdego  $t \in R$

$$B_{H,\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} \frac{e^{i\xi} - 1}{|\xi|^{H_n(t)+0,5}} dB(\xi) \quad (2)$$

gdzie:  $D_0 = \{\xi : |\xi| < 1\}$ , dla wszystkich  $n \geq 1$ ,  $D_n = \{\xi : \lambda^{n-1} \leq |\xi| < \lambda^n\}$ .

Dla procesu ruchu Browna  $\{B_{i,n} = B_H(\frac{i}{n}), 0 \leq i \leq n\}$  estymator dla  $t$  z przedziału  $[k/n, 1 - (k/n)]$  jest postaci<sup>14</sup>

$$\hat{H}_{i/(n-1)} = -\frac{\log(\sqrt{\pi/2} S_{k,n}(i))}{\log(n-1)} \quad (3)$$

gdzie:

$$S_{k,n}(i) = \frac{m}{n-1} \sum_{j=i-k/2}^{i+k/2} |B_{j+1,n} - B_{j,n}|. \quad (4)$$

<sup>13</sup> Funkcja Höldera jest lokalną miarą zmienności uwzględniającą pamięć w szeregu. Można wyznaczyć lokalne odchylenie standardowe (w otoczeniu dowolnego punktu wykresu). Istnieje wówczas korelacja pomiędzy lokalnymi miarami zmienności, jednakże nie są one tożsame.

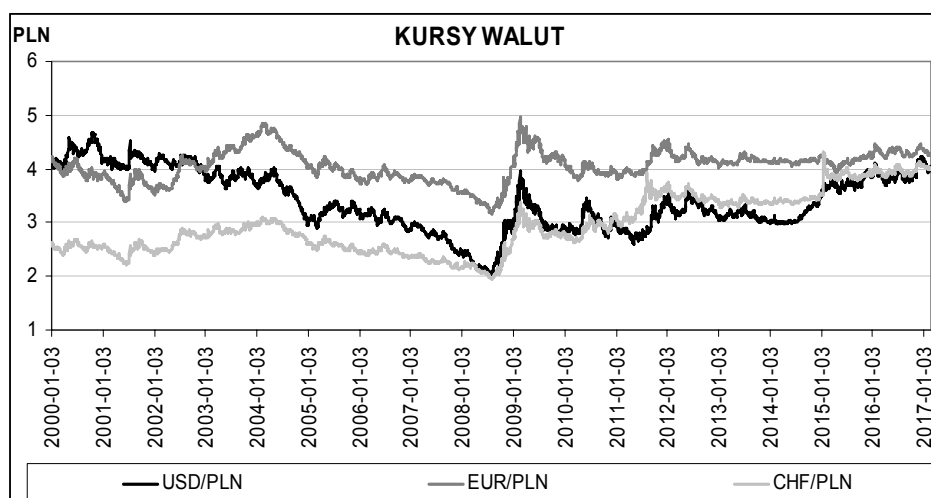
<sup>14</sup> Estymacja funkcji Höldera została opisana w pracach: [Peltier, Lévy Véhel, 1995; Mastalerz-Kodzis, 2003]. Istotnym elementem wyznaczania estymatora jest długość przedziału – parametr  $k$ . Im dłuższy przedział, tym bardziej „gładka” wyestymowana funkcja Höldera. W badaniach empirycznych w rozdziale 3 wykorzystano przedziały o długości 46, co odpowiada ok. 2-miesięcznej obserwacji.

W przypadku analizy empirycznej, z uwagi na uwzględnienie efektu pamięci w szeregach, należy brać pod uwagę długie szeregi czasowe. Im obserwacje są bardziej odległe w czasie, tym mają mniejszy wpływ na wartości bieżące szeregów i na poziom ryzyka.

Traktując szeregi czasowe np. notowań cen akcji lub kursów walut jako realizacje procesów stochastycznych, można modelować charakterystyki zmieniające się w czasie, posługując się multiłamkowym procesem ruchu Browna. Wyestymowane wartości funkcji Höldera mogą być interpretowane jako miary ryzyka, wyznaczają prawdopodobieństwo zmiany kierunku.

### 3. Badania empiryczne

Analizowano kursy wybranych walut obcych w stosunku do PLN w okresie 3.01.2000-20.02.2017. Szeregi czasowe kursów zaczerpnięto z bazy danych NBP, tabela C [www 1]. Szeregi czasowe miały długość 4332 obserwacji. Na rys. 1 przedstawiono notowania kursów dolara amerykańskiego (USD), euro (EUR) oraz franka szwajcarskiego (CHF) w stosunku do złotówki (PLN) w badanym okresie.



**Rys. 1.** Kurs USD/PLN, EUR/PLN i CHF/PLN w okresie 3.01.2000-20.02.2017

Źródło: opracowano na podstawie [www 1].

Analiza danych pozwala na zapisanie następujących wniosków:

- stopy zwrotu badanych szeregów nie mają rozkładu normalnego<sup>15</sup>;
- analizowane szeregi nie są stacjonarne<sup>16</sup>;
- z uwagi na niestacjonarność szeregów nie testowano pamięci długoterminowej szeregów za pomocą wyznaczania wykładnika Hursta lub wymiaru pojemnościowego wykresu, bowiem są to miary globalne, a nie lokalne. Nie testowano ułamkowej stacjonarności szeregów<sup>17</sup>;
- proces niestacjonarny można przedstawić jako sumę ułamkowo stacjonarnych procesów. Uzyskujemy tym samym proces niestacjonarny – multiułamkowy ruch Browna<sup>18</sup>.

Wyestymowano punktowe wykładniki Höldera. Wyniki estymacji pokazano na rys. 2. Na podstawie analiz można zapisać, że:

- funkcje Höldera dla analizowanych szeregów nie są stałe;
- z wykresu wyestymowanych funkcji Höldera odczytujemy okresy znaczącej zmienności, słabej lub braku zmian;
- rozważając kursy walut jako multiułamkowe procesy ruchu Browna, można interpretować punktowe wykładniki Höldera jako lokalne miary ryzyka oraz ich wartości odczytywać jako prawdopodobieństwa zachowania kierunku zmian;

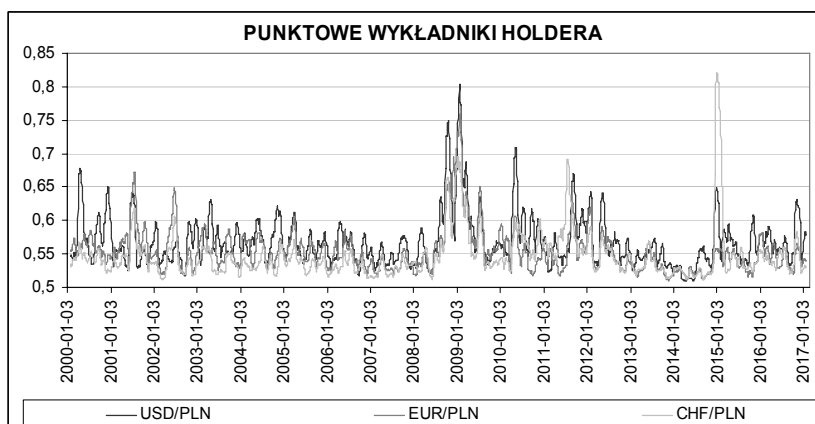
---

<sup>15</sup> Za pomocą nieparametrycznego testu zgodności chi-kwadrat zweryfikowano hipotezę o zgodności empirycznego rozkładu stóp zwrotu z teoretycznym rozkładem normalnym. Parametry rozkładów nie były znane, zatem w każdym z 3 przypadków obliczono średnią stopę zwrotu oraz odchylenie standardowe stopy zwrotu na podstawie danych. Wartości empiryczne statystyk są większe aniżeli wartość teoretyczna odczytana z tablic rozkładu chi-kwadrat, a zatem na poziomie istotności 0,05 hipotezę zerową o normalności rozkładu należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej.

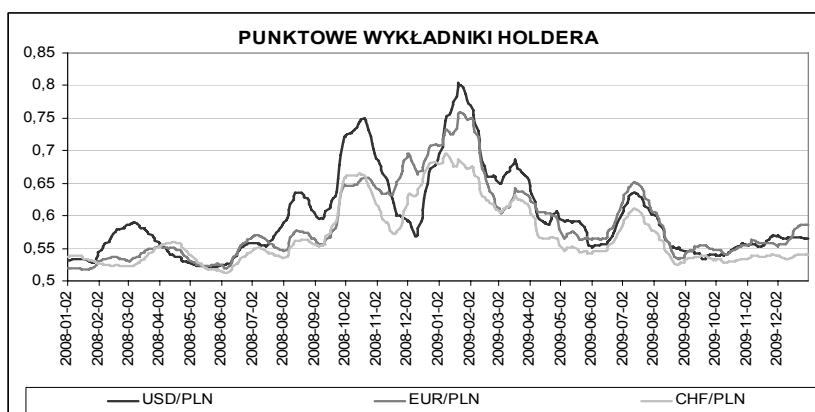
<sup>16</sup> Badano stacjonarność reszt. Wyznaczono współczynnik korelacji między resztami a upływem czasu. Hipoteza zerowa – korelacja równa zero, hipoteza alternatywna – współczynnik korelacji różny od zera. Zweryfikowano istotność współczynnika otrzymanej korelacji. Gdy oszacowany współczynnik korelacji nie wykazuje istotnej różnicy od zera, to model spełnia warunek stałości wariancji. Brak stacjonarności potwierdził także test Dickeya-Fullera [Dickey, 2009; Dickey, Zhang, 2010] wykonany za pomocą programu Gretl (zob. także [Kufel, 2010]).

<sup>17</sup> Multiułamkowy ruch Browna (w sensie stóp zwrotu) jest stacjonarny dla stałej funkcji Höldera o wartości  $0 < H < 1$ , czyli rząd różniczkowania  $-0,5 < d < 0,5$ . Badanie stacjonarności przez pryzmat ułamkowego rzędu integracji polega na sprawdzeniu, czy  $d < 0,5$ . Występuje wówczas pewna nieścisłość, bowiem stacjonarność procesu rozumie się jako stałość własności (tj. rozkładu prawdopodobieństwa) wraz z przesunięciem w czasie. Procesy, które nie są stacjonarne, są niestacjonarne – i ta definicja przez przeciwieństwo zdaje się zaprzeczać istnieniu ułamkowej stacjonarności (zob. [Mastalerz-Kodzis, 2003; Ding, Pei, 2006; Dickey, 2009; Kufel, 2010]).

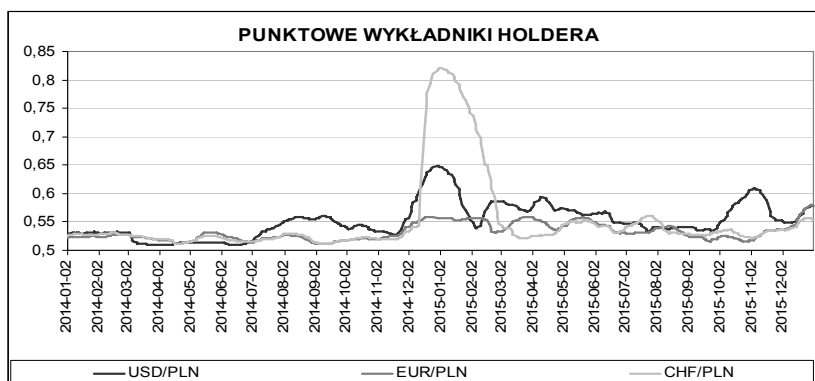
<sup>18</sup> W przypadku nieskończonego podziału osi czasu suma ułamkowo stacjonarnych procesów daje multiułamkowy proces ruchu Browna z generującą go funkcją Höldera.



a) Punktowe wykładniki Höldera w okresie 1.01.2000-20.02.2017.



b) Punktowe wykładniki Höldera w okresie 1.01.2008-31.12.2009.



c) Punktowe wykładniki Höldera w okresie 1.01.2014-31.12.2015.

**Rys. 2.** Wyestymowana funkcja Höldera dla wybranych przedziałów czasowych

Źródło: opracowano na podstawie wzorów (3) i (4).



- wysokie wartości funkcji Höldera (bliskie 1) świadczą o niskiej zmienności szeregu, o korelacji dodatniej pomiędzy kolejnymi notowaniami. Na przykład w latach 2008-2009 (rys. 2b) odnotowano znaczący wzrost wartości szeregów. Punktowe wykładniki Höldera na początku 2009 r. przyjmowały wartości 0,7-0,8, zatem z prawdopodobieństwem 0,7-0,8 po wzroście kursu waluty następował jej kolejny wzrost, z prawdopodobieństwem 0,2-0,3 po wzroście następował spadek, następowała zmiana kierunku;
- oscylowanie wartości funkcji Höldera wokół 0,5 świadczy o losowym zachowaniu się szeregu (braku efektu pamięci);
- na początku 2015 r. nastąpił wzrost wartości funkcji Höldera dla szeregu CHF/PLN (rys. 2c). Było to związane z uwolnieniem kursu franka szwajcarskiego i krótkotrwałym ciągłym wzrostem kursu waluty (korelacja dodatnia – ok. 0,82 – w krótkim okresie);
- gdyby wartości funkcji Höldera były stałe w czasie i równe 0,5, świadczyłyby to o efektywności rynku – braku pamięci. Jednakże biorąc pod uwagę rys. 2, można stwierdzić, że wartości te zmieniają się dynamicznie pod wpływem czasu. Punktowe wartości estymatorów są większe od 0,5, co świadczy o istnieniu efektu pamięci. Zmieniają się dynamicznie w czasie, co potwierdza niestacjonarność szeregów.

## Podsumowanie

Modelowanie ekonomicznych szeregów czasowych (np. notowań akcji, kursów walut i innych) w powiązaniu z analizą ryzyka jest uzasadnione z wielu powodów gospodarczych, mikro- i makroekonomicznych, a także społecznych. Zastosowanie stacjonarnych i niestacjonarnych procesów stochastycznych w naukach ekonomicznych wykorzystujących istnienie efektu pamięci można uznać za uzasadnione. Opisana metodyka pozwala wówczas na lokalną analizę ryzyka oraz na pomiar prawdopodobieństwa zachowania kierunku zmian w szeregach.

W pracy wykazano, że omawiane szeregi kursów walut nie są stacjonarne w analizowanych przedziałach czasowych oraz zachowują pamięć. Świadczą o tym wyznaczone punktowe wykładniki Höldera. Rozważana funkcja Höldera jest lokalną miarą zmienności kursów walut, jednakże w odróżnieniu od np. odchylenia standardowego uwzględnia także efekt pamięci w szeregach kursów walut.

Analizując gospodarcze i finansowe szeregi czasowe, należy jednak pamiętać o dynamice zmian oraz o stochastycznej naturze otoczenia. Należy, możliwe precyzyjnie, zdefiniować i, jeśli jest to możliwe, zmierzyć ryzyko. Metody matematyczne i ekonometryczne pozwalają modelować szeregi czasowe oraz badać ich zmienność, jednak należy pamiętać, że decyzji politycznych oraz ich skutków gospodarczych i społecznych nie da się przewidzieć.

## Literatura

- Daoudi K., Lévy Véhel J., Meyer Y. (1998), *Construction of continuous functions with prescribed local regularity*, „Journal of Constructive Approximations”, Vol. 14, No. 3, s. 349-385.
- Dickey D.A. (2009), *Stationarity testing in high-frequency seasonal time series*, SAS Global Forum 2009: Statistics and Data Analysis.
- Dickey D.A., Zhang Y. (2010), *Seasonal unit root tests in long periodicity cases*, „Journal of the Korean Statistical Society”, No. 39, s. 271-279.
- Ding J.J., Pei S.C. (2006), *Fractional Fourier transforms and Wigner distribution functions for stationary and non-stationary random process*, ICASSP – IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 3, s. 21-24.
- Fama E.E. (1970), *Efficient capital markets: a review of theory and empirical work*, „Journal of Finance”, Vol. 25, Issue 2, s. 383-417.
- Grossman S.J., Stiglitz J.E. (1980), *On the impossibility of informationally efficient markets*, „American Economic Review”, Vol. 70, No. 3, s. 393-408.
- Jajuga K. (2015), *Zarządzanie ryzykiem*, PWN, Warszawa.
- Jajuga T., Jajuga K. (2017), *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa.
- Kufel T. (2010), *Ekonometryczna analiza cykliczności procesów gospodarczych o wysokiej częstotliwości obserwowania*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
- Leskov J., Chaari F., Napolitano A., Sanchez-Ramirez A. (2014), *Cyclostationarity. Theory and methods*, Springer International Publishing.
- Mandelbrot B.B. (1997), *Fractals and scaling in finance*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Mastalerz-Kodzis A. (2003), *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*, Prace Naukowe, Akademia Ekonomiczna im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice.
- Mastalerz-Kodzis A. (2008), *Entropia i wykładnik Hursta a klasyczne miary ryzyka*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 50, s. 43-51.
- Mastalerz-Kodzis A. (2010), *Multiłamkowy proces ruchu Browna a funkcja Weierstrassa – porównanie wybranych własności*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 56, s. 73-82.
- Mastalerz-Kodzis A. (2013), *Zastosowanie funkcji Höldera w modelu FRAMA*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, nr 159, s. 73-81.
- Mastalerz-Kodzis A. (2016), *Risk analysis of foreign currency bank loans offered on the Polish Capital Market*, Managing and Modelling of Financial Risks 2016, Conference Proceedings, Technical University of Ostrava, Ostrava, s. 563-571.

Peltier R.F., Lévy Véhel J. (1995), *Multifractional Brownian motion: definition and preliminary results*, INRIA Recquencourt, Rapport de recherche, No. 2645.

Sobczyk K. (1996), *Stochastyczne równania różniczkowe*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

[www 1] [www.nbp.pl](http://www.nbp.pl), tabela C (dostęp: 21.02.2017).

### STOCHASTIC ANALYSIS OF THE RISK OF TIME SERIES

**Summary:** The aim of the article is to present the method of measuring local risk for stationary and non-stationary time series. In the article we have discussed the way of calculating risk within an area of any value of time series. As a tool enabling the assessment of the risk we have used Hölder's function generating multifractional processes of Brown's motion. With the use of selected time-series analysis methods the exchange rates volatility of the following currencies was examined: USD/PLN, EUR/PLN and CHF/PLN. The conclusions were drawn on the basis of the historical and current trends observed in the time-series and the values of variation measure. The paper comprises basic elements of research methodology as well as empirical examples.

**Keywords:** Risk analysis, time-series modelling, stationary and non-stationary stochastic process.