Donata Kopańska-Bródka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Badań Operacyjnych
donata.kopanska-brodka@ue.katowice.pl

OPTYMALNY PORTFEL INWESTYCYJNY Z KRYTERIUM MAKSYMALNEJ SKOŚNOŚCI

Streszczenie: Celem artykułu jest przedstawienie problemu wyboru optymalnego portfela akcji w sytuacji, kiedy preferencje inwestora odnoszą się do wartości oczekiwanej, wariancji i skośności rozkładu stopy zwrotu portfela. Zadanie zostaje sformułowane jako zagadnienie wielokryterialne, w którym trzeci moment centralny rozkładu przyjmowany jest jako miara skośności. W artykule dyskutowane są różne podejścia do rozwiązania problemu wielokryterialnego oraz trudności związane z technikami obliczeniowymi. W szczególności przedstawiono problemy związane z zastosowaniem metod programowania celowego do określenia struktury optymalnego portfela inwestycyjnego.

Słowa kluczowe: model Markowitza, portfel inwestycyjny, programowanie celowe, skośność.

Wprowadzenie

Preferencje inwestora dotyczące podstawowych dwóch parametrów rozkładu stóp zwrotu portfeli opisywane są modelem Markowitza. Zatem do konstrukcji optymalnego portfela akcji wykorzystywane są zasady decyzyjne opierające się tylko na tych podstawowych parametrach. Jednak literatura przedmiotu, jak i praktyka decyzyjna pokazują, że taki model jest niewystarczający do pełnej analizy portfeli inwestycyjnych oraz założenia tego modelu nie mają swojego uzasadnienia w praktyce. Obserwacje pokazują, że inwestorzy preferując większe prawdopodobieństwo dużych zysków i mniejsze możliwe straty, preferują dodatnią skośność rozkładu losowych stóp zwrotu.

Problem wyboru optymalnego portfela akcji to problem znalezienia szczególnej liniowej funkcji losowych stóp zwrotu akcji, której parametrami są udziały tych akcji w portfelu. Zatem portfel jest zmienną losową będącą funkcją liniową zmiennych losowych, która dla zadanych realizacji zmiennych losowych jest funkcją rzeczywistą, natomiast dla zadanych wielkości udziałów jest zmienną losową. Funkcji takich istnieje nieskończenie wiele, a problem wyboru wiąże się z uporządkowaniem zmiennych losowych.

Realizacje zmiennych losowych postrzegane są jako zyski, zatem kryterium preferujące większe wartości jest zasadą racjonalną i ma charakter uniwersalny. Stąd też warianty mogą być porządkowane według wartości oczekiwanej i jedną z zasad wyboru jest jej maksymalizacja. Drugą zasadą powszechnie akceptowaną jest małe rozproszenie realizacji zmiennych wokół wartości średniej, zatem minimalizacja wariancji bądź odchylenia standardowego ma również charakter uniwersalny. Jeśli tylko rozkłady prawdopodobieństwa otrzymywanych portfeli są symetryczne, to za pomocą tych dwóch kryteriów stosunkowo łatwo można wyznaczyć rozwiązania efektywne bądź rozwiązania optymalne. W modelu Markowitza zakłada się, że rozkłady stóp zwrotu są zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych, czyli rozkładami symetrycznymi i do wyboru optymalnego portfela akcji wystarczą dwa pierwsze momenty rozkładu stóp zwrotu. Przyjęte w modelu Markowitza założenia dotyczące normalności stóp zwrotu bądź kwadratowej funkcji użyteczności nie mają praktycznego uzasadnienia, zatem model ten nie odpowiada rzeczywistości. W literaturze proponowanych jest wiele modyfikacji i rozszerzeń modelu Markowitza. Jednym z kierunków badań jest modyfikacja modelu polegająca na poszerzeniu kryteriów o momenty centralne wyższych rzędów. Uwzględnienie dodatkowych kryteriów powoduje, że otrzymywane zadania optymalizacyjne sprawiają duże trudności obliczeniowe, stąd też w większości badania koncentrują się nad technikami rozwiązania takich zadań.

Jeśli założymy, że porównujemy dwie różne inwestycje o takich samych wartościach oczekiwanych i wariancjach, to za pomocą tylko tych parametrów nie potrafimy rozstrzygnąć, która inwestycja jest lepsza. Potrzebę uwzględnienia dodatkowego kryterium w podejmowaniu decyzji ryzykownych pokazuje następujący przykład. Rozważmy dwie ryzykowne inwestycje o następujących rozkładach stóp zwrotu:

$$R_1 = \{(5\%, 0{,}25), (8\%, 0{,}5), (15\%, 0{,}25)\}$$

oraz

$$R_2 = \{(3\%, 0{,}25), (10\%, 0{,}5), (13\%, 0{,}25)\}.$$

Wartości oczekiwane $E(R_1) = E(R_2) = 9\%$ oraz wariancje $V(R_1) = V(R_2) = 14{,}4$ są równe. Zatem dla każdego decydenta inwestycje te powinny być tak samo atrakcyjne. Jednak większość osób wskazuje rozkład R_1 jako bardziej preferowany, co uzasadnia się tym, że różnią się one trzecim momentem centralnym wskazującym skośność rozkładu. Dla stóp zwrotu R_1 i R_2 współczynniki skośności są przeciwnych znaków, przy czym dla R_1 jest dodatni, a dla R_2 jest ujemny. Ponieważ rozkłady te różnią się kierunkiem skośności, stąd uzasadnieniem takiej preferencji R_1 nad R_2 jest dodatnia skośność rozkładu R_1.

Dodatnia skośność rozkładu odnosi się do prawego ogona funkcji gęstości i jest obiektywnie pożądana, gdyż pociąga mniejsze prawdopodobieństwo ujemnych stóp zwrotu. W pracy Samuelsona [1970] pokazano, że w wyborze portfela akcji użycie centralnego momentu trzeciego stopnia jest wskazane, ponieważ prawie wszyscy inwestorzy preferują portfele z większym trzecim momentem, jeśli dwa pierwsze są takie same.

Najczęściej stosowaną miarą skośności w wyborze optymalnego portfela jest trzeci moment centralny (zwykły lub standaryzowany) rozkładu prawdopodobieństwa stopy zwrotu z portfela, jednak według niektórych autorów [Groeneveld i Meeden, 1984] momentowe miary skośności wykorzystywane do porównywania dowolnych rozkładów nie są w pełni wiarygodnymi miarami. Miara skośności jest bardzo wrażliwa na punkt początkowy obserwacji (datę rozpoczęcia gromadzenia danych) oraz na przedziały czasowe, dla których obliczane są poszczególne stopy zwrotu. Fogler and Radcliffe [1974] pokazali, że roczna stopa zwrotu indeksu Dow Jones Industrial Average wykazywała dodatnią skośnością (mierzoną miarą relatywną), natomiast stopa półroczna i kwartalna wykazywały ujemną skośność. Ponadto, wartości miar skośności dla stóp rocznych, półrocznych i kwartalnych istotnie różniły się w przeciwieństwie do wartości oczekiwanej i wariancji, które różniły się nieznacznie.

1. Wybór optymalnego portfela akcji jako zagadnienie wielokryterialne

Konieczność rozszerzenia klasycznego dwukryterialnego modelu wyboru optymalnego portfela akcji była dostrzegana przez wielu badaczy i praktyków. Literatura ostatniej dekady obfituje w modyfikacje modelu Markowitza polegające na uwzględnieniu momentów centralnych wyższych rzędów jako dodatkowych kryteriów, jak również w metody rozwiązywania powstałych zadań. Szeroko stosowane w analizie portfelowej wielokryterialne metody[1], takie jak: AHP, PROMETHEE czy ELEKTRE z jednej strony wymagają dużej ingerencji decydenta w kolejnych etapach rozwiązywania problemu, z drugiej odnoszą się do relacji preferencji w odniesieniu do innych czynników niż tylko informacji o obiektywnym rozkładzie prawdopodobieństwa i jego parametrach. Takie metody inte-

[1] Przegląd metod i zastosowań można znaleźć w [Trzaskalik, 2006]

raktywne z czynnikiem subiektywnym mogą być użyteczne w procesie ograniczania zbioru możliwych wariantów decyzyjnych, co w problemach portfelowych wiąże się z dokonywaniem preselekcji spółek. W mniejszym stopniu interakcja z inwestorem wymagana jest w zastosowaniu metod programowania rozmytego do rozwiązania problemu portfelowego. Zastosowanie takiego podejścia przedstawiono m.in. w pracy Jany, Roya i Mazumder [2007], Li, Qui i Kara [2010], Bhattacharyya, Kara, Dutta Majumdera [2011]. W podejściu przedstawionym przez Jana [2007] wariancję portfela zastąpiono odchyleniem bezwzględnym natomiast współczynnik skośności portfela przybliżono funkcją fragmentami liniową, a następnie do rozwiązania tak zlinearyzowanego problemu wykorzystano metodę programowania rozmytego. W pracy Bhattacharyya [Bhattacharyya, Kar, Dutta Majumder, 2011] zastosowano trapezoidalne liczby rozmyte w procedurze rozwiązania wielokryterialnego modelu portfela akcji na przykładzie indyjskiej giełdy papierów wartościowych[2]. Próbę analitycznego rozwiązania problemu minimalizującego wariancję portfela przy zadanym poziomie wartości oczekiwanej i skośności przedstawiono w artykule Athayde i Flôres [2004]. Należy zauważyć, że w celu rozwiązania problemu wielokryterialnej optymalizacji portfela stosowane jest podejście polegające na uprzywilejowaniu jednego lub dwóch kryteriów kosztem pozostałych.

Dla dalszych rozważań przyjmijmy następujące oznaczenia:

R_i – losowa stopa zwrotu z i-tej akcji,

x_i – udział i-tej akcji, część kapitału inwestowanego w i-tą akcję,

R_p – stopa zwrotu z portfela akcji,

$\overline{R_i} = E(R_i)$ – oczekiwana stopa zysku i-tej akcji,

$\sigma_i = V(R_i)$ – wariancja stopy R_i,

$\sigma_{ij} = \mathrm{cov}\,(R_i,R_j)$ – kowariancja pomiędzy R_i oraz R_j

$\gamma_{ijk} = E[(R_i- E(R_i))(R_j- E(R_j))(R_k- E(R_k))]$ – współczynniki co-skośności pomiędzy R_i, R_j oraz R_k.

Rozważane w analizach parametry rozkładu stopy zwrotu portfela $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ oznaczmy w poniższy sposób:

$E(x) = E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$ – oczekiwana stopa zwrotu z portfela,

---

[2] Bombay Stock Exchange (BSE) licząca ponad 133 lata najstarsza giełda papierów wartościowych w Azji.

$$V(x) = E(R_p - E(R_p))^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \qquad \text{– wariancja portfela,}$$

$$S(x) = E(R_p - E(R_p))^3 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ijk}x_i x_j x_k \qquad \text{– skośność portfela.}$$

Wielokryterialny model wyboru portfela akcji bez krótkiej sprzedaży formułowany jest następująco:

$$\begin{gathered} \text{maksymalizacja } E(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i\,, \\ \text{maksymalizacja } S(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ijk}x_i x_j x_k\,, \\ \text{minimalizacja } V(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \end{gathered} \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0\,.$$

Zagadnienie (1) jest wielokryterialnym problemem nieliniowym, co nie jest zadaniem prostym, a jego rozwiązanie zależy od przyjętych założeń i doboru metody. Najprostszą techniką rozwiązania takiego problemu jest sprowadzenie zadania do problemu z jedną funkcją celu będącą najczęściej sumą ważoną występujących kryteriów. Podejście takie zastosowali Usta, Kantar [2011] i w nim funkcja kryterium była sumą ważoną skośności, wariancji i entropii, natomiast ograniczenia dotyczyły wartości oczekiwanej. Przyjęcie zasady maksymalnej entropii pozwoliło wygenerować portfele dobrze zdywersyfikowane. W pracy Usty i Kantara [2011] badania empiryczne przeprowadzono dla różnych kombinacji wypukłych wspomnianych trzech kryteriów. Szeroka analiza porównawcza otrzymanych portfeli optymalnych z portfelami uzyskanymi innymi metodami pokazała, że proponowane podejście było lepsze ze względu na różne sposoby oceniania jakości portfela i niezależne od długości horyzontu czasowego.

Zazwyczaj nie istnieje pojedyncze rozwiązanie problemu (1), które spełniałoby jednocześnie wszystkie kryteria, stąd procedury są dwustopniowe. Najpierw wyznaczany jest zbiór rozwiązań niezdominowanych, a następnie, wykorzystując określone informacje w odniesieniu do celów lub krańcowej stopy substytucji między kryteriami, rozwiązywane jest zadanie programowania matematycznego. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na pewien rodzaj konfliktu, którego przyczyną jest kryterium maksymalizacji skośności lub trzeciego momentu stopy zwrotu portfela. Jednym z celów nadrzędnych w podejmowaniu decyzji inwestycyjnych jest minimalizacja ryzyka. Naturalnym i powszechnie akceptowalnym sposobem jego minimalizacji jest dywersyfikacja. Zależność skośności stopy zwrotu portfela od stopnia dywersyfikacji badano już w pracy Simkowitz i Beedles [1978], gdzie pokazano, że zwiększanie stopnia dywersyfikacji powoduje stopniowe zmniejszanie się skośności portfela. Dywersyfikacja z jednej strony zmniejsza wariancję, a z drugiej zmniejsza skośność czyli zwiększa prawdopodobieństwo otrzymania niepożądanych dużych ujemnych stóp zwrotu. Zatem dywersyfikacja i skośność portfela to dwie konfliktowe zasady. Uwzględnienie kryterium maksymalizacji skośności rozkładu stopy zwrotu portfela to pogodzenie się z mniejszą dywersyfikacją, a tym samym z większym ryzykiem. Autorzy prac Jana, Ray i Mazumder [2007] oraz Bera i Park [2008] w celu otrzymania portfeli zdywersyfikowanych, do modelu zależnego od trzech momentów dołączyli zasadę maksymalizacji entropii portfela, która gwarantowała otrzymanie portfela dobrze zdywersyfikowanego.

Innym podejściem zastąpienia problemu wielokryterialnego (1) zadaniem jednokryterialnym jest zastosowanie funkcji użyteczności momentów rozkładu. Podobnie jak to miało miejsce w dwuparametrycznym modelu Markowitza, problem sprowadza się do określenia odpowiedniej funkcji rzeczywistej $U(\mu,\sigma,\gamma)$ zależnej od trzech pierwszych momentów rozkładu, wklęsłej lub guaisi-wklęsłej w zbiorze punktów (μ,σ) oraz takiej, której pochodne cząstkowe rzędu pierwszego spełniają nierówności:

$$U_{\sigma}(\mu,\sigma,\gamma) = \frac{\partial U}{\partial \sigma} < 0, \tag{2}$$

$$U_{\mu}(\mu,\sigma,\gamma) = \frac{\partial U}{\partial \mu} > 0, \tag{3}$$

$$U_{\gamma}(\mu,\sigma,\gamma) = \frac{\partial U}{\partial \gamma} > 0. \tag{4}$$

Powyższe warunki mówią, że funkcja jest malejąca względem wariancji (2) oraz rosnąca względem wartości oczekiwanej (3) i skośności (4). Ponadto warunek (2) odpowiada awersji do ryzyka modelowanego wariancją, warunek (3) mówi o preferencji wyższych oczekiwanych korzyści, natomiast (4) o preferencji skośności rozkładu portfela, która gwarantuje mniejsze prawdopodobieństwo bardzo niskich stóp zwrotu portfela.

Funkcja oceny portfela $U(\mu,\sigma,\gamma)$ często nazywana jest funkcją użyteczności parametrów rozkładu i nie jest tożsama z funkcją użyteczności von Neumana–Morgensterna oznaczaną $u(w)$, której argumentami są wielkości stanu posiadania (bogactwa). Inwestor charakteryzowany funkcją $U(\mu,\sigma,\gamma)$ wartościującą portfele nie tylko preferuje skośność rozkładu, ale w wyborach może być uzależniony od skośności. Zagadnienie uzależnienia od skośności (*skewness affinity)* zostało wprowadzone w pracy Eichnera i Wagenera [2011], gdzie skośno-zależnego inwestora określono jako decydenta, którego wola do zaakceptowania ryzyka rośnie, jeśli rozkład prawdopodobieństwa staje się bardziej dodatnio skośny.

Sprowadzenie problemu wielokryterialnego trzech momentów do zadania jednokryterialnego wiąże się również z interpretacją parametrów występujących w funkcji celu. Najczęściej podejście takie omawiane jest na gruncie teorii oczekiwanej użyteczności, gdzie parametry występujące w funkcji $U(\mu,\sigma,\gamma)$ są odpowiednio miarą awersji do ryzyka i miarą intensywności zachowań rozważnych [Menezes, Geiss i Tressler, 1980; Eichner, Wagener, 2011]. Preferencje inwestora dotyczące dodatniej skośności rozkładu stóp zwrotu są zgodne z ideą malejącej absolutnej awersji do ryzyka. Dodatnia skośność odnosi się do prawych ogonów rozkładu i jest pożądana, ponieważ wzrost skośności pociąga obniżenie prawdopodobieństwa dużych ujemnych stóp zwrotu.

Podejście uwzględniające trzeci moment centralny rozkładu w modelu teorii oczekiwanej użyteczności najczęściej bazuje na rozwinięciu Taylora funkcji użyteczności von Neumanna i Morgensterna i jest często wykorzystywane w praktycznych zastosowaniach.

Stosowany w analizie portfelowej trzeci moment centralny do porównywania i porządkowania rozkładów względem skośności nie jest najlepszą miarą, ponieważ jest bardzo wrażliwy na obserwacje odstające, horyzont inwestycyjny i nie spełnia postulatu dobrej miary. Van Zwet [1964] do porównywania dowolnych rozkładów względem skośności wprowadził koncepcję porządku zależnego od wypukłej transformacji. Do porównywania rozkładów portfeli inwestycyjnych lepsze własności ma standaryzowany trzeci moment centralny, jednak stosowanie go w optymalizacji pociąga duże problemy teoretyczne i numeryczne, stąd też w modelach poszukiwania optymalnej struktury portfela jednak najczęściej wykorzystywany jest trzeci moment centralny.

2. Problem optymalizacji portfela jako zagadnienie programowania celowego

Jedną z metod wielokryterialnych stosowanych w konstrukcji portfela akcji z kryterium skośności może być sprowadzenie problemu do zagadnienia programowania celowego. Procedura programowania celowego to taka technika wielokryterialna, która zapewnia optymalną strukturę portfela inwestycyjnego przy zachowaniu pewnego kompromisu pomiędzy konfliktowymi kryteriami. Uzasadnieniem dla takiego podejścia jest to, iż gwarantuje ono istnienie rozwiązania optymalnego, jeśli tylko istnieje rozwiązanie dopuszczalne, łatwość numeryczną oraz zależność rozwiązania tylko od preferencji inwestora w stosunku do stopnia ważności poszczególnych momentów rozkładu. Zatem podejście programowania celowego jest próbą znalezienia kompromisu pomiędzy wieloma celami poprzez minimalizację odpowiednio zdefiniowanej funkcji kar. Lai [1991] po raz pierwszy zastosował model programowania celowego do wyboru portfela akcji i pokazał, że w takim podejściu preferencje inwestora mogą być również uwzględnione.

Problem programowania celowego jest formułowany dla zagadnienia programowania wielokryterialnego (1) w ten sposób, że zamiast optymalizacji każdej funkcji kryterium podejmujący decyzje proszony jest o wskazanie dla każdego kryterium wartości pożądanej (wartości docelowej, poziomu aspiracji, wartości progowej). Kryterium zadania programowania celowego jest formułowane za pomocą odpowiedniej funkcji odchyleń (kar) pomiędzy osiąganymi celami, a ich poziomami aspiracji. Zadanie celowe sprowadza się do minimalizacji funkcji odchyleń dopuszczając możliwość nieosiągnięcia przez poszczególne kryteria wartości pożądanych.

Załóżmy, że pożądanymi wartościami parametrów rozkładu stopy zwrotu portfela są odpowiednio; wartość oczekiwana μ_0, wariancja σ_0 i skośność γ_0. Zadanie polega na znalezieniu portfela, dla którego odpowiednio określona funkcja *z(d)* odchyleń parametrów optymalnego portfela od wielkości pożądanych będzie najmniejsza. Funkcja *z(d)* nie zależy w sposób bezpośredni od zmiennych decyzyjnych, a jedynie od odchyleń parametrów portfela od wielkości pożądanych.

Formalny model wyboru optymalnego portfela akcji wykorzystujący podejście programowania celowego jest następujący:

$$\text{minimalizacja } z\,(d)$$

przy ograniczeniach

$$\begin{gathered} E(x) + d_1 = \mu_0 \\ V(x) + d_2 = \sigma_0 \\ S(x) - d_3 = \gamma_0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad d_i \geq 0\,, \end{gathered} \tag{5}$$

gdzie wielkości d_i i = 1,2,3 reprezentują odchylenia możliwych wartości celów od wartości pożądanych. Wielkości d_i spełniają warunek nieujemności, jeśli optymalne wartości każdego z celów są poziomami aspiracji.

Sprowadzając problem wyboru optymalnego portfela akcji z uwzględnieniem preferencji inwestora odnośnie do ważności parametrów rozkładu do zadania programowania celowego (5) należy określić poziomy aspiracji dla poszczególnych celów oraz postać funkcji odchyleń od celów. Pożądane poziomy μ_0, σ_0 i γ_0 mogą być z góry zadane bądź określone poprzez optymalne rozwiązania trzech niezależnych zadań, gdzie:

– μ_0 jest optymalną wartością zadania:

$$\text{maksymalizacja } E(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \tag{Z1}$$

– γ_0 jest optymalną wartością zadania Z2

$$\text{maksymalizacja } S(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} x_i x_j x_k$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \tag{Z2}$$

– σ_0 jest optymalną wartością zadania Z3

$$\text{minimalizacja } V(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geq 0. \tag{Z3}$$

Dla zadania (Z1) rozwiązaniem jest portfel jednoskładnikowy złożony z akcji o najwyższej stopie oczekiwanej, zatem do wyznaczenia wartości μ_0 w rozpatrywanym zbiorze akcji wystarczy znaleźć taką, której odpowiada największa oczekiwana stopa zwrotu. Rozwiązaniem optymalnym zadania (Z2), podobnie jak w zadaniu (Z1), jest portfel jednoskładnikowy złożony z akcji o najwyższym trzecim momencie centralnym. Podobnie jak w przypadku zadania (Z1) problemu (Z2) nie trzeba rozwiązywać, a jedynie znaleźć akcję o największej dodatniej skośności. Zadanie (Z3) jest problemem poszukiwania portfela o minimalnej wariancji. Rozwiązaniem optymalnym jest portfel minimalnego ryzyka, który wyznacza początek granicy efektywnej w modelu Markowitza, a wielkość σ_0. jest jego wariancją. Zadanie (Z2) które służy do określenie poziomu γ_0 budzi najwięcej wątpliwości, ponieważ trzeci moment jest bardzo wrażliwy na wartości odstające, nie ma przekonywującej interpretacji oraz nie jest miarą znormalizowaną.

Minimalizowana funkcja odchyleń $z(d)$ w zadaniu (5) zależy dodatkowo od preferencji inwestora względem momentów rozkładu wyrażanej poprzez wagi przyporządkowane poszczególnym odchyleniom od poziomów aspiracji. Jeśli p_i dla i = 1,2,3 określa stopień, w jakim i-ty moment rozkładu jest dla inwestora ważniejszy niż pozostałe momenty portfela, to postać analityczna funkcji kryterium zadania celowego $z(d, p)$ zależy od przyjętej miary odległości oraz parametrów p_i.

W literaturze wykorzystywane są następujące funkcje odchyleń od celów $z(d, p)$: funkcja liniowa (suma ważona odchyleń)

$$z(d,p) = p_1 d_1 + p_2 d_2 + p_3 d_3\,, \tag{6}$$

funkcja wielomianowa bezwzględnych odchyleń

$$z(d,p) = (d_1)^{p_1} + (d_2)^{p_2} + (d_3)^{p_3}\,, \tag{7}$$

funkcja wielomianowa względnych odchyleń

$$z(d,p) = \left|\frac{d_1}{\mu_0}\right|^{p_1} + \left|\frac{d_2}{\gamma_0}\right|^{p_2} + \left|\frac{d_3}{\sigma_0}\right|^{p_3}\,, \tag{8}$$

metryka Minkowskiego

$$z(d,p) = \left(\left|\frac{d_1}{\mu_0}\right|^{p} + \left|\frac{d_2}{\sigma_0}\right|^{p} + \left|\frac{d_3}{\gamma_0}\right|^{p}\right)^{1/p}. \tag{9}$$

Zadania z funkcją celu typu (7) i (8) należą do klasy problemów wielomianowego programowania celowego. Lai [1991] po raz pierwszy zastosował model wielomianowy, w którym minimalizował odchylenia od poziomów aspiracji określonych tylko dla wartości oczekiwanej i skośności portfela. W modelu zakładano, że wariancja optymalnego portfela będzie spełniać sztywne ograniczenia i przyjmować wartość na poziomie jednostki. Praca Lai [1991] zainspirowała wielu badaczy do stosowania wielomianowego programowania celowego w wyznaczaniu i analizie portfeli inwestycyjnych. Chunhachinda [Chunhachinda i in. 1997] wykorzystał podejście Lai do konstrukcji portfela międzynarodowego na podstawie indeksów rynkowych 14 krajów. W badaniach uwzględniono również stopy wymiany walut i przeprowadzono je zarówno na danych tygodniowych i miesięcznych. W pracy Prakash i in. [2003] również za pomocą wielomianowego programowania celowego konstruowano optymalne portfele międzynarodowe oraz zauważono, że w dywersyfikacji międzynarodowej występuje mała korelacja między stopami zwroty akcji notowanych na rynkach krajowych i zagranicznych.

Rozwiązania zadania programowania celowego (5) z odpowiednią funkcją $z(d, p)$ dla różnych kombinacji parametrów p_i są portfelami optymalnymi uwzględniającymi preferencje inwestora względem odchyleń od pożądanych poziomów trzech momentów.

Koncepcja Lai [1991] przyjęcia ograniczenia sztywnego dla wariancji w modelu wielomianowego programowania celowego może być wykorzystana do konstrukcji portfeli efektywnych zarówno w przestrzeni dwu jak i trójwymiarowej.

Przewaga stosowania metod programowania celowego w wyborze portfela akcji z dodatkowym kryterium maksymalnej skośności polega przede wszystkim na tym, że warunki wstępne określane przez inwestora dotyczą jedynie wartości parametrów w funkcjach odchyleń, a nie indywidualnej percepcji ryzyka i sposobu jego mierzenia. Ponadto, model programowania celowego nie stwarza większych problemów numerycznych i gwarantuje otrzymanie rozwiązania optymalnego.

Dalsze badania modyfikujące koncepcję wielomianowego programowania celowego powinny być prowadzone zarówno w kierunku analizy granicy efektywnej, wrażliwości na warunki początkowe jak i na dobór odpowiedniej miary skośności rozkładu stopy zwrotu portfela akcji.

Podsumowanie

Nie ma uniwersalnej, całkowicie obiektywnej metody wyboru portfela na podstawie wielokryterialnego modelu trzech momentów rozkładu stopy zwrotu portfela. Każde z omawianych podejść, chociaż nie jest osadzone w teorii oczekiwanej użyteczności, w pewnym stopniu jest zależne od inwestora i jego preferencji w odniesieniu do rozkładów prawdopodobieństwa. W podejściu wielokryterialnym dobór metody, wartości progowych, funkcji odchyleń czy też pożądanych wartości parametrów zależą od decydenta. Również sprowadzenie problemu do zagadnienia jednokryterialnego nie jest wolne od ingerencji decydenta, zasadą decyzyjną jest bowiem indywidualnie przyjmowana funkcja oceniająca układ parametrów rozkładu. Jednak wspomniane subiektywne preferencje dotyczą tylko rozkładu prawdopodobieństwa i jego parametrów, a nie jak to ma miejsce w teorii oczekiwanej użyteczności, specyficznego wartościowania bieżącego stanu posiadania i możliwego bogactwa. W praktycznych zastosowaniach modelu z trzema momentami do wyboru optymalnego portfela akcji najczęściej jest wybierane podejście programowania celowego.

Ponadto, linia efektywna wyznaczona na podstawie modelu Markowitza jest dla danego horyzontu czasowego krzywą rosnącą której fragmenty są opisywane zależnościami funkcyjnymi. W modelu z trzema parametrami granica efektywna wyznaczana w zależności od optymalizowanego momentu jest powierzchnią w przestrzeni trójwymiarowej o własnościach trudnych do uogólnienia.

Literatura

Athayde, G., Flôres R. (2004), *Finding a maximum skewness portfolio: A general solution to three-moments portfolio choice*, "Journal of Economic Dynamics and Control", Vol. 28(7), s. 1335-1352.

Aracioğlu B., Demircan F., Soyuer H. (2011), *Mean–variance–skewness–kurtosis approach to portfolio optimization: An application in İstanbul Stock Exchange*, "Ege Akademik Bakiş / Ege Academic Review", Vol. 11, s. 9-17.

Bera A.K., Park S.Y. (2008), *Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle*, "Econometric Reviews", Vol. 27, s. 484-512.

Bhattacharyya R., Kar S., Dutta Majumder D., (2011), *Fuzzy mean – variance – skewness portfolio selection models by interval analysis*, "Computers and Mathematics with Applications", Vol. 61(1), s. 126-137.

Chunhachinda P., Dandapani K., Hamid S., Prakash A. (1997), *Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets*, "Journal of Banking and Finance", Vol. 21, s. 143-167

Eichner T., Wagener A. (2011), *Increases in skewness and three-moment preferences*, "Mathematical Social Sciences", Vol. 61, Iss. 2, s. 109-113.

Fogler H.R., Radcliffe R.C. (1974), *A note on measurement of skewness*, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", Vol. 9, Iss. 3, s. 485-489.

Groeneveld R.A., Meeden G. (1984), *Measuring Skewness and Kurtosis*, "Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)", Vol. 33, s. 391-399.

Jana P., Roy T.K., Mazumder S.K. (2007), *Multi-objective Mean-variance-skewness model for portfolio optimization*, "AMO – Advanced Modeling and Optimization", Vol. 9, No. 1, s. 181-193.

Lai T.Y. (1991), *Portfolio selection with skewness: A multiple-objective approach*, "Review of Quantitative Finance and Accounting", Vol. 1, s. 293-305.

Li X., Qin Z., Kar S. (2010), *Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns*, "European Journal of Operational Research", Vol. 202, s. 239-247.

Menezes C., Geiss C., Tressler J. (1980), *Increasing downside risk*, "American Economic Review", Vol. 70, s. 921-932.

Trzaskalik T., red. (2006), *Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym*, PWE, Warszawa.

Prakash A.J., Chang C.H., Pactwa T.E. (2003), *Selecting a portfolio with skewness: Recent evidence from US, European, and Latin America equity markets*, "Journal of Banking and Finance", Vol. 27, s. 1375-1390.

Samuelson P., (1970), *The fundamental Approximation of theorem of portfolio analysis in terms of means, variance and higher moments*, "Review of Economic Studies", Vol. 37, s. 537-542.

Simkowitz M.A., Beedles W.J. (1978), *Diversification in a three-moment world*, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", December 1978, s. 928-941.

Usta I., Kantar Y.M. (2011), *Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection*, "Entropy" 2011, Vol. 13, s. 117-133. www.mdpi.com/journal/entropy (21.06.2015).

W.R. van Zwet (1968), *Convex transformations of random variables*, "Biometrische Zeitschrift", Vol. 10, Iss. 1, s. 1-95.

OPTIMAL INVESTMENT PORTFOLIO FOR SKEWNESS MAXIMIZATION CRITERIA

Summary: In this paper we analyze the portfolio optimization problem when investor preferences relate to the expected value, variance and skewness of distribution of portfolio return. The third central moment of the distribution is taken as a measure of skewness. Portfolio optimization using higher moments is a more involved problem than the mean-variance approach. The problem is formulated as multi-objective programming problem there the investor tries to maximize expected return and skewness, while simultaneously minimizing variance. To solve such portfolio problem, we can use specific approaches and techniques. We take especially account by utilizing Goal Programming to determine the optimal structure of the investment portfolio and incorporate investors preferences for higher moments.

Keywords: Markowitz model, portfolio optimization, Goal Programming, skewness.