EDUKACJA HUMANISTYCZNA nr 1 (32), 2015
Szczecin 2015

Василий Швец
Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова

Татьяна Снигур
Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова

ПОНЯТИЕ ПЛОСКОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ

1. Смысловые линии школьного курса планиметрии. Государственный стандарт базового и полного общего среднего образования содержит в школьном курсе планиметрии две основные содержательные линии: 1) геометрические фигуры и их свойства; 2) геометрические величины, их измерения и вычисления.

В курсе математики 5–6-х классов изучаются такие геометрические фигуры как точка, отрезок, луч, прямая, угол, треугольник, прямоугольник, квадрат, окружность, круг и их простейшие свойства; из геометрических величин рассматривают длину отрезка, градусную меру угла, площадь прямоугольника, объем прямоугольного параллелепипеда и единицы их измерения.

В курсе планиметрии 7–9-х классов основными объектами изучения на плоскости являются точка, прямая, отрезок, луч, угол, треугольник, четырехугольник, многоугольник, окружность, круг. Углубляются и систематизируются сведения о геометрических величинах. В 8 классе вводится одно из важных понятий – понятие площади. Вывод формул для вычисления площадей планиметрических фигур (прямоугольника, параллелограмма, треугольника, ромба, трапеции, правильных многоугольников) опирается на основные свойства площадей.

В 8 классе при изучении темы «Многоугольники. Площади многоугольников» уточняется, что такое свойство, как площадь, свойственно не всем геометрическим фигурам, а только плоским. В частности, в программе по математике указано, что ученик объясняет, что такое плоский многоугольник. Хотя в учебниках по геометрии понятие плоского многоугольника четко не определяется.

Попытки дать определение понятия плоского многоугольника можно найти в учебниках по геометрии:

- для 8 класса, авторы Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владимирова Н. Г.: «Он (четырехугольник) разделяет плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Фигуру, состоящую из четырехугольника и его внутренней области, также называют четырехугольником»;
- для 7–11-х классов, автор Погорелов А. В.: «Плоским многоугольником или многоугольную областью называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником»;
- для 6–8-х классов, автор Колмогоров А. М.: «Объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области называется многоугольником».

В данной статье мы предлагаем определение понятия плоского геометрического тела, которое можно, на наш взгляд, включить в школьный курс планиметрии средней школы на углубленном уровне изучения данного предмета.

Для этого задействованы такие необходимые математические понятия как: плоскость; геометрическая фигура; окружность, круг и окрестность точки; отрезок; ломаная; ограниченая фигура; внутренняя точка и внутренность; предельная точка и предел геометрической фигуры.

2. Понятие геометрической фигуры, отрезка, окружности, круга и окрестности точки. В планиметрии под ***геометрической фигурой***, или плоской фигурой, или просто фигурой понимают произвольное множество (совокупность) **Ф** точек плоскости. Простейшей геометрической фигурой является точка. Из точек состоят все другие геометрические фигуры, например, отрезок, прямая, луч, круг, треугольник, плоскость и т.д.

Из школьного курса планиметрии ученикам известно, что расстояние между двумя точками прямой или плоскости – это длина отрезка, соединяющего эти точки.

К важнейшим фигурам плоскости, в частности, относятся: 1) **окружность**; 2) **круг**; 3) **открытый круг** с центром в данной точке O и заданным радиусом $r > 0$. Так называют множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние от точки O соответственно: 1) равно r; 2) не превышает r; 3) меньше за r. При этом можно обозначать:

- $S(O; r)$ –окружность с центром в точке O и радиусом r;
- К (O; r) – круг с центром в точке O и радиусом r;
- U (O; r) – открытый круг с центром в точке O и радиусом r, который также называют окрестностью (или r – окрестностью) точки O (рис. 1).

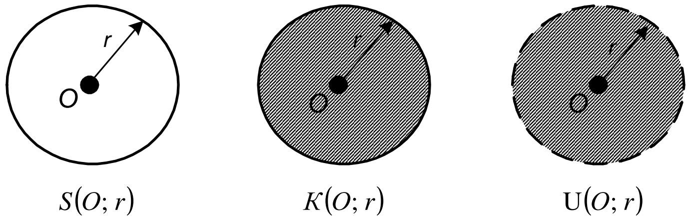

Рис. 1.

На рисунке 2 изображена фигура F, которая состоит из всех точек окрашенной части плоскости, прямой линии l, точки C и замкнутой линии p, которая ограничивает окрашенную часть плоскости.

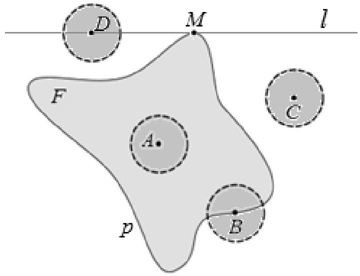

Рис. 2.

Плоскую фигуру Φ называют **ограниченной**, если все ее точки принадлежат некоторому кругу конечного радиуса.

Примеры: **1.** Фигуры, представленные на рис. 1 – ограничены.
2. Фигура F (рис. 2) – не ограничена.

3. Классификация точек плоскости относительно данной фигуры. Пусть задано плоскость и некоторую фигуру Φ на ней. Тогда точки плоскости относительно фигуры Φ называют:

1) ***внутренней*** *точкой фигуры* Φ, *когда существует окрестность этой точки, все точки которой принадлежат фигуре* Φ;
2) ***внешней*** *точкой фигуры* Φ, *когда существует окрестность этой точки, в котором нет ни одной точки фигуры* Φ;
3) ***граничной*** *точкой фигуры* Φ, *когда любая окрестность этой точки содержит в себе как точки фигуры* Φ, *так и точки, не принадлежащие фигуре* Φ;
4) ***предельной*** *точкой фигуры* Φ, *когда любой окрестность этой точки содержит в себе бесконечное множество точек фигуры* Φ;

5) ***изолированной*** *точкой фигуры Ф, когда существует окрестность этой точки, в котором только эта точка принадлежит фигуре Ф.*

Пример: Если фигура *Ф* – фигура *F*, которая изображена на рис. 2, то:

а) внутренней точкой фигуры *F* является каждая точка с окрашенной части, например, точка *A*;
б) каждая точка, которая не принадлежит ни окрашенной части, ни прямой линии *p*, ни замкнутой линии *p* и отличная от точки *C*, является внешней точкой фигуры *F*;
в) каждая точка, принадлежащая замкнутой линии или прямой линии , а также точка *C* являются граничными точками фигуры *F*;
г) каждая точка, принадлежащая окрашенной части плоскости, или прямой линии или замкнутой линии , является предельной точкой фигуры *F*;
д) единственной изолированной точкой фигуры *F* является точка *C*.

Из приведенных выше определений следует, что:

1) внутренняя точка и изолированная точка фигуры Ф всегда принадлежат этой фигуре;
2) внешняя точка фигуры Ф не принадлежит ей;
3) граничная точка и предельная точка фигуры Ф могут принадлежать, а могут и не принадлежать фигуре Ф.

Легко убедиться, что для *произвольной точки плоскости* и для заданной на ней фигуре *Ф* возможен один и только один из трех случаев:

1) эта точка является внутренней точкой фигуры Ф;
2) эта точка является внешней точкой фигуры Ф;
3) эта точка является граничной точкой фигуры Ф.

Кроме этого для точки, которая не является внешней, возможен один и только один из двух случаев:

4) данная точка является граничной точкой фигуры Ф;
5) данная точка является изолированной точкой фигуры Ф.

Относительно *произвольной точки данной фигуры Ф* возможен один и только один из двух случаев:

6) данная точка является внутренней точкой фигуры Ф;
7) данная точка является граничной точкой фигуры Ф.

Множество G (Ф) всех внутренних точек фигуры Ф называют ***внутренностью*** *фигуры Ф, а множество S (Ф) всех граничных точек фигуры Ф* ***называют границей*** *фигуры Ф.*

Объединение фигуры Ф с ее границей называют ***замыканием*** *данной фигуры и обозначают* $\overline{\Phi}$.

Примеры:

1. Если $\Phi = K(0;\ r)$ или $\Phi = \mathrm{U}(0;\ r)$, то внутренность каждой из этих фигур $G(\Phi) = U(0;\ r)$, а замыкание каждой из этих фигур $\overline{\Phi} = K(0;\ r)$.
2. Если $\Phi = S(0;\ r)$, то $\overline{\Phi} = \Phi$, а $G(\Phi) =$ Ø. Для всех этих фигур Ф их граница S(Ф(= S(0; r) .

4. Открытые и замкнутые фигуры, области и замкнутые области. Относительно границы *S* (*Ф*) данной фигуры *Ф* возможен один и только один из трех случаев:

1) S (Ф) $\subset$ Ф, то есть каждая точка границы S (Ф) является также точкой фигуры Ф и тогда фигуру Ф называют замкнутой;
2) S (Ф) $\cap$ Ф = Ø, то есть каждая точка границы S (Ф) не является точкой фигуры Ф, и тогда фигуру Ф называют открытой;
3) S (Ф) $\cap$ Ф $\neq$ Ø и S (Ф) $\not\subset$ Ф, то есть некоторые точки границы S (Ф) являются точками фигуры Ф, а некоторые нет, и тогда фигура Ф не является замкнутой, а также не является открытой.

Примеры:

1. Замкнутыми фигурами являются: каждая плоскость и пустая фигура; каждая фигура, которая состоит из конечного множества точек; объединение конечного числа замкнутых фигур, в частности, объединение конечного числа прямых; каждая окружность и каждый многоугольник; замыкание каждой фигуры.
2. Открытыми фигурами являются: каждая плоскость и пустая фигура; открытый круг (окрестность точки) объединение конечного и счетного количества открытых фигур (в частности открытых кругов); внутренность любой фигуры, в частности, внутренность любого многоугольника.
3. Ни замкнутыми, ни открытыми фигурами являются: обычный круг, из которого изъято одну граничную точку; обычный открытый круг, к которому присоединено одну граничную точку; многоугольник, из которого изъято одну вершину.

Открытую фигуру Ф называют ***областью****, когда любые две точки этой фигуры можно соединить ломаной, которая полностью содержится в этой фигуре. При этом, открытую фигуру Ф называют также* ***линейно связной****.*

Примеры:

1. Любой открытый круг является областью, а объединение двух открытых кругов без общих точек является открыта фигурой, однако не является областью, поскольку не является линейно связным.
2. Внутренность любого многоугольника является областью.
3. Круг не является областью, поскольку не является открытой фигурой.

5. Плоское геометрическое тело и его периметр. *Геометрическую фигуру Ф плоскости называют* ***плоским геометрическим телом****, если она является замыканием некоторой области G, то есть* $\Phi = \overline{G} = C \cup S(G)$. *При этом обязательно внутренность Ф совпадает с G, граница S (Ф) = S (G) и эту границу называют периметром тела Ф.*

Примеры:

1. Круг является плоским телом, а окружность и окрестность – не является телом.
2. Каждый многоугольник является телом, а объединение двух многоугольников может быть телом, а может и не быть.

Плоские геометрические тела могут быть *ограниченными* и *неограниченными*.

Пример. На рис. 3 в случае а) имеем ограниченную фигуру *F* (трапецию *ABCD*), а в случае б) – неограниченную (плоский угол *AOB*).

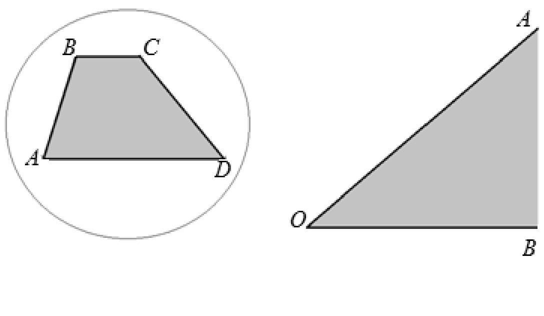

Рис. 3.

Критерий плоского геометрического тела и связанный с ним алгоритм исследования геометрической фигуры. Из определения плоского геометрического тела следует, что геометрическая фигура *Ф* является телом тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1. граница фигуры Ф совпадает с границей ее внутренности и содержится в *Ф*;
2. любые две внутренние точки фигуры *Ф* можно совместить ломаной, все точки которой являются внутренними точками *Ф*.

Это утверждение можно считать определением плоского геометрического тела и оно эквивалентно приведенному выше.

На основании данного утверждения можно составить алгоритм проверки, является ли данная геометрическая фигура *Ф* плоским телом, или нет:

1. Найти *S* (*Ф*) и внутренность *G* (*Ф*) данной геометрической фигуры *Ф*.
2. Если граница *S* (*Ф*) не содержится в фигуре *Ф*, перейти к пункту 7.
3. Если *G* (*Ф*) = ∅, то есть фигура *Ф* не имеет внутренних точек, перейти к пункту 7.
4. Если внутренность *G* (*Ф*) фигуры *Ф* не является линейно связной, перейти к пункту 7.
5. Если граница внутренности *G* (*Ф*) не совпадает с границей фигуры *Ф*, перейти к пункту 7.
6. Если граница внутренности *G* (*Ф*) совпадает с границей фигуры *Ф*, зафиксировать, что фигура *Ф* является геометрическим телом с периметром *S* (*Ф*) и перейти к пункту 8.
7. Зафиксировать, что фигура *Ф* не является геометрическим телом.
8. Если существует круг, который содержит фигуру *Ф*, то зафиксировать, что фигура *Ф* ограничена и перейти к пункту 10, если нет, то перейти к пункту 9.
9. Зафиксировать, что фигура *Ф* ограничена.
10. Если отрезок *AB* содержится в фигуре *Ф* для любых точек *A* и *B* этой фигуры, то зафиксировать, что фигура *Ф* выпуклая и перейти к пункту 12, если.

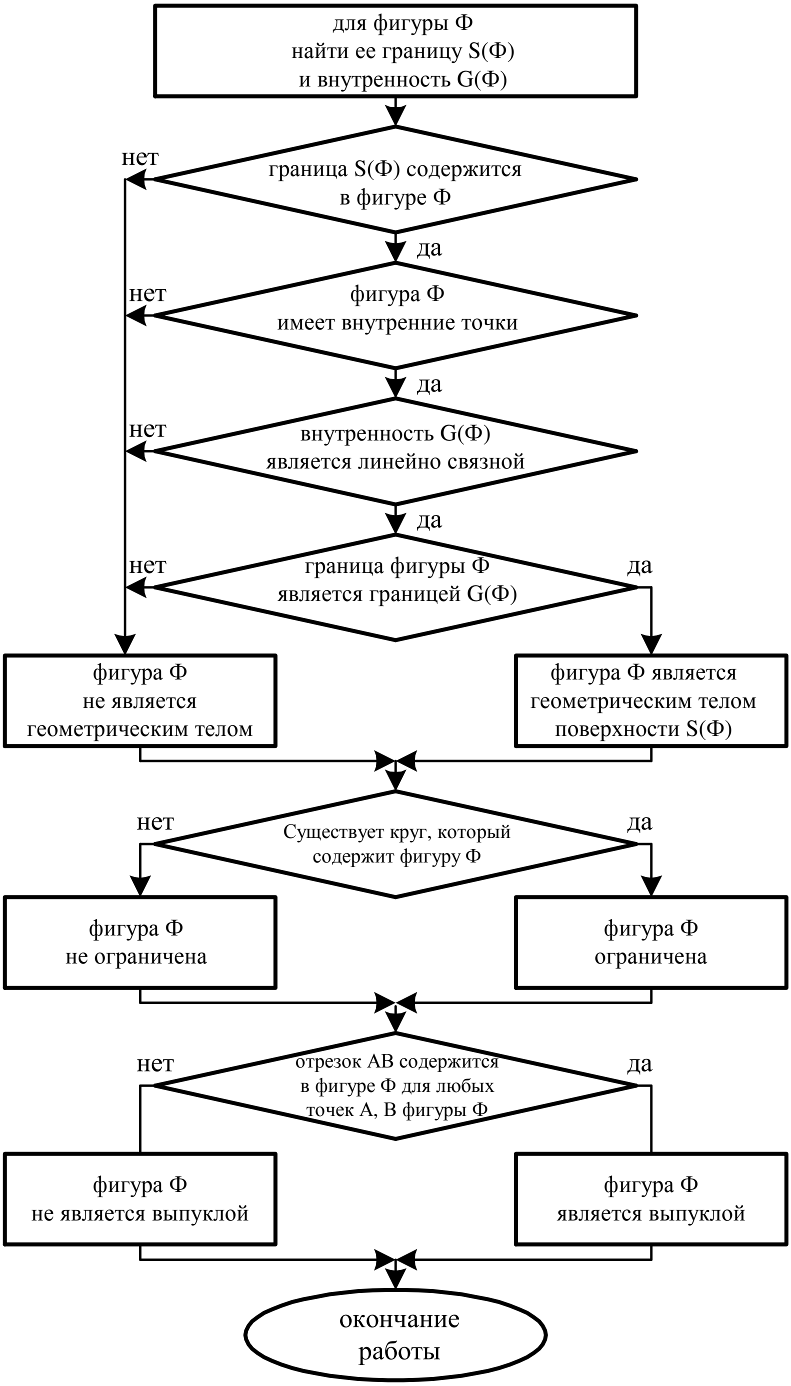
для фигуры Ф
найти ее границу S(Ф)
и внутренность G(Ф)
нет
граница S(Ф) содержится
в фигуре Ф
да
нет
фигура Ф
имеет внутренние точки
да
нет
внутренность G(Ф)
является линейно связной
да
нет
граница фигуры Ф
является границей G(Ф)
да
фигура Ф
не является
геометрическим телом
фигура Ф является
геометрическим телом
поверхности S(Ф)
нет
Существует круг, который
содержит фигуру Ф
да
фигура Ф
не ограничена
фигура Ф
ограничена
нет
отрезок AB содержится
в фигуре Ф для любых
точек A, B фигуры Ф
да
фигура Ф
не является выпуклой
фигура Ф
является выпуклой
окончание
работы

Рис. 5.

Его можно реализовать уже в основной школе в начале изучения темы «Многоугольники. Площади многоугольников». Содержание такого материала является определенным обобщением содержательной линии «Геометрические фигуры и их свойства» и основой для изучения новой содержательной линии «Геометрические величины, их измерение и вычисление».

Для математически одаренных учеников этот способ можно углубить и расширить на занятиях кружка, факультатива или отдельно выбранного элективного курса.

Список использованной литературы

Бевз Г.П. и др. Геометрия: Учебник для 8 кл. средних общеобразовательных учреждений / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н. Владимирова. – М.: Вежа, 2008. – 256 с.: ил.

Государственный стандарт базового и полного общего среднего образования. Утвержденный постановлением Кабинета Министров Украины от 23 ноября 2011, № 1392.

Жалдак М.И., Михалин Г.А., Деканов С.Я. Математический анализ. Функции многих переменных: Учебное пособие. – К.: НПУ имени М.П. Драгоманова, 2007. – 430 с.

Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия: Учебное пособие для 6–8 кл. сред. шк. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1979. – 383 с.

Математика. Учебная программа для учащихся 5–9 классов общеобразовательных учебных заведений. Программу подготовили: М.И. Бурда, Ю.И. Рисованный, Е.П. Нелин, Д.А. Номировский, А.В. Паньков, Н.А. Тарасенкова, М.В. Чемерис, М.С. Якир. – К.: 2012 Утвержден МОНМСУ (приказ МОНМС от 06.06.2012 г., № 664).

Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7–11 кл. сред. шк. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 383 с.

Василий Швец

Татьяна Снигур

Понятие плоского геометрического тела в школьном курсе планиметрии

В этой статье мы ответим на вопрос: какие геометрические фигуры являются плоскими геометрическими телами?

Чтобы ответить на этот вопрос, сначала рассмотрим классификацию точек плоскости относительно геометрической фигуры, учитывая определения изолированных точек, внутренних, внешних, предельных и граничных точек, используя определение окрестности точки..

Далее рассмотрим определения открытых и замкнутых фигур, области и замкнутой области. Исходя из этого, дадим определение плоского геометрического тела и его периметра; рассмотрим, что подразумевается под ограниченным, неограниченным и выпуклым плоским геометрическим телом. Все определения сопровождаются примерами и соответствующими рисунками.

В конце, дадим критерий плоского геометрического тела и связанный с ним алгоритм исследования геометрической фигуры.

Мы предлагаем включить этот материал в школьные учебники по планиметрии для классов профильного уровня.

Ключевые слова: геометрическая фигура, плоское геометрическое тело, окрестность точки, классификация точек фигуры

Concept of a geometrical solid in a school planimetrics course

In this article we will answer the question: which flat geometrical figures are geometrical flat bodies?

In order to be able to answer this question, we first need to consider the classification of points in a plane in relation to a given geometrical figure, taking into account the definition of individual points, internal and external points, limit and boundary points, using the concept of the neighbourhood of a point.

Next, we need to look into the concept of open and closed figures, surfaces and closed areas. Based on that, in order to provide a definition of a flat geometrical solid and of parameters thereof, we will discuss what a limited and unlimited flat convex body means. All the concepts are illustrated with examples and pictures.

Finally, we will set out the criterion that must be met by flat geometrical bodies and describe an algorithm for geometrical shape investigation.

The authors suggest that thecontent presented could be included in planimetrics course books for classes with a special curriculum.

Keywords: geometrical figure, flat geometric body, neighbourhood of a point, figure point classification

Przetłumaczone przez Eugenię Smyrnovą-Trybulską