STUDIA Z TEORII
WYCHOWANIA
TOM IX: 2018 NR 3(24)



**Marek Piotrowski**
Chrześcijańska Akademia Teologiczna w Warszawie


# Matematyczny Trójkąt Bermudzki – trudności w kształceniu zaradności matematycznej

## Wprowadzenie

Niepokojące informacje dotyczące szkolnej edukacji matematycznej warto podzielić na dwie grupy.

Pierwszą stanowią rezultaty sprawdzianów i egzaminów po klasie III i VI szkoły podstawowej, egzaminów gimnazjalnych i maturalnych. W większości tych pomiarów, na przekór optymistycznym komentarzom z badań PISA 2012, znajdujemy informacje o niskim zasobie wiedzy oraz umiejętności uczniów i uczennic od 9 do 19 roku życia.

W tym miejscu warto przytoczyć nieuzasadnione komentarze MEN o rzekomym sukcesie polskich uczniów w badaniach PISA 2012: „Wyniki polskich uczniów w zakresie umiejętności matematycznych (mathematical literacy) dają im miejsce w grupie najlepszych krajów Unii Europejskiej, na równi z Holandią, Estonią i Finlandią"[1], które zostały zweryfikowane negatywnie nie tylko przez niezależnych recenzentów[2] [3], ale również rezultaty PISA 2015[4] oraz wyniki egzaminu maturalnego z 2015 r[5].

---

[1] MEN, *Odpowiedź podsekretarza stanu w MEN na interpelację nr 24691*, Sejm Rzeczypospolitej Polskiej, 2014.

[2] P. Kasprzak, *44 myśli na temat „Wybrane fakty i mity na temat PISA 2012"*, 2014, http://smarterpoland.pl/index.php/2014/01/mity-dotyczace-pisa-2012/#comment-170328, z dn. 07-11-2017.

[3] M. Piotrowski, *Od TQM do żandarma, czyli pod prąd*, VEGA, Warszawa 2013, s. 43 i następne.

[4] Z. Marciniak, A. Sułowska, *Matematyka, Wyniki badań PISA 2015 w Polsce*, IBE, Warszawa 2017 s. 71-81.

[5] J. Daniel, M. Fałat, I. Szafrańska, *Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2015 Matematyka*, CKE Warszawa, 2015, s. 5 i następne.

Do drugiej grupy informacji zaliczyć można opinie absolwentów szkolnej edukacji np. naszych studentów (przyszłych pedagogów) dotyczące definicji matematyki oraz celowości jej nauczania. Nie trzeba prowadzić specjalnych badań, by przekonać się, że obce jest im określenie matematyki jako „nauki dostarczającej narzędzi do otrzymywania ścisłych wniosków z przyjętych założeń, zatem dotyczącej prawidłowości rozumowania. Ponieważ ścisłe założenia mogą dotyczyć najróżniejszych dziedzin myśli ludzkiej, a muszą być czynione … nawet w naukach humanistycznych, zakres matematyki jest szeroki i stale się powiększa"[6]. W powyższej definicji zdziwienie studentów wywołuje utożsamienie matematyki: ze sposobem myślenia (a nie rachunkami) oraz przypisanie naukom humanistycznym, przynajmniej w niektórych sytuacjach, ścisłych założeń, a tym samym jednoznacznie określonych wniosków.

Większość przyszłych pedagogów akceptuje definicję matematyki sformułowaną w Słowniku Języka Polskiego: „matematyka - nauka o liczbach, figurach i stosunkach przestrzennych, posługująca się metodą dedukcyjną"[7]. Studenci nie znają pojęcia quasi indukcyjnego poszukiwania wiedzy w matematyce[8] oczekując spójności wszystkich jej dziedzin z jednym zestawem aksjomatów, jak w geometrii euklidesowej. Mimo, że część z nich planuje uczyć w przyszłości matematyki lub przedmiotów przyrodniczych to naturalne metody indukcyjne są im obce.

Podobny dylemat występuje przy próbie zdefiniowania pojęcia umiejętności heurystyczne. W tym wypadku większość studentów akceptuje definicję z Wikipedii: „umiejętność wykrywania nowych faktów oraz znajdowania związków między faktami, zwłaszcza z wykorzystaniem hipotez. Na podstawie istniejącej wiedzy stawia się hipotezy, których nie trzeba udowadniać"[9]. Natomiast odrzucają sformułowanie ze Słownika Języka Polskiego: umiejętność wykrywania i kojarzenia ze sobą nowych faktów, które są pomocne w dochodzeniu do poznania nowych prawd[10].

Na zakończenie warto zauważyć, że większość przyjmuje jako utopię zalecenie europejskich ram odniesienia[11], by nauczanie matematyki było

[6] Wikipedia, hasło: matematyka, z dn. 07-11-2017.

[7] Słownik Języka Polskiego PWN, hasło: matematyka, z dn. 07-11-2017.

[8] I. Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Warszawa, 2005, Tikkun.

[9] Wikipedia, hasło: umiejętności heurystyczne, z dn. 07-11-2017.

[10] Słownik Języka Polskiego PWN, hasło: umiejętności heurystyczne, z dn. 07-11-2017.

[11] Parlament Europejski, *Kluczowe kompetencje w uczeniu się przez całe życie. Europejskie ramy odniesienia*, Dziennik Urzędowy UE 2006/962/WE, s. 10-18.

związane z kreowaniem postawy „szacunku dla prawdy i chęci szukania przyczyn i oceniania ich zasadności".

Tak więc nasi studenci:

- nie znają matematyki jako nauki dotyczącej prawidłowości rozumowania,
- kształtującej postawę szacunku do prawdy,
- a umiejętności heurystyczne to według nich stawianie hipotez, których nie trzeba weryfikować.

Powyższe trzy sformułowania wydają się wyznaczać *matematyczny trójkąt*, w którym uczniowskie matematyczne kompetencje poznawcze giną tak, jak statki w trójkącie Bermudzkim.

Poniższy artykuł będący refleksją nad rezultatami pomiaru kompetencji matematycznych w klasach IV szkół podstawowych *Gminy Laboratorium* będzie próbą wskazania możliwości innej edukacji matematycznej, tak by jej absolwenci żeglowali w poprawnie określonym celu i daleko od *matematycznego trójkąta Bermudzkiego*.

W artykule przedstawiono analizę monitoringu kompetencji matematycznych prowadzonego w 2017 r. Publikacja jest kontynuacją artykułu Moniki Jakubowskiej[12]. Informacje dotyczące zasad i celowości pomiarów prowadzonych w postaci monitoringu znajdują się w publikacji[13].

**Wokół tych samych problemów**

Od momentu rezygnacji w szkolnych curriculach z tzw. *nowej matematyki* związanej m.in. z nauczaniem podstaw topologii w klasach I-III[14] we współczesnej literaturze pedagogicznej, panuje przekonanie o większym znaczeniu dyskursu „jak uczyć", w porównaniu z dylematami dotyczącymi zakresu nauczanych treści[15], a w większości publikacji matematyczna praktyka szkolna opisywana jest przez dwie koncepcje:

1. Uczenia się poprzez uczniowskie doświadczanie, mającego podstawy przede wszystkim w edukacyjnym konstruktywizmie.

---

[12] M. Jakubowska, *Diagnoza rozumowania heurystycznego w procesie rozwiązywania i tworzenia zadań z treścią,* „Studia z Teorii Wychowania" 2018 nr 4 (25) (w druku).

[13] M. Piotrowski, *Monitoring kompetencji szkolnych w środowisku lokalnym. Wyzwania*, „Studia z Teorii Wychowania" 2017, nr 2 (19).

[14] Z. Semadeni, *Raport o nauczaniu matematyki w klasach początkowych,* „Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego", 1990, s. 239-257.

[15] D. Klus-Stańska, *Wiedza, która zniewala – transmisyjne tradycje w szkolnej edukacji*, „Forum Oświatowe" 2012 nr 1 (46).

2. Nauczania poprzez wykonywanie przez uczniów instrukcji nauczycieli, umotywowane głównie koncepcją behawiorystyczną.

Część pedagogów koncentruje się na podkreślaniu antagonizmów między powyższymi koncepcjami, inni natomiast na możliwości ich wzajemnego uzupełniania się.

Ad 1. U podstaw konstruktywizmu istnieje przekonanie, że uczniowie konstruując własne sposoby rozwiązywania problemów zyskują wiedzę i umiejętności, które „pozostają z nimi na dłużej" niż w nauczaniu polegającym na wykonywaniu poleceń. Jednocześnie poznają optymalne dla siebie sposoby uczenia sią. W tej koncepcji warto jedna zamienić niefortunną i niebezpieczną zasadę „uczeń w centrum uwagi (rodziców i nauczycieli) na „uczeń w centrum swojej nauki".

Koncepcja edukacyjnego konstruktywizmu posiada już swoją długą historię i wiele opracowań. Na potrzebę niniejszego artykułu skorzystano z wyników próby wyodrębnienia niezależnych cech konstruktywizmu na podstawie opinii najbardziej zainteresowanych – studentów[16]. Ustalono w ten sposób 4 niezależne cechy związane z:

- rolą uczenia się zespołowego,
- znaczeniem sposobu w jaki tworzymy wiedzę,
- nauczaniem problemowym,
- postrzeganiem własnych trudności w uczeniu się i motywacji do zdobywania kompetencji.

Ad 2. Krytyka edukacyjnego konstruktywizmu jak i promowanie koncepcji behawiorystycznej ma wiele źródeł. Jednak nawet najbardziej przekonani o prymacie konstruktywistycznej edukacji nauczyciele potwierdzają słuszność koncepcji behawiorystycznej, gdy jest ona dobrze umotywowana, np. studiując dość obszerną publikację pełniącą rolę handbooka behawioryzmu Karen Pryor[17],

Część nauczycieli krytykując konstruktywizm podkreśla jego związek z patologiami współczesnych szkół, m.in.:

- Dewaluacją roli nauczycieli postrzeganych przez uczniów jako koledzy. Co prowadzi do przeceniania nauczycieli, którzy zamiast uczyć bawią. Niechęcią uczniów do pracy i rzetelnego zgłębiania wiedzy, która rzekomo może być pozyskiwane bez wysiłku i miłej atmosferze.

---

[16] S. Loyens, R. Rikers, H. Schmidt, *Students' conceptions of distinct constructivist assumptions*, „European Journal of Psychology of Education" 2007, nr 2 (22), s. 179-199.

[17] K. Pryor, *Najpierw wytresuj kurczaka*, Media Rodzina, Poznań 2004.

- Podkreślaniem relatywizmu wiedzy prowadzącego do relatywizmu wartości.
- Dowolności sposobu nauczania już od wczesnej edukacji, co może prowadzić do złych rezultatów w przyszłości.

W szczególności krytyce podlegają koncepcje tzw. *humanistycznej teorii edukacji* (nierozerwalnie związanej z konstruktywizmem). Prace uczniowskie powinny być prowadzone w odpowiednim, przygotowanym przez nauczyciela środowisku. Nauczyciel nie może porzucić swojej roli oceniającego postępy uczniów. Ma pozostać mistrzem. Co jest wyraźnie sprzeczne z koncepcją Carla Rogersa[18] pół wieku temu rozwijającego *humanistyczną koncepcję edukacji*, w której od najmłodszych lat uczeń powinien mieć możliwość rozwoju zapewnioną przez nauczyciela (który jednak nie powinien go uczyć).

W przedmiotach matematyczno-przyrodniczych słuszność nauczycielskiego merytorycznego mistrzostwa rzadko jest podważana. Jednak dyskusji podlegać może jego sposób nauczania wynikły z nauk humanistycznych (pedagogiki, socjologii, psychologii). Nauk kojarzonych z subiektywną postacią wiedzy.

Postmodernistyczne zwątpienie w nauki humanistyczne nie tylko ułatwia podważanie metod stosowanych przez nauczycieli, ale również usprawiedliwia fatalne poczynania władz edukacyjnych oraz wielu pseudo pedagogicznych środowisk, które z rzeczywistością szkolną praktyką nie mają nic wspólnego. Przekonanie o niemożności oceny rozwiązań wprowadzanych do systemu edukacji przed ich wprowadzeniem wykorzystywane jest również od 25 lat przez MEN. W ten sposób stale tworzone są nowe filary reformy systemu edukacji (których sensowności nie można rzekomo ocenić w debacie publicznej przed wprowadzeniem) by po już kilku latach ustępowały miejsca kolejnym, równie złym.

W świetle powyższej argumentacji łączącej konstruktywizm z postmodernizmem nie dziwią obawy wielu nauczycieli wobec kolejnej: „nowej matematyki", nowej podstawy programowej, nowego systemu szkolnego, projektów matematycznych, zakazów lub ograniczeń prac domowych, ocenianiem kształtującym etc.

Negatywny stosunek do konstruktywizmu i reform systemu edukacji jako kontynuacji postmodernizmu jest domeną nauczycieli i pedagogów nie

[18] C. R. Rogers, *Freedom to Learn. A View of What Education Might Become*, Charles E. Merrill Publishing Company, Ohio 1969.

tylko w Polsce. Piszą o nim również pedagodzy amerykańscy np. Harvey Pegues[19].

Warto jednak zauważyć, że wypowiedzi uczniów edukacji wczesnoszkolnej, w tyk 9-letniej Ani: *Najtrudniejszym rodzajem myślenia jest myślenie jak myślę*[20] uzmysławiają obszar możliwych sukcesów konstruktywistycznego nauczania, o ile uda się ominąć związane z nim inne niebezpieczeństwa.

**Zaradność matematyczna badana w monitoringu**

Celem monitoringu kompetencji szkolnych w *Gminie Laboratorium* było wspomaganie nauczycieli w poszukiwaniu metod lepszego nauczania matematyki zatem badania te związane były również ze sporem pomiędzy konstruktywistyczną i behawiorystyczną koncepcją nauczania.

Zgodnie z definicją zawartą w europejskich ramach odniesienia: „kompetencje matematyczne obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji". W monitoringu podczas dialogu z nauczycielami miejsce tej definicji zajmuje pojęcie *zaradności matematycznej*, czyli: „umiejętności wykorzystania i rozwijania posiadanej wiedzy przy rozwiązywaniu nowych problemów".

*Zaradność matematyczna* nie odnosi się jedynie do codziennych sytuacji, jak to zalecono w dokumencie UE. Autorami tej definicji są fizycy i matematycy twierdzący, że cel nauczania matematyki nie powinien być ograniczany. Świadomi tego, że matematykę można poznawać również poprzez grę w szachy i to niezależnie od wieku, a więc również w edukacji przez całe życie.

W europejskich ramach odniesienia zwraca się uwagę na to, że „kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia (myślenie logiczne i przestrzenne) oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele)".

Powyższemu zakresowi sprawdzanych kompetencji w monitoringu odpowiadają dwa poziomy odniesienia *zaradności matematycznej*: prostszy (G2) oraz trudniejszy (G3).

W europejskich ramach odniesienia kompetencje matematyczne związane są również z niezbędną wiedzą: „obejmującą solidną umiejętność

[19] H. Pegues, *Of paradigm wars: Constructivism, objectivism, and postmodern stratagem*, „Educational Forum" 2007, 4 (71), s. 316-330.

[20] R. Fisher R., *Thinking about Thinking Developing Metacognition in Children*, „Journal Early Child Development and Care" 1998, 141, s. 1-15.

liczenia, znajomość miar i struktur, głównych operacji i sposobów prezentacji matematycznej, rozumienie terminów i pojęć matematycznych". W monitoringu wiedza ta jest związana z poziomem odniesienia (G1), którego opanowanie może być oceniane niezależnie od *zaradności matematycznej*.

W kompetencjach określonych przez ramy odniesienia UE w zakresie umiejętności uczenia się związane są z wieloma czynnikami, które trudno powiązać z monitoringiem. Jednak na szczególną uwagę zasługuje sformułowanie: „Kluczowymi czynnikami w rozwinięciu tej kompetencji u danej osoby są motywacja i wiara we własne możliwości". W analizie wyników monitoringu oba te elementy są dokładnie dyskutowane.

Wykorzystywane w powyższym opisie pojęcie *zaradności matematycznej* dzięki swej prostocie zrozumiałe również dla uczniów (nie tylko nauczycieli i rodziców) można odnieść do uprzednio wspomnianego sporu pomiędzy konstruktywistyczną a behawiorystyczną koncepcją nauczania oraz organizacją przestrzeni klasowej.

Bez dodatkowych rozważań zauważyć można, że *zaradność matematyczną* znacznie trudniej kształcić w klasie, w której dzieci siedzą w ławkach i w ciszy rozwiązują zadania (np. z zeszytów ćwiczeń). W takim środowisku łatwiej korzystać z behawiorystycznych metod nauczania, w tym transferu wiedzy. Natomiast znacznie prościej kształcić *zaradność matematyczną*, gdy dzieci pracują przy stolikach w małych grupach, od czasu do czasu dyskutując ze sobą i spierając się. W takim środowisku łatwiej również wprowadzać konstruktywistyczną koncepcję nauczania.

Jednak samo „zajrzenie do klasy" nie umożliwia stwierdzenia sposobu prowadzenia zajęć. W „Naszym elementarzu", w którym na pierwszych strona pokazano dzieci zajmujące się różnymi aktywnościami i siedzące przy stolikach edukacja matematyczna prowadzona jest za pomocą tzw. antologii liczby[21]. Zatem za pomocą metody nudnej i całkowicie niedostoswanej do dzisiejszych uwarunkowań, w której wszystkie dzieci uczą się jednocześnie tego samego (tego, co zresztą zdecydowana większość z nich i tak już zna). Ta wizja sposobu nauczania była na tyle naganna, że wywołała masowy sprzeciw 70% nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej[22].

Badając w monitoringu poziom *zaradności matematycznej* i dyskutując z nauczycielami wyniki pomiarów możemy nie wchodząc do klas odwołać się do „ustawienia ławek" oraz trudności związanych z efektywnym nauczaniem

---

[21] M. Lorek, L. Wollman, *Nasz elementarz*, MEN, Warszawa 2014 s. 6-7 oraz 41 i następne.

[22] A. Grabek, *Elementarz w ogniu krytyki*, Rzeczpospolita 02.03.2015.

matematyki. Rozważanie powiązane są z konkretnymi matematycznymi problemami i uczniowskimi rozwiązaniami, zatem mamy szansę otwierać przestrzeń wymiany doświadczeń i zwiększając zaufanie stworzyć warunki wzrostu kapitału społecznego (czynnika niezbędnego do prowadzenia reformy systemu edukacji w Polsce).

**Zmienne niezależne monitoringu**

Badając efektywność rozwiązywania problemów matematycznych uwzględniano kilka parametrów niezależnych, w tym: wykształcenie rodziców, płeć uczniów oraz ich wiek. Wykształcenie rodziców w monitoringu prowadzonym w *Gminie Laboratorium* jest jedynym parametrem opisującym kapitał rodzinny. W tym szczególnym lokalnym środowisku parametr ten jest nadal poprawnie określony (monitoring trwa już od ponad 20 lat). W trakcie wstępnego standaryzowania zadań w małych miejscowościach o dużym bezrobociu wykształcenie rodziców okazało się być mniej istotnym parametrem na skutek eurosieroctwa. Podobnie w Warszawie, z powodu dużego udziału dzieci z rodzin rozwiedzionych, czynnik wykształcenia rodziców nie jest poprawny (zwłaszcza, że udział dzieci z rodzin po rozwodzie jest większy w przypadku lepiej wykształconych rodziców).

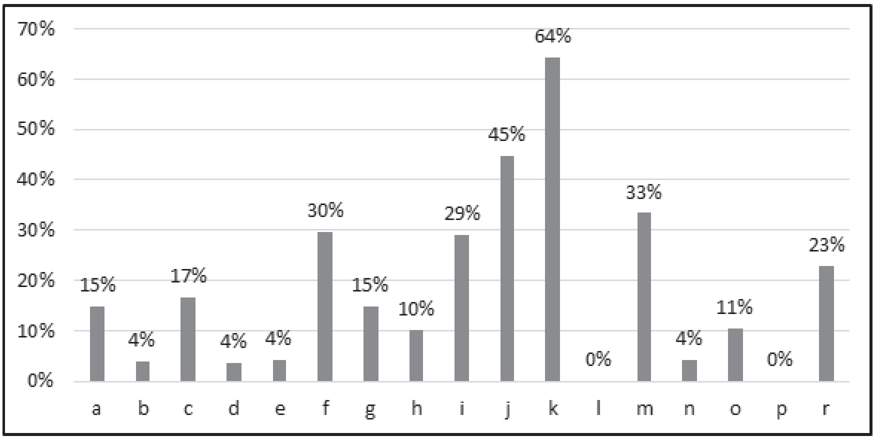
W analizach osiągnięć szkolnych 15 latków z 41 krajów - w badaniach OECD PISA kapitał rodzinny jest szacowany za pomocą skomplikowanego (być może za bardzo skomplikowanego) wieloparametrycznego modelu uwzględniającego: elitarność vs. egalitarność społeczeństwa, model dwupokoleniowej vs. trzypokoleniowej rodziny, posiadanego rodzeństwa, rodzinnego SES, liczby książek oraz dóbr kultury, własnego zainteresowania nauką, większego wysiłku i wytrwałości, a także większej samoświadomości lub samooceny. Co ważne, w bogatszych krajach uwarunkowania rodzinne są silniejsze, chociaż nie związane bezpośrednio z zamożnością rodziny, a z formą komunikowania się w niej[23].

W naszych badaniach tak skomplikowane obliczenia nie są potrzebne, ponieważ ich celem nie jest rankingowanie środowisk edukacyjnych na podstawie samo uzgadniającego się modelu ilościowego.

W uproszczonym modelu stosowanym w monitoringu wyróżniono 5 poziomów kapitału rodzinnego, oznaczonych jako: 1., 1.5, 2., 2.5, 3.

[23] M. M. Chiu, Z. Xihua, *Analyses of students in 41 countries*, „Learning and Instruction" 2008 nr 4 (18), s. 321-336.

Najniższy z nich (1.) odpowiada rodzicom bez wykształcenie średniego a najwyższy (3.), gdy oboje rodzice posiadają wykształcenie wyższe[24].



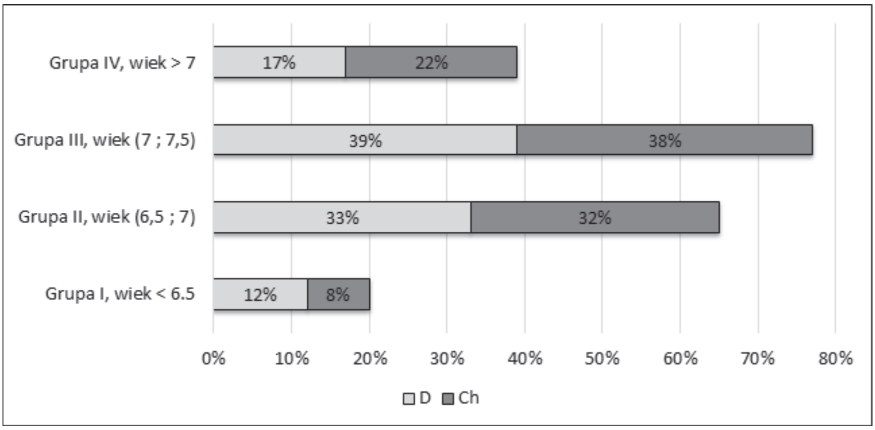

Ryc. 1. Udział dzieci o najniższym kapitale rodzinnym (1. oraz 1.5) w klasach biorących udział w monitoringu. Źródło: Jakubowska M., Piotrowski M., … dz. cyt.

Wyróżnienie 5 poziomów potencjału rodzinnego pozwoliło na sformułowanie pytania o związek pomiędzy potencjałem rodzinnym a poziomem badanych kompetencji matematycznych.

Wiek uczniów biorących udział w monitoringu związany jest z wieloma czynnikami, m.in.: MEN-owskim projektem wprowadzenia do klas I 6-latków, oporem rodziców przeciwnych temu projektowi, szybszego rozwoju dziewcząt niż chłopców, dążeniem rodziców i pedagogów do późniejszego rozpoczęcia szkolnej edukacji przez część dzieci na skutek obaw przed niepowodzeniami.

Wyróżnienie 4 grup wiekowych (dalej oznaczanych przez I, II, III, IV) pozwoliło na zadanie pytania dotyczącego związku pomiędzy wiekiem rozpoczęcia szkolnej nauki a poziomem kompetencji matematycznych w klasie IV. Uczniowie najmłodszej grupy (I) rozpoczęli naukę w wieku młodszym niż sześć i pół roku, a grupa najstarsza po ukończeniu 7.5 lat. W tej grupie mogły znaleźć się również dzieci rozpoczynające edukację wcześniej lecz powtarzające którąś z klas.

[24] M. Jakubowska, *Diagnoza rozumowania heurystycznego w procesie rozwiązywania i tworzenia zadań z treścią*, „Studia z Teorii Wychowania" 2018 nr 4 (25).




Ryc. 2. Grupy uczniowskie w podziale na wiek rozpoczęcia szkolnej nauki. Źródło: Jakubowska M., Piotrowski M., … dz. cyt.

Analizując wiek uczniów stwierdzono, że:

- w wśród dzieci młodszych dominują dziewczęta, a wśród starszych chłopcy,
- średni wiek dzieci rozpoczynających szkolną edukację wynosił około 7 lat i jeden miesiąc (przed wprowadzeniem reformy wynosił 7 lat i sześć miesięcy),
- zróżnicowanie wiekiem na poziomie klasy IV wynosiło ok. 1,5 roku (przed wprowadzeniem zmian ok. 1 roku).

Zatem w badanych szkołach i tym konkretnym roczniku względem okresu przed reformą 2009 r.: dzieci poszły do szkoły 5 miesięcy wcześniej i wyraźnie wzrosło zróżnicowanie wieku uczniów na poziomie jednej klasy. Inne roczniki, nawet w tej samej społeczności, mogą mieć inną charakterystykę, ponieważ wzrastał opór społeczny i na jego skutek zmieniały się plany MEN. Przed negatywnymi rezultatami reformy przestrzegali również akademicy biorący udział w monitoringu[25].

W analizie uwzględniono również płeć dzieci, więc możliwe było stwierdzenie związku pomiędzy płcią a poziomem badanych kompetencji matematycznych.

[25] Putkiewicz E., Murawska B., Piotrowski M., *Gotowość szkół Warszawy do realizacji przemian związanych z obniżeniem wieku szkolnego*, „Kwartalnik Pedagogiczny” 2009 nr 2, s. 133-158.

**Wybrane zadania**

W monitoringu spośród 28 zadań wybrano takie 4, w których sprawdzano niekonwencjonalną umiejętność rozwiązywania problemu za pomocą *prób i błędów*. Zadania te pomagały w ocenie uczniowskiej *zaradności matematycznej*.

Zadanie 1. Ania kupiła kostki masła po 4 zł za sztukę oraz słoiki dżemu po 3 zł za sztukę. Za zakupy zapłaciła 15 zł. Ile kupiła kostek masła i ile słoików dżemu?

W badanej grupie uczniowskiej zadanie należy do grupy G2 - sprawdza *zaradność matematyczną* lecz nie wymaga umiejętności wykonywania trudnych obliczeń, odnajdywania skomplikowanych zależności etc.

Tylko 5% uczniów nie podjęła tego zadania i aż 75% rozwiązało je poprawnie. Różnica między łatwością[26] dla uczniów o różnym kapitale rodzinnym jest wyraźna, ale nie „drastyczna". Zadanie rozwiązało około 60% uczniów o najniższym kapitale (gdy oboje rodzice posiadają wykształcenie podstawowe lub zawodowe) i około 80% uczniów, których przynajmniej jedno z rodziców ma wykształcenie wyższe.

Łatwość tego zadania wyznaczona dla dziewcząt i chłopców jest taka sama (w granicach błędu statystycznego).

Zadanie 2. Pies Zefir i kot Mruczek ważą łącznie 10 kg. Pies jest cięższy od kota o 4 kg. Ile waży pies, a ile kot?

To zadanie jest trudniejsze od poprzedniego (ma łatwość 31%) nie tylko z powodu konieczności wykonywania trochę bardziej skomplikowanych obliczeń, ale również ze względu na podobieństwo do zadań, których rozwiązanie jest możliwe za pomocą prostych formalizmów. A na poziomie kompetencji matematycznych klasy IV żaden ze znanych przez uczniów formalizmów nie był przydatny przy rozwiązaniu tego zadania (należącego do grupy G3).

Zadania nie podjęło około 13% uczniów. Dla grupy uczniowskiej o najniższym kapitale rodzinnym zadanie było za trudne, tylko 12% uczniów odnalazło poprawne rozwiązania. Udział procentowy uczniów z największym kapitałem rodzinnym, którzy umieli rozwiązać to zadanie jest ponad trzykrotnie większy, wynosi około 40%.

Zadnie 2 okazało się łatwiejsze dla chłopców (łatwość 35%) niż dla dziewcząt (łatwość 27%).

[26] Łatwość zadania to wartość średnia liczby punktów za rozwiązane zadania względem maksymalnej liczby punktów, jakie można było uzyskać w tym zadaniu.

Zadanie 3. W oba prostokąty wpisz taką samą liczbę tak, aby wynik odejmowania był taki sam jak wynik dodawania.

30 – □ = 16 + □

Zadanie 3 jest najtrudniejsze z dyskutowanych. Zdecydowanie przekracza poziom szkolnego curriculum dla klasy IV. Może być przydatne przy wprowadzeniu nowych treści. Tylko 15% uczniów rozwiązało je poprawnie.

Postać zadania 3 jest bardzo podobna do zadań prostych sprawdzających opanowanie łatwego formalizmu („na dodawanie" lub „na odejmowanie"), dlatego też tylko 9% uczniów nie podjęło tego zadania.

Również w tym zadaniu więcej poprawnych odpowiedzi udzielili chłopcy (łatwość 18%) niż dziewczęta (łatwość 12%).

Zadanie 4. Tomek ma: 14 talerzy, 50 czereśni i 52 truskawek. Robiąc podwieczorek powinien na każdym talerzu położyć 12 czereśni, 10 truskawek. Ile podwieczorków może przygotować?

□ 14 □ 12 □ 5 □ 4

To zadanie ma postać zadania zamkniętego, jest podobne do przykładów z pomiarów TIMSS. Wprowadzono je do monitoringu, by porównać jego rezultaty z pomiarami TIMSS 2015[27].

W przypadku zadania zamkniętego (z 4 podanymi propozycjami rozwiązań) uczeń sprawdza, która z odpowiedzi jest poprawna. Mamy możliwość oceny tzw. *czytania ze zrozumieniem*, ale nie analizy problemu. Postać zamknięta w znacznie mniejszym stopniu sprawdza *zaradność matematyczną*, jest za to znacznie prostsza w ocenie uczniowskich prac, ze względu na możliwość zastosowania czytników („sprawdzających" dziesiątki prac w ciągu minuty), co obniża koszty badań.

Zadanie 4 okazało się proste (G2), jego łatwość wynosiła 60%. Zadanie rozwiązało około 50% uczniów o najmniejszym kapitale i około 70% o największym. Tylko 3% uczniów nie podjęło zadania. Skuteczność w rozwiązaniu problemu przez dziewczęta i chłopców była taka sama.

W poprzednio prowadzonych pomiarach podobne przykłady do zadania 4 miały postać otwartą (bez wskazanych 4 odpowiedzi) stąd ich łatwość była mniejsza, a większa liczba uczniów nie podejmowała się rozwiązywania.

[27] K. Biedrzycki i inni, *Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów PISA 2015 w Polsce*, ICE, Warszawa 2015, s. 79.

Porównanie łatwości zadań otwartych i zamkniętych nie jest proste, ponieważ trudno oszacować rezultat zgadywania odpowiedzi przez uczniów, którzy nie umieją lub nie chcą go rozwiązać. W przybliżeniu, korzystając z aproksymacji liniowej można oszacować łatwość zadania 4 w postaci otwartej na 46%.

**Porównanie z pomiarami TIMSS**

Rezultat uzyskany w monitoringu w jednym przykładzie (w zadaniu 4, łatwość 60%) jest lepszy od wyników uzyskanych przez polskich uczniów w badaniach TIMSS (łatwość 50%) oraz średniej z badań (łatwość 38%). Podobne relacje występują w innych zadaniach (poza jednym) łączących rezultaty monitoringu z badaniami międzynarodowymi.

Jest to potwierdzenie wyższego średniego poziomu kompetencji matematycznych w *Gminie Laboratorium* w porównaniu ze średnimi rezultatami w Polsce. Przewaga *Gminy Laboratorium* w pomiarach poziomu kompetencji matematycznych jest widoczna również w sprawdzianach po klasie VI w 2015 i 2016 r[28]. Tylko w tych latach arkusze egzaminacyjne z matematyki i języka polskiego były rozdzielone, co umożliwiło dokładną ich analizę pod względem kompetencji matematycznych.

Tabela 1. Rezultaty sprawdzianu po klasie VI w *Gminie Laboratorium* w skali centylowej względem wyników z w całym kraju. Opracowanie własne na podstawie danych CKE.

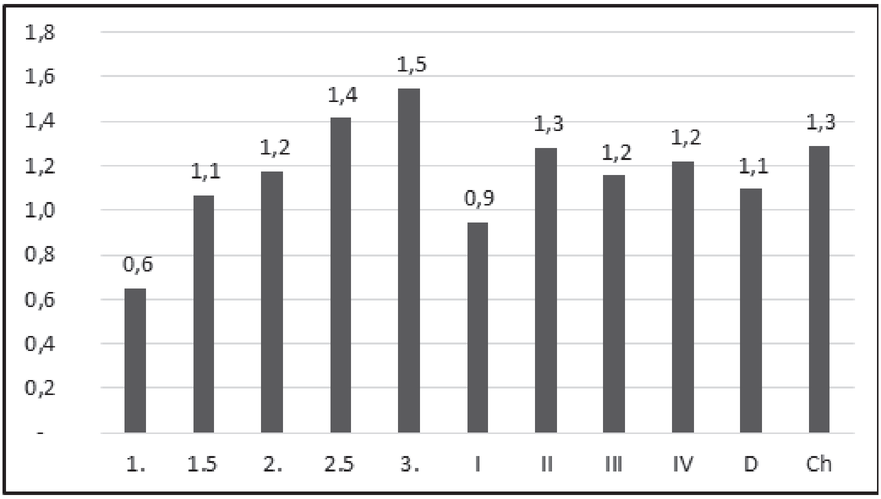
| ROK | J. polski | Matematyka |
|---|---|---|
| 2015 | 62% | 66% |
| 2016 | 59% | 64% |

**Rezultaty monitoringu – wyniki**

Informacje uzyskane z monitoringu można podzielić na dwie grupy. Pierwsza związana jest bezpośrednio z wynikami, druga ze sposobami nauczania i możliwościami wprowadzenia zmian.

Na wykresie poniżej przedstawiono sumę punktów jaką uzyskali uczniowie i uczennice (przy uwzględnieniu wag punktowych proporcjonalnych do trudności zadania).

[28] OKE w Gdańsku, *Wyniki sprawdzianu w gminach województwa pomorskiego, 2015 oraz 2016*, Gdańsk 2015 oraz 2016.



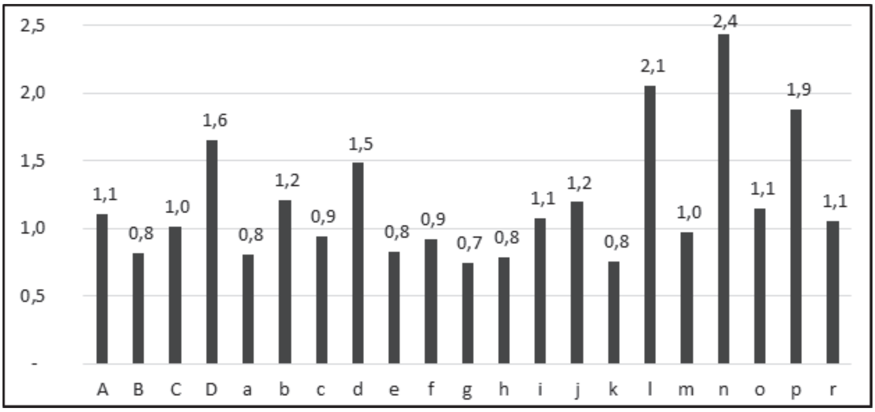

Ryc. 3. Suma punktów uzyskanych przez uczniów o różnym kapitale rodzinnym (1., 1.5, 2, 2.5, 3), w różnym wieku rozpoczęcia nauki (I, II, III, IV) oraz dziewcząt i chłopców

Zdecydowanie największe zróżnicowanie występuje ze względu na kapitał rodzinny. Uczniowie, których rodzice nie mają wykształcenia średniego (grupa 1.) uzyskali prawie trzy razy mniej punktów niż ci, których przynajmniej jedno z rodziców posiada wykształcenie wyższe (2.5 i 3.).

Wśród czterech różnych grup wiekowych (I, II, III, IV) wyróżnia się grupa najmłodszych dzieci (I) uzyskująca rezultaty niższe od pozostałych o około 20%. Nie jest to duża różnica, ale należy pamiętać, że w badanym roczniku nie było przymusu posyłania 6 letnich dzieci do szkoły. Zatem te 6-latki, które uczestniczyły w badaniach przyszły do klasy I z pozytywną diagnozą pedagogiczną – lepiej przygotowane do szkolnej edukacji. W następnym roczniku zróżnicowanie może być większe.

W grupie analizowanych zadań chłopcy uzyskali lepsze o kilkanaście procent rezultaty od dziewcząt.

Stosunkowo duże zróżnicowanie widoczne jest pomiędzy czterema szkołami i większe pomiędzy rezultatami uczniów z poszczególnych 17 klas, co przedstawiono na wykresie poniżej.




Ryc. 4. Suma punktów uzyskanych przez uczniów z różnych szkół A, B, C , D oraz 17 klas a, b, .. p, r.

Analizując wyniki poszczególnych szkół i klas należy uwzględnić kapitał społeczny, wiek i płeć uczniów, by np. móc wyznaczyć wartość wskaźnika egzaminacyjnej wartości dodanej (EWD). Wskaźnik EWD informuje nas w jakim stopniu zróżnicowania w rezultatach NIE można wyjaśnić za pomocą modelu (zależności od kapitału rodzinnego, wieku i płci), a więc może być on efektem lepszej/gorszej efektywności pracy szkoły/nauczyciela lub czynników nie opisanych przez model. Dane dotyczące EWD są przekazywane nauczycielom i dyrektorom. Jednak udostępniając wyniki obliczeń zwraca się uwagę na to, że:

1. Jest to jedynie egzaminacyjna wartość dodana, by ją interpretować jako edukacyjną wartość dodaną trzeba uwzględnić uwarunkowania nieznane zewnętrznym ewaluatorom, np. jedna z klas biorąca udział w monitoringu pracuje na zasadach edukacji włączającej.
2. Model ma charakter liniowy, tzn. zakłada ten sam wpływ potencjału rodzinnego na rezultaty monitoringu danego ucznia, bez względu na potencjał rodzinny kolegów i koleżanek w klasie.
3. Potencjał rodzinny jest o wiele bardziej złożonym zjawiskiem społecznym, by można było go określić jedynie za pomocą wykształcenia rodziców bez uwzględnienia modelu rodziny.

Tylko nauczyciele znając swoją klasę, jej środowisko etc, mogą nadać obliczonym wartościom sens edukacyjnej wartości dodanej EWD.

Znaczenie pracy nauczyciela nie było kwestionowane w czasach *wielkich narracji.* W epoce postmodernistycznej w konstruktywizmie społecznym (głoszącym niemożność obserwowania obiektywnej rzeczywistości) dewaluacji uległ prestiż nauczyciela, szkoły i matematyki. Niektóre ekstremalne poglądy (np. psychologa i psychiatry Jacques Marie Émile Lacana dotyczące matematyki, w tym $\sqrt{-1}$ ) udało się uznać za *modne bzdury*[29]. Jednak znaczna ich część utrzymała się w teoretycznej i praktycznej pedagogice. Mnożą się publikacje o możności oceniania szkół i nauczycieli za pomocą egzaminów zewnętrznych czy zewnętrznie określanego EWD. Jak widać z przedstawionych powyżej wyników uczniowie posiadający mniejszy kapitał rodzinny mogą być karani za niskie wykształcenie rodziców, a uczniowie o wyższym potencjale są nagradzani. Podobnie napiętnowani mogą być nauczyciele uczniów o niższym kapitale rodzinnym. Jak pokazano w artykule, nawet w jednej gminie, w różnych szkołach i klasach rzeczywistość edukacyjna może być zasadniczo inna na skutek zróżnicowania kapitałem rodzinnym klas i szkół. Czasami wobec patologii oceniania bunt jest koniecznością, co pokazuje m.in. tom 1 *Parezji* 2015 wydany pod redakcją Alicji Korzenieckiej-Bondar[30]. Tylko czy jest to skuteczna forma obrony koncepcji konstruktywistycznej w edukacji? Czy nie wygra prostszy behawioryzm? Zobaczymy.

**Podsumowanie: rezultaty monitoringu – rekomendowane sposoby nauczania**

Analizując wyniki pomiarów można nie tylko określić poziomy *zaradności matematycznej* uczniów, ale również poddać dyskusji sposób prowadzenia zajęć przez nauczycieli tworząc dla nich rekomendacje. W rekomendacjach umieszczono odwołania do 4 elementów konstruktywistycznej edukacji wyróżnionych przez studentów w ,uniwersytecie w Utrechcie uzmysławiając tym samym, że praktyczne aspekty edukacji konstruktywistycznej wydają się być takie same w różnych środowiskach (rola zespołowego uczenia się, znaczenie sposobu tworzenia wiedzy, nauczanie problemowe, postrzeganie własnych trudności i motywacji do zdobywania kompetencji).

Bardzo proste zadanie 1 może wspomagać wzajemne nauczanie (rola uczenia się zespołowego). Uczniowie, którzy rozwiązali zadanie poprawnie mogą również badać (nauczanie problemowe) w jaki sposób można zmienić jego treść, by:

1. nie było rozwiązań (np. zmieniając sumę wydanych pieniędzy),
2. istniało więcej niż jedno rozwiązanie (np. ustalając cenę kostki masła na 6 zł).

[29] A. Sokal, J. Bricmont, *Modne bzdury. O nadużywaniu pojęć z zakresu nauk ścisłych przez postmodernistycznych intelektualistów*, tłumacz. P. Amsterdamski, Prószyński i S-ka, Warszawa 2004.

[30] A. Korzeniecka-Bondar, *O potrzebie odwagi i wysiłku w byciu nieposłusznym mainstreamowym przemianom w edukacji*, „Parezja” 2015 nr 1 (3).

Ta prosta zespołowa zabawa jest zgodna z definicją matematyki sformułowaną w Wikipedii (a nie Słowniku Języka Polskiego) jest poszukiwaniem przyczyn uzasadniających wnioski. Może być również źródłem refleksji nad sposobem uczenia się matematyki. Uczymy się nie tylko rozwiązując zadania, ale i modyfikując ich treść i tworząc nowe.

Poszukiwanie warunków rozwiązywalności zadania już na początku edukacji pozwala na zilustrowanie uczniom jednej z cech matematyki określonej przez Dawida Hilberta: „sztuka uprawiania matematyki zawiera się w znajdowaniu szczególnych przypadków, które zawierają w sobie zalążki uogólnień". Jeśli uda się uczniom przedyskutować możliwe zmiany, to w wielu innych przypadkach będą zadawać pytanie nie tylko o rozwiązanie, ale i rozwiązywalność co stanowi jeden z ciekawszych i podstawowych problemów matematyki (znaczenie sposobu w jaki tworzymy wiedzę).

Nie wszyscy uczniowie w klasie IV zrozumieją problem rozwiązywalności. Nie jest to konieczne. Uczniowie powinni znać poziom swoich umiejętności, a nauczyciel powinien oceniać ich za postęp (postrzeganie własnych trudności w uczeniu się i motywacji do zdobywania kompetencji).

Zadanie 2 jest trudniejsze, ale na tyle proste, że może służyć również do nauki zespołowej. Większość uczniowskich niepowodzeń wynikała w monitoringu z bezrefleksyjnego stosowania formalizmów. Uczniowie powinni porównać to zadanie z prostszymi, które można rozwiązać za pomocą formalizmów. Mogą też wyjaśnić różnice pomiędzy zadaniami w postaci grafów – rysunków. Poprawność grafu nie może być oceniana przez nauczyciela. Za pewien czas graf ten powinien pomóc w wyjaśnieniu problemu koledze lub stworzeniu podobnego zadania. Tworzenie i odczytanie grafu dotyczącego rozwiązania jest dobrą podstawą do refleksji nad tym jak postrzegamy swoje myślenie (refleksją nad tworzeniem wiedzy).

Prostym sposobem wyjaśnienia problemu występującego w zadaniu jest nie tylko zastosowanie metody „prób i błędów", ale również zilustrowanie pytania za pomocą klocków i operacji konkretnych (np. podziału 10 klocków na 2 grupy). Część uczniów będzie wyjaśniała zadanie za pomocą operacji konkretnych, a część będzie poszukiwać operacji formalnych. W przypadku występowania różnych technik nauczyciel nie powinien wskazywać tej lepszej (nie ograniczając listy sposobów, w jaki tworzymy wiedzę). Ten problem, tak jak poprzedni (związany z ocenianiem za postęp) jest piętą achillesową naszej szkoły.

Najtrudniejsze zadanie 3 jest dobrym wstępem do zadań z jedną lub dwiema niewiadomymi (nauczanie problemowe). Nauczyciel może zaproponować pracę w grupach, gdy w klasie jest odpowiednia liczba uczniów potrafiących rozwiązać zadanie (rola uczenia się zespołowego).

Ponieważ zadanie nie jest proste, a liczba złych rozwiązań była większa od dobrych, ten przykład może okazać się bardzo pomocny w uzmysłowieniu uczniom jak się uczą. W jaki sposób mogą pokonać trudności (nie poprzez stosowanie formalizmów) a np. poprzez graf (postrzeganie własnych trudności w uczeniu się).

W tym zadaniu nauczyciele mogą skorzystać z komentarza: „dobrze, że zrobiłeś ten błąd, bo dzięki niemu mamy możność nauczyć się" (znaczenie sposobu w jaki tworzymy wiedzę). Rzadko korzystamy z uczniowskich błędów.

Zadanie 4 z uwagi na jego postać (zadania zamkniętego) w najmniejszym stopniu związane jest z: konstruowaniem wiedzy przez ucznia, nauczaniem problemowym, pracą zespołową, uczniowską samooceną, czy *zaradnością matematyczną*. Pierwszym zagrożeniem we wprowadzaniu koncepcji konstruktywistycznej do szkoły jest zatem przygotowywanie uczniów do egzaminów zewnętrznych opartych głównie (lub wyłącznie) na pytaniach zamkniętych. Narzędzia, które miały służyć do pomiaru jakości edukacji niszczą jej jakość. Poruszają ten problem od dawna pedagodzy m.in. zainspirowani przez prof. Marię Dudzikową utożsamiając współczesną szkołę z *działaniami pozornymi*[31]. Dla dobrych nauczycieli walka z prymatem testów to codzienna rzeczywistość.

Powyższe 4 zadania ilustrują bardzo duże zróżnicowanie poziomu kompetencji matematycznych, zatem nauczyciel powinien być zobowiązany do prowadzenia zajęć na co najmniej dwóch poziomach. Natomiast MEN, określając wymagania dla wydawców i samemu tworząc podręczniki nie zadbało, by miały one postać kart pracy wykorzystywanych przez różne grupy uczniowskie, klasy, szkoły odpowiednio do posiadanych kompetencji matematycznych. Zatem jedno z podstawowych pojęć konstruktywistycznej edukacji *strefa najbliższego rozwoju* Lwa Wygotskiego znajduje małe odzwierciedlenie w pomocach przygotowywanych dla nauczycieli. Co utrudnia, a w przypadku części nauczycieli uniemożliwia, wprowadzenie wymienionych powyżej 4 elementów edukacji progresywistycznej „skazując naukę matematyki" na nudę behawioryzmu.

Świadome konstruowanie własnej wiedzy nie może przebiegać w chaosie wielu treści i umiejętności. Ryzykowne wprowadzenie w 1999 r.

[31] M. Dudzikowa, Knasiecka-Falbierska K., *Sprawcy i/lub ofiary działań pozornych w edukacji szkolnej*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 2013, s. 14.

integracji matematyki z innymi zakresami edukacji wczesnoszkolnej, przed czym przestrzegała m.in. prof. Elżbieta Putkiewicz[32] zakończyło się niepowodzeniem[33]. W podstawie programowej z 2009 r. integracja nie była już koniecznością. Mogły powstać oddzielne podręczniki do matematyki, m.in. pod wpływem krytyki[34] opracowano rządowy podręcznik: „Matematyka Nasza szkoła" dla klasy 2 i 3 [35]. W podstawie z 2017 r. integracja powróciła, ale zwrócono uwagę na potrzebę tworzenia zadań przez dzieci. Ten krok „w tył" (towarzyszący innemu „krokowi w przód") wydaje się być jeszcze jednym argumentem o nieprzemyślanych zmianach MEN w edukacji matematycznej. Powrót integracji jest zagrożeniem konstruktywistycznego budowania wiedzy, zwłaszcza dla dzieci rodziców nie posiadających wykształcenia średniego, które napotykają na wiele trudności w nauce (co pokazują rezultaty monitoringu).

Uczniowie rozwiązując problemy asymilują kolejne elementy *zaradności matematycznej*, modyfikując problemy lub opisując nowe sytuacje problemowe (modyfikując i tworząc zadania) akomodują *zaradność matematyczną*. Uczniowskie modyfikacje powyższych 4 zadań stwarzają możliwość osiągnięcia równowagi pomiędzy asymilacją i akomodacją. Ten proces jest często niewidoczny. Większość dobrych uczniowskich rozwiązań zawierała grafy, schematy etc, często niezrozumiałe dla osób sprawdzających. Zatem „pozwólmy dzieciom bazgrać", a tradycyjne zeszyty ćwiczeń odłóżmy na bok, a do 4 wyznaczników konstruktywizmu dłużmy piąty: konstruktywizm, to błędy, bazgroły, porażki, zniechęcenie, ale w końcu sukces uzyskany z pomocą nauczyciela.

**Bibliografia:**

Biedrzycki K., Bordzoł P., Bulkowski K., Chrzanowski M., Federowicz M., Haman J., Marciniak Z., Marszał D., Ostrowska E., Sitek M., Spalik K., Sułowska A., *Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów PISA 2015 w Polsce*, IBE, Warszawa 2015.

Chiu M. I., Xihua Y., *Analyses of students in 41 countries*, „Learning and Instruction" 2008 nr 4 (18).

[32] E. Putkiewicz E., *Kształcenie zintegrowane – uwagi o braku teorii i entuzjazmie nauczycieli*, „Problemy Wczesnej Edukacji", 1, 2005.

[33] M. Dąbrowski , M. Żytko, *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.* Raport z badania ilościowego, CKE, Warszawa 2007.

[34] M. Piotrowski, *Od TQM do żandarma, czyli pod prąd*, VEGA, Warszawa 2013, s. 56.

[35] A. Ludwa, M. Lorek, *Nasza szkoła matematyka*, MEN, Warszawa 2015.

Daniel J., Fałat M., Szafrańska I., *Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2015 Matematyka*, CKE, Warszawa 2015

Dąbrowski M., Żytko M., *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Raport z badania ilościowego,* CKE, Warszawa 2007.

Dudzikowa M., Knasiecka-Falbierska K., *Sprawcy i/lub ofiary działań pozornych w edukacji szkolnej*, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 2013.

Fisher R., *Thinking about Thinking Developing Metacognition in Children*, „Journal Early Child Development and Care" 1998, 141.

Jakubowska M., Piotrowski M., *Diagnoza poziomu osiągnięć szkolnych uczniów klas IV szkoły podstawowej miasta Kwidzyna. Analiza wyników testu z matematyki*, Kwidzyn, 2017.

Jakubowska M., *Diagnoza rozumowania heurystycznego w procesie rozwiązywania i tworzenia zadań z treścią*, „Studia z Teorii Wychowania" 2018, nr 4 (25) (w druku).

Kasprzak P. Stojda K., *44 myśli na temat „Wybrane fakty i mity na temat PISA 2012"*, 2014, http://smarterpoland.pl/index.php/2014/01/mity-dotyczace-pisa-2012/#comment-170328, z dn. 07-11-2017.

Klus-Stańska D., *Wiedza, która zniewala – transmisyjne tradycje w szkolnej edukacji*, „Forum Oświatowe" 2012 nr 1 (46).

Korzeniecka-Bondar A., *O potrzebie odwagi i wysiłku w byciu nieposłusznym mainstreamowym przemianom w edukacji*, „Parezja" 2015 nr 1 (3).

Lakatos I., *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, Wydawnictwo Tikkun, Warszawa 2005.

Lorek M., Wollman L., *Nasz elementarzu.,* MEN, Warszawa 2014.

Loyens S., Rikers R., Schmidt H., *Students' conceptions of distinct constructivist assumptions*, „European Journal of Psychology of Education" 2007 nr 22 (2).

Ludwa, M. Lorek, *Nasza szkoła matematyka*, MEN, Warszawa 2015.

Marciniak Z., Sułowska A., Matematyka, *Wyniki badań PISA 2015 w Polsce*, IBE, Warszawa 2017.

Pegues, H., *Of paradigm wars: Constructivism, objectivism, and postmodern stratagem*, „Educational Forum" 2007 nr 4 (71).

Piotrowski M., *Od TQM do żandarma, czyli pod prąd*, Wydawnictwo VEGA, Warszawa 2013.

Piotrowski M., *Błędne podstawy edukacji matematycznej i sposoby ich naprawienia. Żandarma trzeba odwołać, chociaż jest w nas samych*, „Studia z Teorii Wychowania" 2016 nr 3(16).

Piotrowski M., *Monitoring kompetencji szkolnych w środowisku lokalnym. Wyzwania*, „Studia z Teorii Wychowania" 2017 nr 2(19).
Pryor K., *Najpierw wytresuj kurczaka*, Media Rodzina, Poznań 2004.
Putkiewicz E., *Kształcenie zintegrowane – uwagi o braku teorii i entuzjazmie nauczycieli*, „Problemy Wczesnej Edukacji" 2005 nr 1.
Putkiewicz E., Murawska B., Piotrowski M., *Gotowość szkół Warszawy do realizacji przemian związanych z obniżeniem wieku szkolnego*, „Kwartalnik Pedagogiczny" 2009 nr 2.
Rogers, C. R. Freedom to Learn. *A View of What Education Might Become*, Charles E. Merrill Publishing Company, Ohio 1969.
Semadeni Z., *Raport o nauczaniu matematyki w klasach początkowych,* „Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego" 1990.
Sokal A., Bricmont J., *Modne bzdury. O nadużywaniu pojęć z zakresu nauk ścisłych przez postmodernistycznych intelektualistów*, Tłumacz. Amsterdamski P., Prószyński i S-ka, Warszawa 2004.

**Mathematical Bermuda Triangle**
**- difficulties in educating of mathematical resourcefulness.**

The article presents the results of the monitoring of mathematical skills which was conducted in 2017 in classes 4 of a primary school of the so called "Laboratory District". This article is a continuation of Monika Jakubowska's publication. The independent parameters were not only family capital and gender but also the age of the students (among whom some started school education at the age of 6). This publication deals with mathematical resourcefulness in problem solving with use of one of the basic heuristic methods - trial and error. As in previous articles, the problem has been presented in a broader perspective, showing students' (future teachers) views on mathematics, heuristics and the practice of constructive learning. In the article, attention has been paid to the difficulties encountered when the behavioral model of teaching is even partially abandoned. It happens so due to the postmodernist views of the educational environments and unfortunate activities of the Ministry of National Education.

**Keywords**: constructivism, monitoring, mathematical resourcefulness.

**Matematyczny Trójkąt Bermudzki**
**– trudności w kształceniu zaradności matematycznej:**

Artykuł prezentuje wyniki monitoringu umiejętności matematycznych, który prowadzony był w 2017 r. w klasach IV szkół podstawowych *Gminy Laboratorium.* Artykuł jest kontynuacją publikacji Moniki Jakubowskiej. Parametrami niezależnymi pomiaru były nie tylko kapitał rodzinny i płeć, ale również wiek uczniów (wśród których część rozpoczęła szkolną naukę w wieku 6 lat). Niniejsza publikacja dotyczy *zaradności matematycznej* w rozwiązywaniu problemów za pomocą jednej z podstawowych metod heurystycznych: *prób i błędów*. Podobnie jak w poprzednich artykułach problem przedstawiono w szerszej perspektywie ukazując poglądy studentów (przyszłych pedagogów) o matematyce, heurystyce oraz praktyce konstruktywistycznego uczenia się. W artykule zwrócono uwagę na trudności występujące przy chociaż częściowym odejściu od behawiorystycznego nauczania, które wynikają m.in. postmodernistycznych poglądów środowisk edukacyjnych oraz niefortunnych działań MEN.

**Słowa kluczowe:** konstruktywizm, monitoring, zaradność matematyczna.