EKONOMETRIA ECONOMETRICS 2(40) • 2013

ISSN 1507-3866

Łukasz Kuźmiński

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

GRANICZNE DYSTRYBUANTY WARTOŚCI EKSTREMALNYCH DLA ZALEŻNYCH CIĄGÓW ZMIENNYCH LOSOWYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiony został zarys asymptotycznej teorii wartości ekstremalnych na potrzeby zastosowań w finansach, hydrologii i ubezpieczeniach. Opracowanie zawiera twierdzenia i definicje, które pozwalają na wyznaczenie dystrybuant granicznych dla rozkładów maksimów w trzech przypadkach. Przypadek pierwszy dotyczy ciągu niezależnych zmiennych losowych. Przypadek drugi dotyczy stacjonarnych procesów zmiennych losowych, dla których spełnione są warunki zależności $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ (tzw. zależność gasnąca). Ostatni, trzeci przypadek dotyczy stacjonarnych procesów, dla których warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ nie są spełnione.

Słowa kluczowe: statystyki pozycyjne, dystrybuanta graniczna ekstremum, warunki zależności $D(u_n)$ i $D'(u_n)$, indeks ekstremalny.

1. Wstęp

Wartości ekstremalne ze względu na swój istotny – w większości przypadków negatywny – wpływ na wiele dziedzin życia i nauki są tematem zainteresowań nie tylko naukowców i badaczy z wielu dziedzin od długiego czasu. Negatywny wpływ ekstremalnych wartości określonych charakterystyk obserwuje się m.in. w takich dziedzinach, jak ekonomia, a dokładnie rynki finansowe, szeroko rozumiana meteorologia ze szczególnym uwzględnieniem hydrologii oraz ubezpieczenia. Nie bez przyczyny wymienione zostały te trzy konkretne dziedziny. Nasilający się w ostatnich latach kryzys ekonomiczny, który ma wpływ na wyraźne zmiany jakościowe w szeregach finansowych, oraz gwałtowne zmiany warunków atmosferycznych, które są przyczyną wielu katastrof meteorologicznych i hydrologicznych na terenie naszego kraju oraz na całym świecie, powodują zwiększenie zainteresowania teorią wartości ekstremalnych.

Zainteresowanie to głównie skupia się na tym, w jaki sposób zabezpieczyć się przed negatywnym oddziaływaniem ekstremalnie wysokich lub niskich wartości określonych charakterystyk finansowych czy też hydrologicznych i meteorologicznych, które są bezpośrednią przyczyną powstawania negatywnych zjawisk opisanych powyżej.

Nie jesteśmy w stanie powstrzymać oddziaływania ekstremalnych czynników w jakiejkolwiek dziedzinie. Jedyne, co można zrobić, to odpowiednio przygotować się na efekt ich oddziaływania przez dobrze przygotowany system prognoz ostrzegawczych.

System prognoz ostrzegawczych oparty na teorii rozkładów ekstremalnych związany jest koniecznością badania określonych ciągów zmiennych losowych, które stanowią monitorowane charakterystyki odpowiadające w wymienionych wyżej dziedzinach za występowanie zjawisk niepożądanych. W większości przypadków rozpatrywane ciągi zmiennych losowych są w określonym stopniu od siebie zależne. Dlatego ta praca poświęcona jest w całości granicznym rozkładom wartości ekstremalnych w przypadku zależnych zmiennych losowych.

2. Asymptotyczne rozkłady ekstremum – podstawowe pojęcia

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe pojęcia i oznaczenia, które wykorzystywane będą w niniejszym opracowaniu. Przyjmujemy na początek, że $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach lub inaczej mówiąc – o wspólnej dystrybuancie $F(x)$. W dalszej części pracy warunek niezależności zostanie zniesiony i rozpatrywać będziemy ciąg zmiennych bez warunku ich niezależności.

Przez M_n oznaczymy zmienną losową będącą n-tą statystyką pozycyjną w n-elementowej próbie losowej [Magiera 2002, s. 120], tzn.

$$M_n = \max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right). \tag{1}$$

Ze względu na fakt, iż rozpatrywana teoria rozkładów dla M_n ma charakter asymptotyczny, to szczególnie spełnione są jej własności, gdy $n \to \infty$. Oznacza to, że w celu otrzymania rzetelnych wyników należy rozpatrywać stosunkowo liczne ciągi zmiennych losowych. Wszystkie wyniki, jakie uzyskuje się dla *maksimów,* można w bardzo prosty sposób przenieść na *minima,* wykorzystując relację:

$$m_n = \min\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = -\max\left(-X_1, -X_2, \ldots, -X_n\right). \tag{2}$$

Dystrybuantę zmiennej losowej M_n w tej sytuacji można w prosty sposób przedstawić za pomocą poniższego wzoru:

$$P\left\{M_n \le x\right\} = P\left\{X_1 \le x, X_2 \le x, \ldots, X_n \le x\right\} = F^n(x), \tag{3}$$

gdzie $F(x)$ oznacza dystrybuantę zmiennych X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) (por. [David, Nagaraja 2003, s. 9]).

Istotnym faktem w teorii asymptotycznych rozkładów dla ekstremów jest to, że niezdegenerowana dystrybuanta zmiennej losowej M_n musi należeć to jednej z trzech możliwych ogólnych rodzin dystrybuant granicznych, które zostaną zdefiniowane w dalszej części pracy, bez względu na postać dystrybuanty $F(x)$. W zastosowaniach omawianej teorii jedną z najważniejszych spraw dla badacza jest poznanie możliwie szczegółowo natury dystrybuanty $F(x)$ badanego ciągu zmiennych losowych. Potrzebne jest to do ustalenia, do której z trzech możliwych dziedzin przyciągania (*domain of attraction*) dystrybuant granicznych ona należy. Właściwie to jest determinowane przez zachowanie się ogona dystrybuanty $F(x)$ dla dużych wartości x. Ogon dystrybuanty definiowany jest w następujący sposób: $\tilde{F}(x) = 1 - F(x)$.

Zbieżność według rozkładu (por. [Magiera 2002, s. 100]) dystrybuanty zmiennej M_n po odpowiednim znormalizowaniu przez stałe $a_n > 0$ i b_n do pewnej dystrybuanty granicznej $G(x)$ przedstawia wyrażenie:

$$P\left\{a_n(M_n - b_n) \leq x\right\} \xrightarrow{w} G(x), \tag{4}$$

gdzie $\xrightarrow{w}$ oznacza, że zbieżność pojawia się w ciągłych punktach G – chociaż tak naprawdę, zgłębiając asymptotyczną teorię dla rozkładów ekstremów, należy stwierdzić, że wszystkie analizowane funkcje G są ciągłe. Dla nas najważniejsze jest to, jakie dystrybuanty mogą znaleźć się po prawej stronie granicy (4).

W tym miejscu przedstawimy twierdzenie dotyczące typów ekstremalnych, które podaje trzy rodziny funkcji $G(x)$, które są dystrybuantami granicznymi dla maksimów.

Twierdzenie 1. (*Extremal Types Theorem*) (por. [Leadbetter, Lindgren, Rootzen 1983]). Niech $M_n = \max\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach. Jeśli dla pewnych stałych $a_n > 0$ i b_n zachodzi zbieżność (4) dla pewnej niezdegenerowanej dystrybuanty G, wtedy G przyjmuje jedną z trzech postaci

$$\begin{aligned}
&Typ\ I: \ G_I(x) = \exp\left(-e^{-x}\right), \quad -\infty < x < \infty \\
&Typ\ II: G_{II}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & \text{dla pewnego } \alpha > 0,\ x > 0 \end{cases} \\
&Typ\ III: \ G_{III}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(-x\right)^{\alpha}\right) & \text{dla pewnego } \alpha > 0,\ x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5}$$

Odwrotnie – każda dystrybuanta G typu wartości ekstremalnych może występować jako ograniczenie w (4), kiedy G sama sobie jest dystrybuantą każdej zmiennej X_i. Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy [Leadbetter, Lindgren, Rootzen 1983]. Przypadek dla zmiennych niezależnych rozpatrzony zostanie w dalszej części pracy, a twierdzenie to stanowi jedynie wstęp do rozważań dla przypadku z zależnością.

Jak wcześniej zostało wspomniane, z punktu widzenia praktycznego ważne jest dla nas, którą z trzech dystrybuant granicznych danych w (5) zastosować, gdy każda zmienna losowa X_i ma określony rozkład prawdopodobieństwa. Znane są różne potrzebne i wystarczające warunki do tego, żeby wiedzieć, do której z trzech dziedzin przyciągania dla trzech dystrybuant granicznych należy określona dystrybuanta F rozpatrywanych zmiennych losowych X_i. Ze względu na ograniczone ramy tego opracowania nie będziemy w nim przedstawiać twierdzeń, w których zawarte są te warunki, oraz twierdzenia, które określa sposób wyznaczania stałych normujących a_n i b_n w przypadku, gdy rozpatrywane zmienne losowe mają dystrybuantę F. Twierdzenia można znaleźć w pracy Leadbettera, Lindgrena i Rootzena [1983], a ich szczegołowe dowody w pracy de Haan [1976].

3. Dystrybuanty graniczne w przypadku zależnych zmiennych losowych

Przypadek ciągów zmiennych losowych zależnych jest w praktycznych zastosowaniach zdecydowanie częściej spotykany aniżeli przypadek niezależny. Z tego powodu jest on obiektem zainteresowania badaczy z różnych dziedzin.

Na samym początku omówimy pojęcie zależności dla stacjonarnych ciągów zmiennych i przedstawimy podstawowe definicje warunków zależności wykorzystywane w teorii statystyk pozycyjnych.

Choć rezygnujemy z założenia o niezależności, w dalszym ciągu utrzymywać będziemy założenie, że ciąg $\{X_n\}$ ma wspólny rozkład. Rozważane ciągi są ciągami stacjonarnymi, tzn. ciągi są takie, że rozkłady $\left(X_{j_1}, \ldots, X_{j_n}\right)$ i $\left(X_{j_1+m}, \ldots, X_{j_n+m}\right)$ są identyczne dla pewnego wyboru $n, j_1, \ldots, j_n$ i m. Zakładamy dodatkowo, że zależność między X_i i X_j maleje w pewien określony sposób dla różnych ciągów zmiennych, gdy $|i-j|$ rośnie. Najprostszym przykładem tego typu ograniczenia, które rozważamy, jest m – zależność, zgodnie z którą X_i i X_j są faktycznie niezależne, jeśli $|i-j| > m$ (por. [Czekała 2001]).

Do ograniczeń dla zależności w ciągach stacjonarnych należy silne mieszanie (*strong mixing*) (wprowadzone po raz pierwszy przez Rosenblatta w 1956 r.). Mówi się, że ciąg $\{X_n\}$ spełnia założenie silnego mieszania, jeżeli istnieje funkcja mieszająca funkcja $g(k)$ (*mixing function*) dążąca do zera, jeżeli $k \to \infty$, i taka, że:

$$\left|P(A \cap B) - P(A)P(B)\right| < g(k),$$

gdzie: $A \in \Im(X_1, \ldots, X_p)$ i $B \in \Im(X_{p+k+1}, X_{p+k+2}, \ldots)$ dla pewnego p i k, gdzie $\Im(\bullet)$ oznacza σ – ciało generowane przez wskazane zmienne losowe. Tak więc jeżeli ciąg zmiennych jest mieszający, to pewne zdarzenie A „na podstawie przeszłości do czasu p" jest blisko niezależne od zdarzenia B „na podstawie przyszłości od czasu

$p + k + 1$ naprzód", kiedy k jest duże. Na uwagę w tym miejscu zasługuje fakt, że warunek mieszający jest jednostajny, tzn. że funkcja $g(k)$ nie jest zależna od A i B. Inne sposoby definiowania zależności wraz z ich zastosowaniami są omówione m.in. w pracach [Bradley1981; Bradley, Bryc 1985; Hellwig 1975; Hellwig 1969].

Zauważmy, że teoria wartości ekstremalnych interesuje się zdarzeniami postaci $\{X_i \le u\}$ lub ich skrzyżowaniem. Dla przykładu zdarzenie $\{M_n \le u\}$ jest właśnie takim zdarzeniem $\{X_1 \le u, X_2 \le, ..., X_n \le u\}$. Stąd dochodzimy do warunku zależności podobnego do warunku mieszającego omówionego powyżej. Warunek ten oznaczany jest jako warunek D i jego definicja podana jest poniżej.

Definicja 1. Warunek D jest spełniony dla pewnych liczb całkowitych $i_1 < ... < i_p$ i $j_1 < ... < j_k$, dla których $j_1 - i_p \ge l$, i pewnego rzeczywistego u

$$\left| F_{i_1,...,i_p,\ j_1,...,j_k}(u) - F_{i_1,...,i_p}(u) F_{j_1,...,j_p}(u) \right| \le g(l), \tag{6}$$

gdzie $g(l) \to 0$ jak $l \to \infty$ (zapis $F_{i_1,...,i_p,\ j_1,...,j_k}(u)$ oznacza $F_{i_1,...,i_p,\ j_1,...,j_k}(u,u,...,u)$, jeżeli $F_{i_1,...,i_n}(x_1,...,x_n)$ oznacza łączna dystrybuantę zmiennych $X_{i_1},...,X_{i_n}$). W tym miejscu należy zauważyć, że twierdzenie 1 spełnia warunek D. Pomimo że warunek D jest zdecydowanym ograniczeniem wymagań nałożonych przez mieszanie, to można zrobić to jeszcze lepiej. Rozważymy teraz warunek $D(u_n)$, który jest osłabieniem warunku D w takim sensie, że stosujemy w nim tylko pewne ciągi $\{u_n\}$, i niekoniecznie do wszystkich wartości. Przyjmujemy, że $\{u_n\}$ jest danym ciągiem rzeczywistym, i warunek $D(u_n)$ definiujemy jak niżej.

Definicja 2. Warunek $D(u_n)$ jest spełniony, jeśli dla pewnych liczb całkowitych

$i_1 < ... < i_p$ i $j_1 < ... < j_k \le n$, dla których $j_1 - i_p \ge l$, otrzymujemy

$$\left| F_{i_1,...,i_p,\ j_1,...,j_k}(u) - F_{i_1,...,i_p}(u) F_{j_1,...,j_p}(u) \right| \le \alpha_{n,l_n}, \tag{7}$$

gdzie: $\alpha_{n,l_n} \to 0$, gdy $n \to \infty$ dla pewnego ciągu $l_n = o(n)$.

Istota powyższego warunku polega więc na tym, że różnice dystrybuanty łącznej i iloczynu dystrybuant brzegowych dążą dla argumentu u_n do zera (gdy $n \to \infty$), jeżeli ciąg l_n (minoranta różnicy między ostatnim indeksem w pierwszym wektorze i pierwszym indeksem w drugim wektorze zmiennych losowych) jest rzędu $o(n)$ (por. [Czekała 2001]).

Okazuje się, że warunek $D(u_n)$ zapewnia jedynie oszacowanie (od dołu) dystrybuanty rozkładu statystyk ekstremalnych. Z tego powodu w literaturze wykorzystuje się dodatkowe założenie, które określa się mianem warunku $D'(u_n)$ (por. [Watson 1954]).

Zanim przedstawimy definicję warunku $D'(u_n)$, w tym miejscu zajmiemy się zbieżnością prawdopodobieństwa następującej formy $P\{a_n(M_n - b_n) \le x\}$, którą można zapisać równoważnie jako $P\{M_n \le u_n\}$, gdzie $u_n(x) = x / a_n + b_n$. Zbieżność stochastyczna wymagana jest dla każdego x. Kolejne twierdzenie dotyczące zbieżności powyższego wyrażenia jest niemal trywialne dla przypadku ciągu niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach, ale jest bardzo użyteczne w zastosowaniach do ciągów zależnych zmiennych losowych, których dotyczy to opracowanie, oraz ciągłych procesów czasowych.

Twierdzenie 2 (por. [Galambos 1978]). Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Niech dodatkowo $0 \le \tau \le \infty$ i zakładamy, że $\{u_n\}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takich, że

$$n\big(1 - F(u_n)\big) \to \tau \qquad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Wtedy

$$P\{M_n \le u_n\} \to e^{-\tau} \quad \text{gdy} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Odwrotnie, jeżeli (9) jest spełnione dla pewnego τ, $0 \le \tau \le \infty$, to wtedy zbieżność (8) jest również spełniona. Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy Leadbetter, Lindgren, Rootzen [1983].

Nas interesuje teraz takie ograniczenie, w którym formułujemy warunki, przy których (8) i (9) są równoważne dla stacjonarnych ciągów, tzn. warunki, przy których (9) jest równoznaczne do (8).

Definicja 3. Warunek $D'(u_n)$ jest spełniony dla stacjonarnego ciągu $\{X_j\}$ i ciągu stałych $\{u_n\}$, jeśli

$$\limsup_{n\to\infty} n \sum_{j=2}^{[n/k]} P\{\xi_1 > u_n,\ X_j > u_n\} \to 0 \quad jak \quad k \to \infty, \tag{10}$$

gdzie $[n/k]$ oznacza część całkowitą.

Zauważmy w tym miejscu, że przy spełnionym (8) poziom u_n w (10) jest taki, że jest średnio około τ przekroczeń u_n wśród $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i w ten sposób τ / k przekroczeń wśród $X_1, X_2, \ldots, X_{[n/k]}$. Warunek $D'(u_n)$ wyznacza granicę prawdopodobieństwa więcej niż jednego przekroczenia wśród $X_1, X_2, \ldots, X_{[n/k]}$.

Teraz podamy twierdzenie, które jest uogólnieniem twierdzenia 2 dla stacjonarnych ciągów zmiennych przy spełnionych warunkach $D(u_n)$ i $D'(u_n)$.

Twierdzenie 3. Niech $\{u_n\}$ będzie stałymi takimi, że $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ są spełnione dla stacjonarnego ciągu zmiennych $\{X_n\}$. Niech $0 \le \tau \le \infty$. Wtedy (8) i (9) są równoważne, tzn. $P\{M_n \le u_n\} \to e^{-\tau}$ jeśli i tylko jeśli $n(1 - F(u_n)) \to \tau$.

W kontekście zastosowań niestety okazuje się, że istnieje bardzo dużo rozkładów zmiennych losowych, dla których warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ nie są spełnione. Tymi rozkładami są w dużej mierze rozkłady o tzw. grubych ogonach. W takiej sytuacji rozpatrywany jest szczególny przypadek zależności, który szczegółowo zostanie omówiony w kolejnej sekcji opracowania.

Z punktu widzenia zastosowań napotykamy jeszcze dość poważny problem, a mianowicie badanie spełnienia warunków $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ jest zadaniem w większości przypadków bardzo trudnym. W przypadku procesów gaussowskich, gdzie warunek $D'(u_n)$ daje się przedstawić za pomocą współczynników korelacji, czy też w przypadku zmiennych losowych *m*-zależnych, gdzie wystarczające jest porównanie szybkości zbieżności ogona dystrybuanty dwuwymiarowej z szybkością zbieżności ogona dystrybuanty jednowymiarowej i oba warunki można w sposób efektywny sprawdzić. Twierdzenie, które mówi, jak sprawdzać spełnienie warunków $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ w przypadku stacjonarnych ciągów zmiennych losowych o rozkładzie normalnym, można znaleźć w pracy [Leadbetter, Lindgren, Rootzen 1983].

4. Dziedziny przyciągania dystrybuant granicznych w przypadku zależnych zmiennych losowych

W rozdziale tym przedstawimy twierdzenia i definicje, z których wynika, jakiej postaci są dystrybuanty graniczne rozkładów ekstremalnych wraz z ich dziedzinami przyciągania w przypadku, gdy spełnione są warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$, jak również w przypadku, gdy nie są spełnione.

W celu omówienia dziedzin przyciągania dla zależnych ciągów zmiennych losowych w twierdzeniu o typach ekstremalnych wprowadzimy ciąg niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach $\{\hat{X}_n\}$, który ma wspólną dystrybuantę $F(x)$ jak każdy element stacjonarnego ciągu $\{X_n\}$. Ciąg $\{\hat{X}_n\}$ będzie określany jako „niezależny ciąg powiązany z $\{X_n\}$" oraz zapiszemy, że $\hat{M}_n = \max(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n)$.

Twierdzenie 4. Niech $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ będą spełnione dla stacjonarnego ciągu $\{X_n\}$. Wtedy $P\{M_n \le u_n\} \to \theta > 0$, jeśli i tylko jeśli $P\{\hat{M}_n \le u_n\} \to \theta$. Te same warunki są spełnione, jeśli $\theta = 0$, gdy warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ są zastąpione przez wymaganie, że dla dowolnie dużego $\tau < \infty$ istnieje ciąg $\{\upsilon_n\}$ spełniający $n(1 - F(\upsilon_n)) \to \tau$ i taki, że $D(\upsilon_n)$ i $D'(\upsilon_n)$ są również spełnione.

Z tego twierdzenia możemy dedukować, że graniczny rozkład $a_n(M_n - b_n)$ jest taki sam jak w przypadku, gdy rozpatrywany byłby ciąg $\{\hat{X}_n\}$, tzn. ma taki sam rozkład graniczny jak $a_n(\hat{M}_n - b_n)$ przy spełnionych warunkach $D(u_n)$ i $D'(u_n)$. Twierdzenie przedstawione przez nas poniżej daje możliwość wyznaczenia dystrybuanty granicznej dla zmiennej M_n, jeżeli zmienne losowe są zależne.

Twierdzenie 5. Zakładamy, że spełnione są warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ dla pewnego stacjonarnego procesu $\{X_n\}$, kiedy $u_n = x / a_n + b_n$ dla każdego x ($\{a_n > 0\}, \{b_n\}$ są danymi ciągami stałych). Wtedy jeżeli $P\{a_n(M_n - b_n) \le x\}$ $\to G(x)$, zachodzi dla pewnej niezdegenerowanej dystrybuanty G tylko wtedy, gdy zachodzi $P\{a_n(\hat{M}_n - b_n) \le x\} \to G(x)$.

Dowody powyższych twierdzeń można znaleźć w pracach [Leadbetter Lindgren, Rootzen 1983; Loynes 1965].

Istota ostatniego przedstawionego twierdzenia polega na tym, że dystrybuanta graniczna dla rozkładu maksimum dla ciągu zależnych zmiennych losowych jest taka sama jak w przypadku ciągu zmiennych niezależnych. Warunkiem, który jest wystarczający do stosowania powyższej równoważności, jest spełnienie warunków $D(u_n)$ i $D'(u_n)$. Niestety, jak to zostało już wspomniane w poprzedniej sekcji, badanie spełnienia powyższych warunków jest zadaniem bardzo trudnym. Powoduje to znaczne ograniczenia w zastosowaniach praktycznych. Niemniej jednak nie jest to zadanie niewykonalne.

Jednym ze sposobów na rozwiązanie problemu trudności weryfikacji wymienionych warunków jest badanie ciągów zmiennych losowych przy użyciu innych metod statystycznych w celu ustalenia, czy wykazują one własności, na podstawie których można wnioskować, iż warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ są spełnione. Ze względu na ograniczone ramy tego opracowania problem ten szerzej zostanie omówiony w kolejnych pracach. Teraz rozpatrzymy przypadek, w którym warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ nie są spełnione lub ich weryfikacja w żaden sposób nie jest możliwa. Odpowiednie twierdzenie poprzedzimy definicją dotyczącą istnienia indeksu ekstremalnego dla danego procesu stacjonarnego.

Definicja 4. Proces stacjonarny $\{X_n\}$ ma ekstremalny indeks θ $(0 \le \theta \le 1)$, jeżeli dla każdego $\tau > 0$ spełnione są warunki:

(i) $n(1 - F(u_n(\tau))) \to \tau$ gdy $n \to \infty$,

(ii) $P(M_n \le u_n(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$.

Jeżeli w warunku (ii) stała $\theta = 1$, to otrzymujemy przypadek analogiczny do przypadku dla niezależnych zmiennych losowych opisanego przez twierdzenie 2.

Teraz podamy twierdzenie, które rozstrzyga zbieżność rozkładów maksimum dla stacjonarnego ciągu zmiennych losowych.

Twierdzenie 6. Zakłada się, że stacjonarny proces $\{X_n\}$ ma indeks ekstremalny θ. Zakładamy, że $\{\upsilon_n\}$ jest ciągiem liczbowym i $0 \le \rho \le 1$. Wtedy

(i) dla $\theta > 0$ jeśli $P\{\hat{M}_n \le \upsilon_n\} \to \rho$ gdy $n \to \infty$ i $n \in \mathrm{N}$ wtedy $P\{M_n \le \upsilon_n\} \to \rho^\theta$ i odwrotnie

(ii) dla $\theta = 0$,

a) jeśli $\liminf_{n\to\infty} P\{\hat{M}_n \le \upsilon_n\} > 0$ wtedy $P\{M_n \le \upsilon_n\} \to 1$,

b) jeśli $\limsup_{n\to\infty} P\{M_n \le \upsilon_n\} < 1$ wtedy $P\{\hat{M}_n \le \upsilon_n\} \to 0$.

Dowód twierdzenia znajduje się w pracy [Leadbetter, Lindgren, Rootzen 1983]. Szczególnie ważny z punkty widzenia praktycznego zastosowania jest przypadek (i) powyższego twierdzenia. Nietrudno zauważyć, że wyrażenia $P\{\hat{M}_n \le \upsilon_n\}$ są wartościami dystrybuant maksimów, które bez problemu otrzymuje się, wykorzystując twierdzenia dla przypadku, kiedy rozpatrywany ciąg zmiennych losowych jest niezależny. W takim przypadku, jeżeli M_n jest maksimum dla przypadku zależnych zmiennych losowych, to dystrybuantę graniczną dla tego przypadku można otrzymać, podnosząc określoną dystrybuantę z twierdzenia 1 do potęgi θ. Należy zauważyć, że własność maksymalnej stabilności spowoduje, że nie ulegnie zmianie klasa dystrybuant typu I, II i III. Poniżej przedstawimy postacie dystrybuant trzech typów dla przypadku zależnych zmiennych losowych, wykonując elementarne działanie potegowania.

Dla dystrybuanty typu 1, dla $x \in R$ $G_I^\theta(x) = \exp\left(-\theta e^{-x}\right) = \exp\left(-\exp\left(-x + \ln\theta\right)\right)$
$= G_I^\theta(x - \ln\theta)$.

Dla dystrybuanty typu 2, dla $x > 0$ $G_{II}^\theta(x) = \left(\exp\left(-x^{-\alpha}\right)\right)^\theta = \exp\left(-\left(\theta^{1/\alpha}x\right)^{-\alpha}\right)$
$= G_{II}\left(\theta^{1/\alpha}x\right)$.

Dla dystrybuanty typu 3, dla $x < 0$ $G_{III}^\theta(x) = \left(\exp\left(-(-x)^\alpha\right)\right) = G_{III}^\theta\left(\theta^{1/\alpha}x\right)$.

Twierdzenie 6 orzeka przede wszystkim, że w przypadku ciągu zależnych zmiennych losowych, jeżeli indeks ekstremalny $\theta > 0$, to rozkład dystrybuanty granicznej jest taki sam jak w przypadku niezależnym. Z powyższych rozważań wynika również, że każda dystrybuanta typu I, II, III należy do własnego obszaru przyciągania. Wystarczy, że w powyższych trzech wymienionych formułach w miejsce θ wstawimy n.

5. Zakończenie

W pracy został omówiony zarys teorii wartości ekstremalnych pozwalający na wyznaczanie dystrybuant granicznych dla rozkładów ekstremalnych. Przedstawiliśmy twierdzenia i definicje, które pozwalają na wyznaczenie dystrybuant granicznych dla maksimów dowolnych rozkładów, jeżeli oczywiście takie dystrybuanty istnieją. Rozpatrzone zostały trzy przypadki. Pierwszy z nich, najbardziej trywialny, dotyczy sytuacji, gdy badany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Drugi przypadek dotyczy procesów stacjonarnych, dla których spełnione są warunki zależności $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ (jest to tzw. gasnąca zależność). Ostatni, trzeci przypadek dotyczy stacjonarnych ciągów zmiennych losowych, dla których warunki $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ nie są spełnione. Dla wszystkich trzech warunków zostały przedstawione trzy klasy dystrybuant granicznych wraz z ich dziedzinami przyciągania. Zebrane w opracowaniu twierdzenia i definicje mają stanowić podstawę do zastosowań praktycznych w takich dziedzinach, jak hydrologia, finanse i ubezpieczenia. Zastosowania praktyczne pojawią się kolejnych pracach.

Literatura

Bradley R.C., *Central limits theorem under weak dependence,* "Journal of Multivariate Analysis" 1981, no. 11.

Bradley R.C., Bryc W., *Multilinear forms of measures of dependence between random variables*, "Journal of Multivariate Analysis" 1985, no. 16.

Czekała M., *Statystyki pozycyjne w modelowaniu ekonometrycznym. Wybrane problemy.* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2001.

David H.A., Nagaraja H.N., *Order Statistics,* A John Wiley & Sons, Inc., 2003.

Galambos J., *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley, New York 1978.

Haan L. de, *Sample extremes: an elementary introduction,* Statist. Neerlandica 1976, no. 30, s. 161-172.

Hellwig Z., *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1975.

Hellwig Z., *On the measurement od stochastical dependence,* "Zastosowania Matematyki", 1969.

Kuźmiński Ł., *Statystyki pozycyjne w prognozach ostrzegawczych*, [w:] *Zastosowanie metod ilościowych w ekonomii i zarządzaniu,* red. S. Forlicz, CeDeWu, Warszawa 2012.

Magiera R., *Modele i metody statystyki matematycznej,* Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002.

Leadbetter R., Lindgren G., Rootzen H., *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes,* New York: Springer – Verlag, New York Heidelberg 1983.

Loynes R.M., *Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes,* "Ann. Math. Soc." 1965, no. 18, 308-314.

Thomas M., Reiss R., *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields,* Birkhauser, Berlin 2007.

Watson G.S., *Extreme values in Samales from m – dependent stationary stochastic processes,* "Ann. Math. Statist" 1954, no. 25, s. 798-800.

Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa,* Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

LIMITING DISTRIBUTION FUNCTION OF EXTREME VALUES FOR THE DEPENDENT SEQUENCES RANDOM VARIABLES

Summary: In the article the outline of asymptotic theory of extreme values has been introduced for the application to finance, hydrology and insurance. The study includes the theorems and the definitions which give the possibility to appoint the limiting distribution function for the distributions of maximum in three cases. The first case concerns the sequence independent random variables. The second case concerns the stationary processes of random variables for which the conditions $D(u_n)$ and $D'(u_n)$ are satisfied (i.e. "the extinguishing dependence"). The last case concerns the stationary processes for which the conditions $D(u_n)$ and $D'(u_n)$ are not satisfied.

Keywords: order statistics, limiting distribution function of extreme, dependence conditions $D(u_n)$ and $D'(u_n)$, extreme index.