

Agnieszka Orwat-Acedańska  
Jan Acedański

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA STOCHASTYCZNEGO W KONSTRUKCJI ODPORNYCH PORTFELI INWESTYCYJNYCH

## Wprowadzenie

Jednym z istotnych zagadnień podejmowanych w nowoczesnej teorii portfelowej jest ograniczanie skutków ryzyka estymacji (ang. *estimation risk*). Przez ryzyko to rozumie się możliwość poniesienia straty w wyniku błędów estymacji parametrów modeli. W zagadnieniach wyboru portfela inwestycyjnego źródłem ryzyka estymacji jest wrażliwość klasycznej funkcji optymalnej alokacji na nieznane rzeczywiste wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela oraz miar ryzyka. W klasycznym podejściu Markowitza [1952] oszacowania udziałów portfela są oparte na obserwacjach pochodzących z jednej próby, będącej zbiorem obserwacji stóp zwrotu określonych aktywów. Wskutek ryzyka estymacji oszacowania te mogą być obciążone, zwłaszcza w sytuacjach niespełnienia klasycznych założeń, obecności wielowymiarowych obserwacji odstających w próbie lub asymetrycznych rozkładów stóp zwrotu. W konsekwencji, udziały portfela wyznaczone na podstawie klasycznej estymacji i optymalizacji nie są w rzeczywistości rozwiązaniem optymalnym, lecz suboptymalnym.

Fakt ten stał się w nowoczesnej teorii portfelowej motorem rozwoju wielu statystycznych metodologii służących ograniczeniu skutków ryzyka estymacji w procesie konstrukcji portfela inwestycyjnego. Do metod tych zalicza się m.in.:

- metody estymacji odpornej (ang. *robust estimation methods*),
- metody estymacji bayesowskiej (ang. *Bayesian estimation methods*),
- metody optymalizacji odpornej (ang. *robust optimization methods*),
- metody próbkowania (ang. *sampling methods*).

Idea budowy portfeli na podstawie pierwszej grupy metod polega na wielowymiarowej estymacji odpornej oczekiwanej stopy zwrotu i ryzyka składowych portfela, a następnie na podstawie otrzymanych charakterystyk na kła-

sycznej optymalizacji typu średnia-wariancja (ang. *mean-variance* MV)<sup>1</sup>. Druga z wymienionych grup metod dotyczy konstrukcji portfeli, których charakterystyki są szacowane na podstawie rozkładów a posteriori oczekiwanej stopy zwrotu i ryzyka składowych portfela. Odporność w sensie optymalizacji odpornej jest natomiast efektem założenia, że parametry będące charakterystykami składowych portfela nie są równe ocenom punktowym uzyskanym w procesie estymacji, ale znajdują się w otoczeniach tych ocen zwanych zbiorami niepewności. Zadania optymalizacyjne mają najczęściej postać zadań maxminowych lub minimaxowych<sup>2</sup>. Metody próbkowania umożliwiają z kolei wybór optymalnego portfela na podstawie wielu prób. Próby te mogą pochodzić z rozkładu empirycznego lub z rozkładu teoretycznego.

Alternatywę w stosunku do podejść opisanych powyżej stanowią metody programowania stochastycznego. Pozwalają one w naturalny sposób uwzględnić fakt, że parametry będące w klasycznym ujęciu podstawą szacowania optymalnych udziałów składowych portfela powinny być traktowane jako wielkości losowe. Z tego punktu widzenia metody te stanowią rozszerzenie klasycznych podejść do budowy portfeli inwestycyjnych uwzględniających ryzyko estymacji. Niestety wiele zadań programowania stochastycznego przydatnych w analizie portfelowej jest trudnych do rozwiązania, co istotnie ogranicza możliwości ich aplikacji.

W pracy jest analizowane zastosowanie metod programowania stochastycznego do budowy portfeli, których ryzyko nie będzie przekraczać z góry ustalonego poziomu, uwzględniając przy tym ryzyko estymacji. Autorzy koncentrują się przede wszystkim na stochastycznej modyfikacji klasycznego zadania Markowitza, mianowicie:

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \{E(\mathbf{x}'\tilde{\boldsymbol{\mu}})\} \text{ p.w. } P\left(\sqrt{\mathbf{x}'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{x}} \leq v\right) \geq 1 - \alpha, \quad (1)$$

gdzie  $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_k)'$  – wektor losowy wartości oczekiwanych stóp zwrotu aktywów składowych,  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  – macierz losowa kowariancji stóp zwrotu,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$  – udziały portfela będące elementem zbioru dopuszczalnego  $C = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}\mathbf{1} = 1\}$ ,  $v$  – maksymalne dopuszczalne odchylenie standardowe portfela,  $\alpha$  – prawdopodobieństwo, że ryzyko portfela przekroczy założony poziom,  $E$  – operator wartości oczekiwanej.

<sup>1</sup> Aplikacje wybranych wielowymiarowych estymatorów odpornych do budowy portfeli na danych polskiego rynku kapitałowego zawierają m.in. prace: A. Orwat [2007a; 2007b].

<sup>2</sup> Przykład aplikacji tej metodologii na danych polskiego rynku kapitałowego można znaleźć w pracy A. Orwat [2010], natomiast aplikację metody będącej połączeniem podejścia bayesowskiego z optymalizacją odporną w A. Orwat-Acedańska [2011].

W pracy zaproponowano rozwiązanie problemu (1) metodą aproksymacji próbkowej (SAA – *sample approximation approach*). W podejściu tym oryginalne rozkłady wektora losowego  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  oraz losowej macierzy kowariancji  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  są zastępowane rozkładami empirycznymi, a zakładane prawdopodobieństwo  $\alpha$  przekroczenia dopuszczalnego ryzyka – przez empiryczny odpowiednik  $q$ . W ten sposób rozwiązanie stochastycznego problemu (1) jest przybliżane dzięki rozwiązaniu odpowiedniego problemu deterministycznego. W pracy takie podejście jest traktowane jako połączenie metody optymalizacji odpornej oraz metody próbkowania wykorzystywanym do ograniczania ryzyka estymacji. Analizowany jest wpływ sposobu budowy rozkładu empirycznego wraz z liczbą obserwacji, a także parametru  $q$  na własności przybliżonego rozwiązania i jego przydatność dla potencjalnego inwestora. W analizach wykorzystano dane dotyczące stóp zwrotu spółek notowanych na GPW w Warszawie.

Praca składa się z trzech podrozdziałów. Podrozdział pierwszy zawiera opis metodologii alokacji odpornej i tradycyjnego podejścia próbkowania do wyboru portfela. Opis proponowanej przez Autorów metodologii zawiera podrozdział drugi, natomiast w podrozdziale trzecim przedstawiono założenia oraz wyniki przeprowadzonych analiz empirycznych. Artykuł kończy się podsumowaniem.

## 1. Metodologia alokacji odpornej i tradycyjnej metody próbkowania

Alokacja aktywów jest rozumiana w niniejszej pracy jako dobór aktywów w różnych proporcjach w celu osiągnięcia najwyższej oczekiwanej stopy zwrotu przy założonym poziomie ryzyka. Jednym z proponowanych w literaturze zadań optymalizacji odpornej jest wybór portfela w pesymistycznym scenariuszu, zakładającym, że macierz kowariancji składowych portfela będzie jak najmniej korzystna. Wybór portfela odpornego w sensie metody alokacji odpornej pozwala uzyskać możliwie najlepszy rezultat przy najmniej korzystnym stanie natury rynku. Zadanie alokacji odpornej ma postać:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \{ \mathbf{x}' \boldsymbol{\mu} \} \quad \text{p.w.} \quad \max_{\boldsymbol{\Sigma} \in \Theta_{\Sigma}} \sqrt{\mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}} \leq \nu, \quad (2)$$

gdzie:  $\nu$  – ustalona wartość dopuszczalnego ryzyka,  $\Theta_{\Sigma}$  – zbiór niepewności, który z określonym, dużym prawdopodobieństwem zawiera nieznaną wartość parametru  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

Istnieje wiele możliwości specyfikacji zbiorów niepewności<sup>3</sup>. Przyjmując elipsoidalne postacie zbiorów niepewności [Meucci 2005] oraz przy założeniu, że rozkład stóp zwrotu ma rozkład normalny, promienie elipsoid ufności są odczytywane z tablic rozkładu chi-kwadrat<sup>4</sup>. Inwestor może określić estymatory parametru środka i parametru kształtu elipsoid oraz promienie elipsoid w sposób arbitralny. Im większa elipsoida, czyli im większe prawdopodobieństwo pokrycia przez nią nieznaną wartość parametru, tym inwestor określający to prawdopodobieństwo cechuje się większą awersją do ryzyka estymacji parametru. W szczególności inwestor może oszacować te parametry na podstawie szeregu czasowego stóp zwrotu. Analityczne postacie elipsoid niepewności wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji wektora stóp zwrotu oraz odpowiadające im różne warianty zadania (2) zawiera praca Orwat [2010]. W celu dokładnego i efektywnego numerycznie rozwiązania takich zadań, można je przekształcić do zadań optymalizacji stożkowej drugiego rzędu (SOCP – ang. *second order cone program*)<sup>5</sup>.

Statystyczne metody próbkowania znalazły zastosowanie w problemach wyboru portfela inwestycyjnego począwszy od pracy Michauda [1998]. Portfel otrzymany w wyniku zastosowania tej metody (w skrócie: portfel próbkowy) jest portfelem optymalnym i uśrednionym ze względu na wiele scenariuszy. Tradycyjna procedura wyboru portfela optymalnego metodą próbkowania Michauda posiada następujące etapy:

**Etap 1.** Na podstawie posiadanej próby  $((T \times k)$  – wymiarowej macierzy obserwacji stóp zwrotu) utworzenie dużej liczby  $n$  podpróbek o takiej samej liczbie obserwacji jak próba wyjściowa. Podpróbki te mogą pochodzić z rozkładu empirycznego – wówczas w wyborze portfela są stosowane metody bootstrapowe, lub też z rozkładu teoretycznego – wówczas mówimy o metodach symulacji Monte Carlo.

**Etap 2.** Dla każdej podpróbki  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$  estymacja wektora wartości oczekiwanej  $\mu_j$  i macierzy kowariancji  $\Sigma_j$  stóp zwrotu.

<sup>3</sup> Na przykład R.H. Tütüncü, M. Koenig [2004] konstruują zbiory niepewności w postaci przedziałów; D. Goldfarb, G. Iyengar [2001] wykorzystują przedział jako zbiór niepewności dla wektora wartości oczekiwanych, natomiast zbiór niepewności dla macierzy kowariancji konstruują za pomocą modeli czynnikowych.

<sup>4</sup> Spełnienie założenia normalności wektorów stóp zwrotu umożliwia bezpośrednią interpretację probabilistyczną elipsoid ufności. Jeśli rozkład stóp zwrotu nie jest rozkładem normalnym, wówczas trudno dobrać wartości promieni elipsoid mających prostą interpretację probabilistyczną. Niemniej jednak przeprowadzenie wówczas analizy empirycznej przy specyfikacjach określonych pod warunkiem założenia normalności jest nadal użyteczne, istota metody nie zmienia się.

<sup>5</sup> Optymalizacja stożkowa jest rodzajem programowania wypukłego z liniową funkcją celu, zbiór dopuszczalnych rozwiązań jest przecięciem hiperpłaszczyzny rzeczywistej i stożka.

**Etap 3.** Dla danego maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela  $v$  wyznaczenie udziałów  $\mathbf{x}_j^{(pr)}$  portfeli MV na podstawie oszacowań  $\boldsymbol{\mu}_j$  i  $\boldsymbol{\Sigma}_j$ .

**Etap 4.** Uśrednienie udziałów portfeli po próbkach  $j$  w celu wyznaczenia uśrednionego portfela:

$$\mathbf{x}_{pr}^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j^{(pr)}.$$

Zaletą portfeli próbkowych jest wyższy stopień dywersyfikacji niż klasycznych portfeli Markowitza MV [Scherer 2002]. Ponadto portfele te charakteryzują się z reguły mniej gwałtownymi zmianami w strukturze udziałów wraz ze wzrostem wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela, co jest niewątpliwie zaletą z punktu widzenia oceny inwestorów [Scherer 2002]. Losowy charakter wyboru próbek oraz fakt, że portfele te są portfelami uśrednionymi, powoduje, że są one nieodporne na obserwacje odstające. Jest to główna wada tej metody z punktu widzenia własności statystycznych.

## 2. Programowanie stochastyczne w problemach wyboru portfela

Jak już wspomniano we wstępie podstawowe zadanie rozpatrywane w pracy przyjmuje postać:

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \{E(\mathbf{x}'\tilde{\boldsymbol{\mu}})\} \quad \text{p.w.} \quad P\left(\sqrt{\mathbf{x}'\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{x}} \leq v\right) \geq 1 - \alpha.$$

Problem ten należy do klasy zadań programowania stochastycznego z probabilistycznym ograniczeniem [Shapiro et al. 2009; Luedtke i Ahmed 2008; Pagoncelli et al. 2009; Yu et al. 2003]. Dla tej klasy problemów, z uwagi na trudności z obliczaniem prawdopodobieństw występujących w ograniczeniu oraz fakt, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych nie jest zwykle zbiorem wypukłym, rozwiązania analityczne istnieją tylko dla szczególnych przypadków [Shapiro et al. 2009; Luedtke i Ahmed 2008; Pagoncelli et al. 2009; Yu et al. 2003]. Zadanie omawiane w pracy może być rozwiązane jedynie przy pomocy metod przybliżonych, w tym przypadku metody aproksymacji próbkowej. W podejściu tym oryginalne rozkłady zmiennych losowych  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  oraz  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$  są zastępowane rozkładami empirycznymi, a zakładane prawdopodobieństwo  $\alpha$  przekroczenia dopuszczalnego ryzyka – przez jego empiryczny odpowiednik  $q$ . W ten sposób rozwiązanie stochastycznego problemu (1) jest przybliżane dzięki rozwiązaniu problemu deterministycznego (3):

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}' \boldsymbol{\mu}_j \right\} .w. \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(\sqrt{\mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}_j \mathbf{x}} \leq v) \geq 1 - q, \quad (3)$$

przy czym  $\boldsymbol{\mu}_j$  oznacza  $j$ -tą realizację wektora  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , natomiast  $I(A)$  jest funkcją wskaźnikową, która przyjmuje wartość 1, gdy zdanie  $A$  jest prawdziwe oraz 0 w przeciwnym przypadku. Procedura aproksymacji problemu (1) składa się z następujących etapów:

**Etap 1.** Na podstawie  $(T \times k)$  – wymiarowej macierzy obserwacji stóp zwrotu utworzenie dużej liczby  $n$  podpróbek o takiej samej liczebności jak próba oryginalna.

**Etap 2.** Dla każdej podpróbki  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$  estymacja wektora wartości oczekiwanej  $\boldsymbol{\mu}_j$  i macierzy kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}_j$ .

**Etap 3.** Dla danej wartości  $v$  maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela wyznaczenie udziałów  $\mathbf{x}_{sp}^*$  rozwiązując problem (3).

Przedstawione rozwiązanie problemu (1) można więc postrzegać także jako połączenie opisanych wcześniej metody optymalizacji odpornej oraz metody próbkowania. Z jednej strony, tak jak w metodzie próbkowania, jest losowanych wiele podpróbek, przy czym w przeciwieństwie do podejścia Michauda, w niniejszej modyfikacji procedury jest rozwiązywane jedno zadanie optymalizacyjne obejmujące wszystkie podpróbki. Z drugiej strony, przyjęta w zadaniu optymalizacyjnym postać ograniczenia ma na celu, tak jak w metodzie optymalizacji odpornej, zagwarantowanie, że nawet mimo niekorzystnej sytuacji ryzyko portfela nie przekroczy z góry założonego poziomu. Jednakże w zadaniu optymalizacji odpornej zakłada się, że ograniczenie to musi być spełnione dla wszystkich  $\boldsymbol{\Sigma}_j$  z określonego zbioru, natomiast w niniejszej procedurze dopuszczamy, że dla niewielkiego odsetka  $q$  przypadków ograniczenie nie będzie spełnione. W sytuacji gdy  $q = 0$ , ograniczenie (3) jest tożsame z ograniczeniem w zadaniu (2).

Należy zwrócić uwagę, że dużą zaletą aproksymacji próbkowej jest jej elastyczność. Metoda ta może być bowiem stosowana dla szerokiej klasy rozkładów stóp zwrotu, a także w przypadku innych niż odchylenie standardowe miar ryzyka portfela, co pokazujemy w części empirycznej pracy, rozważając zadanie z wartością zagrożoną VaR jako miarą ryzyka.

W tym miejscu istotnym zagadnieniem jest metoda rozwiązywania deterministycznego problemu (3). Z uwagi na funkcję wskaźnikową występującą w ograniczeniu, która nie jest funkcją ciągłą, rozwiązanie tego zadania nie jest łatwe. W pracy przyjęto metodą sekwencyjnego usuwania obserwacji, które najsilniej ograniczają funkcję celu. W pierwszym kroku rozwiązywano problem (3)

przyjmując  $q = 0$ , a więc zakładając że ograniczenie musi być spełnione dla wszystkich podpróbek. Następnie usuwano te realizacje  $\mu_j$  oraz  $\Sigma_j$ , którym odpowiadała największa wartość mnożnika Lagrange'a, a więc jej usunięcie skutkowało największym wzrostem funkcji wartości, i ponownie rozwiązywano zadanie (3) przy  $q = 0$ . Procedurę powtarzano do momentu usunięcia  $[Tq]$  najsilniej ograniczających realizacji. Problem (3) dla  $q = 0$  jest zadaniem programowania kwadratowego, dla którego szybko można znaleźć dokładne rozwiązanie.

Podstawowym problemem związanym ze stosowaniem omówionej metody jest kwestia dopuszczalności uzyskanych rozwiązań. Campi i Garatti [2011] podali niedawno wzór na minimalną liczbę podpróbek  $n$ , dla których rozwiązanie problemu (3) z prawdopodobieństwem  $1 - \beta$  bliskim jedności jest rozwiązaniem dopuszczalnym spełniającym ograniczenie zadania (1). Jeżeli przez  $q^*$  oznaczyć liczbę pominiętych podpróbek  $q^* = [Tq]$ , wtedy należy wziąć takie  $n$ , dla którego będzie spełniona nierówność [Campi i Gratti 2011]:

$$\binom{q^* + k - 1}{q^*} \sum_{i=0}^{q^* + k - 1} \binom{n}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{n-i} \leq \beta, \quad (4)$$

gdzie  $k$  jest wymiarem rozważanego zadania optymalizacyjnego.

Niestety wzór ten jest prawdziwy dla bardzo szerokiej grupy zagadnień. Nierówność zachodzi dla dowolnego rozkładu zmiennych oraz dowolnego sposobu usuwania obserwacji, co sprawia, że liczba próbek obliczana na jego podstawie w praktyce najczęściej jest zdecydowanie zbyt duża. Nieco bardziej szczegółowe oszacowanie można znaleźć w innych pracach, lecz nie obejmują one zagadnień rozważanych w niniejszej pracy [Campi i Gratti 2005, 2006; Luedtke i Ahmed 2008]. Przykładowo, przyjmując  $q^* = 5$ ,  $k = 20$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,001$ , na podstawie wzoru (4) otrzymujemy  $n \geq 3588$ . Chcąc więc mieć pewność na poziomie 0,999, że uzyskane rozwiązanie problemu (3) będzie dopuszczalnym rozwiązaniem problemu (1), musimy utworzyć co najmniej 3588 podpróbek, z których w zadaniu (3) można odrzucić jedynie 5. W efekcie uzyskane portfele są bardzo konserwatywne, cechują się zazwyczaj ryzykiem zdecydowanie niższym od przyjętej wartości granicznej, a w konsekwencji również bardzo niską oczekiwaną stopą zwrotu. Takie podejście w praktyce może nie być przydatne, dlatego Luedtke i Ahmed [2008] zaproponowali, aby wartości  $n$  oraz  $q$  dobierać metodą „prób i błędów”, sprawdzając dla każdej kombinacji  $n$  oraz  $q$  odsetki przekroczeń założonego limitu a posteriori dla wielu podpróbek utworzonych z danej próby. W pracy przyjęto podejście zbliżone do tej koncepcji. Opisano je w kolejnym podrozdziale pracy.

### 3. Analiza empiryczna

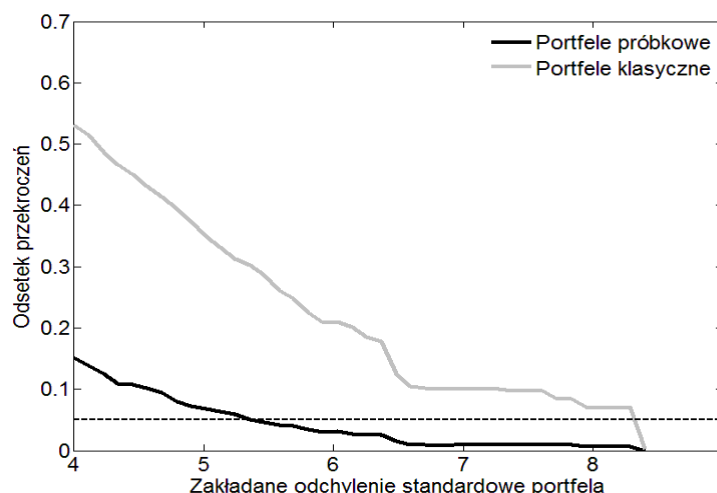
Celem analizy empirycznej była ocena wpływu różnych sposobów generowania podpróbek oraz przyjmowania różnych wartości  $n$  oraz  $q$  na odsetek przekroczeń zakładanego dopuszczalnego poziomu ryzyka  $v$ . Podstawę analiz stanowiły badania symulacyjne. Aby nie przyjmować określonego rozkładu dla generowanych prób, wykorzystano jednak dane rzeczywiste dotyczące 20 spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 lub WIG40, dla których były dostępne długie ciągi notowań. Zbiór danych liczył 624 obserwacji tygodniowych stóp zwrotu obejmujących okres 3.12.1999-11.11.2011. Zbiór ten traktowano jako populację, z której następnie losowano ze zwracaniem 1000 prób liczących po  $T = 200$  obserwacji. Dla każdej takiej próby wyznaczano klasyczne portfele jako rozwiązania problemu:

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \{\mathbf{x}' \tilde{\boldsymbol{\mu}}\} \text{ p.w. } \sqrt{\mathbf{x}' \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{x}} \leq v, \quad (5)$$

oraz portfele próbkowe będące rozwiązaniami problemu (1) metodą opisaną w poprzednim rozdziale. W ostatnim kroku szacowano oczekiwaną stopę zwrotu oraz ryzyko tych portfeli, lecz dokonywano tego na podstawie wektora  $\boldsymbol{\mu}$  i macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}$  z populacji, a więc obliczanych na podstawie wszystkich 624 obserwacji. Otrzymane oszacowania ryzyka portfeli, nazywane ryzykiem rzeczywistym, porównywano z przyjętymi różnymi wartościami dopuszczalnego poziomu odchylenia standardowego  $v$ . W przypadku modeli próbkowych w wariancie podstawowym zakładano, że podpróbki są generowane metodą bootstrap, to znaczy poprzez losowanie ze zwracaniem  $T = 200$  obserwacji z analizowanej próby. Przyjmowano  $n = 100$  podpróbek. Dopuszczalny odsetek przekroczeń zadanego poziomu ryzyka ustalono na poziomie  $\alpha = q = 0,05$ .

Na rysunku 1 zilustrowano odsetek 1000 przeprowadzonych symulacji, dla których faktyczne ryzyko portfela, obliczane na podstawie macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}$  z analizowanej populacji, przekraczało zadany dopuszczalny poziom  $v$ .

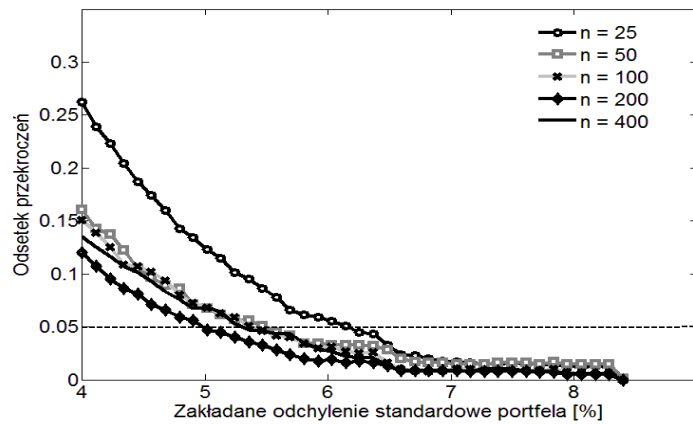




Rys. 1. Odsetek przekroczeń zakładanego ryzyka dla portfeli klasycznych oraz próbkowych

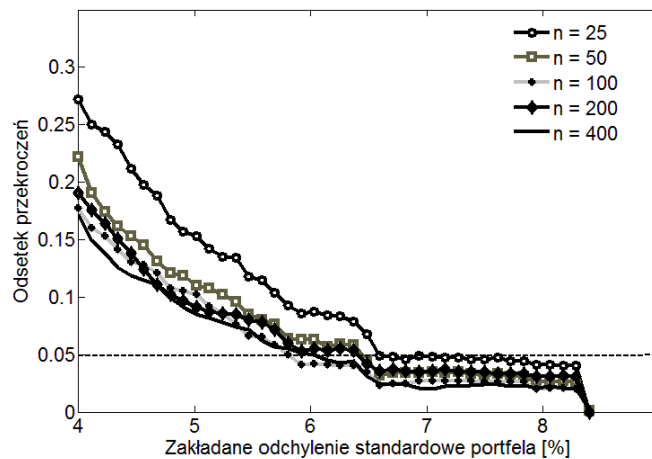
Z rysunku tego wynika, że dla przyjętego poziomu ryzyka portfela  $v = 4\%$  w skali tygodnia, rzeczywiste ryzyko portfeli klasycznych przekraczało założony poziom w ponad 50% prób. W przypadku portfeli próbkowych odsetek ten był natomiast równy około 15%, co i tak jest poziomem wyraźnie wyższym od przyjętego odsetka przekroczeń wynoszącego 5%. Dla  $v = 5,5\%$  odsetek ten dla portfeli próbkowych spada jednak poniżej przyjętej granicy. W przypadku wysokiego poziomu ryzyka dopuszczalnego  $v = 8\%$  dla portfeli próbkowych odsetek przekroczeń jest minimalny, a w przypadku portfeli klasycznych jest wyższy od 5%.

W dalszej części analizowano wpływ liczby podpróbek  $n$  na odsetek przekroczeń w modelach próbkowych. Na rysunku 2 przedstawiono wyniki analiz dla sytuacji, gdy podpróbki są generowane metodą bootstrap. Dla małej liczby podpróbek  $n = 25$  liczba przekroczeń jest wyraźnie wyższa od wariantu bazowego, w którym  $n = 100$ . Dalsze zwiększanie liczby podprób nie prowadzi już natomiast do znaczącego spadku odsetka przekroczeń. Dla  $v = 4\%$  oraz  $n = 400$  odsetek przekroczeń jest wyraźnie wyższy niż 10%.



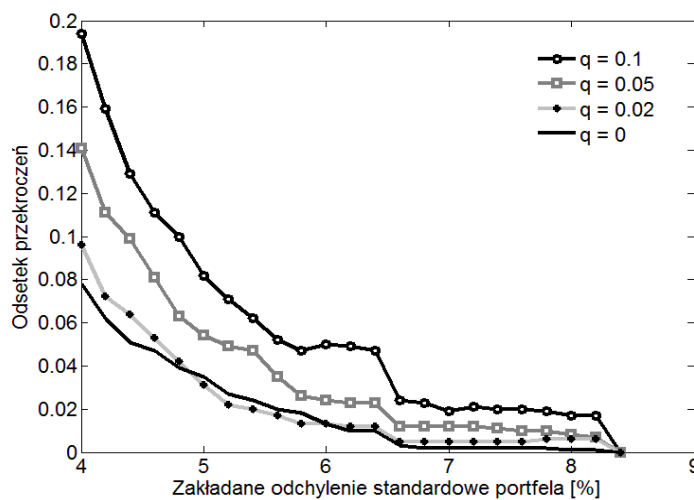
Rys. 2. Odsetek przekroczeń zakładanego ryzyka dla portfeli próbkowych dla różnej liczby próbek tworzonych metodą bootstrap

Na rysunku 3 zaprezentowano wyniki podobnych rozważań dla sytuacji, w której podpróbki były generowane symulacyjnie, z rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji równych klasycznym oszacowaniom uzyskanych na podstawie analizowanej próby. Wyraźnie odstają jedynie wyniki dla  $n = 25$  oraz  $n = 50$ . W pozostałych przypadkach zwiększanie liczby próbek przynosiło bardzo niewielkie spadki odsetka przekroczeń. W omawianym przypadku istotne jest jednak, że odsetki przekroczeń są wyższe niż dla próbek bootstrapowych. Świadczy to o tym, że w omawianym przypadku powinno być preferowane podejście z próbkami bootstrapowymi.



Rys. 3. Odsetek przekroczeń zakładanego ryzyka dla portfeli próbkowych dla różnej liczby próbek tworzonych metodą symulacji Monte Carlo

Rysunek 4 ilustruje efekty rozważań nad wpływem próbkowego współczynnika przekroczeń  $q$  na odsetek przekroczeń w podstawowym wariancie modelu próbkowego. Przy  $n = 100$  podpróbekach analizowano modele, w których wyklucza się 10, 5, 2 oraz 0 podpróbek. Zmiany wartości parametru  $q$  przynoszą teraz większe spadki liczby przekroczeń niż zwiększanie liczby podpróbek. W skrajnym przypadku dla  $q = 0$  oraz  $v = 4\%$  zaobserwowany odsetek przekroczeń wynosi mniej niż 8%. Dodatkowo zmiana wartości  $q$  ma dużo mniejszy wpływ na czasochłonność obliczeń niż zmiana liczby podpróbek. W szczególności w przypadku algorytmu zastosowanego w pracy zmniejszanie  $q$  skraca czas obliczeń.



Rys. 4. Odsetek przekroczeń zakładanego ryzyka dla portfeli próbkowych dla różnych frakcji opuszczanych podpróbek  $q$

Przedstawione wyniki wyraźnie wskazują, że portfele próbkowe cechują się niższym poziomem ryzyka w stosunku do portfeli klasycznych. Odbywa się to jednakże kosztem niższej oczekiwanej stopy zwrotu takich portfeli. W tym miejscu pojawia się więc pytanie, czy takie podejście jest korzystne dla inwestorów. Aby na to pytanie odpowiedzieć dla generowanych prób wyznaczano optymalne portfele klasyczne oraz próbkowe w wariancie podstawowym dla inwestora cechującego się liniową funkcją użyteczności ze względu na oczekiwaną stopę zwrotu oraz ryzyko postaci:

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\boldsymbol{\mu} - 0,5\psi\mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x}, \quad (6)$$

gdzie  $\psi$  jest współczynnikiem awersji do ryzyka. Następnie oceniano użyteczność tych portfeli, przyjmując za  $\boldsymbol{\mu}$  oraz  $\boldsymbol{\Sigma}$  wartości z całej populacji 624 stóp

zwrotu. W tabeli 1 zestawiono średnie wartości użyteczności dla 1000 prób w zależności od poziomu współczynnika awersji do ryzyka. W przypadku inwestorów cechujących się niską awersją do ryzyka nieco lepsze okazywały się zwykle portfele klasyczne, natomiast dla tych, którzy cechują się wyższym poziomem awersji do ryzyka lepsze są portfele próbkowe.

Tabela 1

Średnie wartości użyteczności portfeli klasycznych oraz próbkowych

$\psi$	0,01	0,1	1	10	50	100
portf. klas.	<b>1,0071*</b>	<b>1,0069</b>	1,0051	0,9972	0,9646	0,9237
portf. próbk	1,0070	1,0068	1,0051	<b>0,9979</b>	<b>0,9698</b>	<b>0,9345</b>

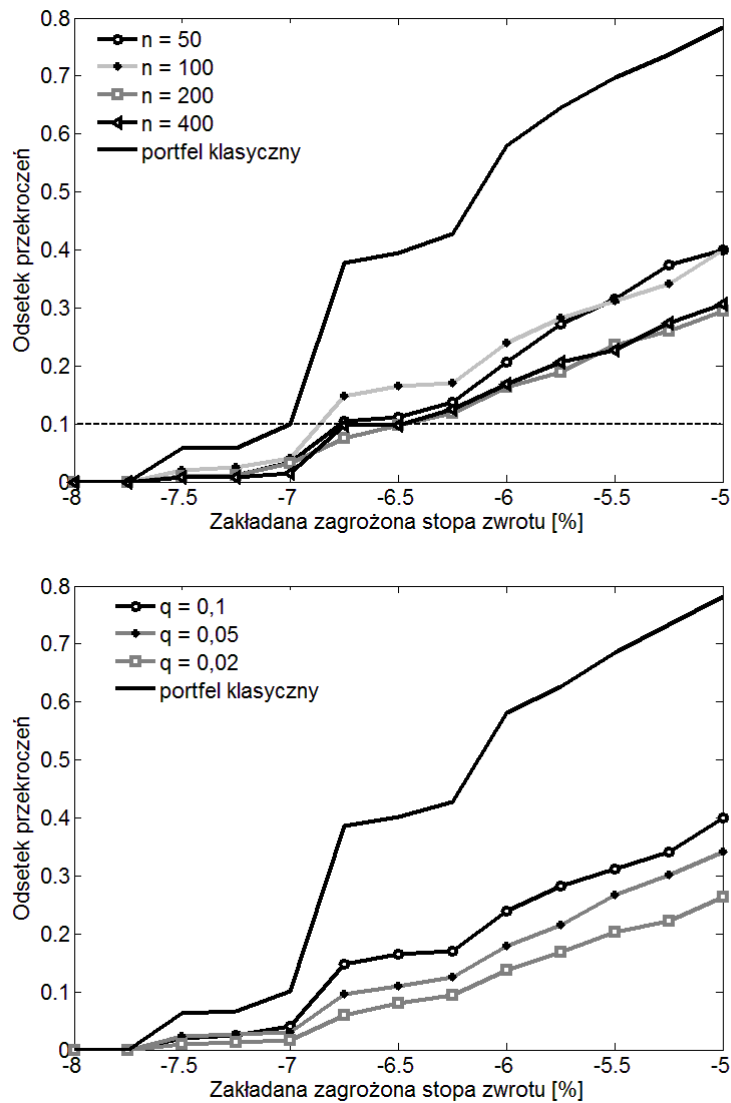
\* Wartości pogrubione wskazują na portfele o wyższej średniej użyteczności.

W ostatniej części rozważano modele, w których jako miarę ryzyka portfela zamiast odchylenia standardowego przyjęto wartość zagrożoną VaR. Analizowane problemy decyzyjne miały następującą formę:

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \{E(\mathbf{x}'\tilde{\boldsymbol{\mu}})\} \text{ p.w. } P(VaR_{\gamma}(\mathbf{x}'\tilde{\boldsymbol{\mu}}) \geq r_{\min}) \geq 1 - \alpha, \quad (7)$$

$$\max_{\mathbf{x} \in C} \{\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}\} \text{ p.w. } VaR_{\gamma}(\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}) \geq r_{\min}, \quad (8)$$

gdzie  $\gamma$  oznacza rząd kwantyla, a  $r_{\min}$  jest zakładanym minimalnym poziomem wartości zagrożonej. Z punktu widzenia programowania stochastycznego problem (6) jest prostszy do rozwiązania niż problem (1) i dlatego częściej był analizowany w literaturze [Bonami i Lejeune 2009; Pagoncelli et al. 2009]. Podobnie jak w poprzedniej części, analizowano wpływ liczby podpróbek oraz odsetka pomijanych podpróbek na obserwowany odsetek przekroczeń zakładanej minimalnej wartości zagrożonej.



Rys. 5. Odsetki przekroczeń zakładanego poziomu ryzyka dla portfeli klasycznych oraz próbkowych przy różnych wartościach  $n$  oraz  $q$  dla modelu VAR

Wyniki analiz w tym zakresie przedstawiono na wykresach na rysunku 5. W rozważaniach przyjmowano  $\gamma = 0,05$ . W przypadku restrykcyjnego założenia minimalnej wartości zagrożonej na poziomie  $r_{\min} = -5\%$  portfele klasyczne będące rozwiązaniem zadania (7) aż w około 80% przypadków cechowały się poziomem VaR niższym niż poziom zakładany. Dla modeli próbkowych przy  $q = 0,1$  odsetek ten wynosił 30%-40% w zależności od liczby podpróbek  $n$ . Dla niższych wartości odsetki te są niższe, przy czym poniżej zakładanego poziomu  $q = 0,1$  spadają

one dopiero dla zakładanej wartości zagrożonej równej około -7%. Obniżanie wartości  $q$  skutkuje także niższym odsetkiem przekroczeń, przy czym spadek ten następuje dość wolno.

## Podsumowanie

W pracy rozważano zastosowanie metod programowania stochastycznego w problemach wyboru portfela uwzględniających ryzyko estymacji. Koncentrowano się na zadaniach, które miały na celu zapewnienie, że ryzyko portfela z dużym prawdopodobieństwem nie przekroczy zadanego poziomu.

Przeprowadzone badania symulacyjne wskazały, że problem przekraczania założonego poziomu ryzyka w związku z niedokładnością estymacji charakterystyk aktywów składowych portfela może być bardzo częsty. Na przykład, gdy jako miarę ryzyka przyjęto wartość zagrożoną, wówczas dla klasycznych portfeli ich wartość zagrożona mogła przekraczać poziom założony w zadaniu nawet w 80% przypadków.

Dla rozwiązania analizowanych zadań programowania stochastycznego zaproponowano metodę aproksymacji próbkowej, dla której kluczowym problemem jest określenie właściwego sposobu generowania podpróbek, oszacowania ich liczebności oraz odsetka pomijanych podpróbek w empirycznej wersji problemu stochastycznego. W odniesieniu do sposobu generowania podpróbek stwierdzono, że nieco lepsze wyniki uzyskano przy zastosowaniu podejścia bootstrapowego, a więc losowania obserwacji ze zwracaniem z analizowanej próby, niż w przypadku losowania z określonego rozkładu teoretycznego, którego parametry szacowano na podstawie próby. W aspekcie wyboru liczebności oraz odsetka pomijanych podpróbek ustalono natomiast, że aby uzyskać w przybliżeniu zakładane ryzyko przekroczenia zadanego poziomu ryzyka, korzystniej jest zmieniać empiryczny odsetek pomijanych podpróbek  $q$ , niż liczbę generowanych podpróbek. Wynika to z większej wrażliwości odsetka przekroczeń na wartość parametru  $q$ , a także z większej szybkości działania takiego algorytmu. Ponadto pokazano, że omawiane podejście stochastyczne może być polecane inwestorom cechującym się wysokim poziomem awersji do ryzyka.

## Literatura

- Bonami P., Lejeune M. (2009): *An Exact Solution Approach for Integer Constrained Portfolio Optimization Problems under Stochastic Constraints*. „Operations Research”, Vol. 57 (3).

- Calafiore G., Campi M. (2005): *Uncertain Convex Programs: Randomized Solutions and Confidence Levels*. „Mathematical Programming”, Vol. 102.
- Calafiore G., Campi M. (2006): *The Scenario Approach to Robust Control Design*. „IEEE Transactions on Automatic Control”, Vol. 51.
- Campi M., Garatti S. (2011): *A Sampling-and-discarding Approach to Chance-constrained Optimization: Feasibility and Optimality*. „Journal of Optimization Theory and Applications”, Vol. 148(2).
- Goldfarb D., Iyengar G. (2001): *Robust Portfolio Selection Problem*. „Mathematics of Operations Research”, No. 28.
- Luedtke J., Ahmed S. (2008): *A Sample Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints*. „SIAM Journal of Optimization”, Vol. 19.
- Markowitz H. (1952): *Portfolio Selection*. „Journal of Finance”, Vol 7.
- Meucci A. (2005): *Risk and Asset Allocation*. Springer, Berlin.
- Michaud R.O. (1998): *Efficient Asset Management: A practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*. Harvard Business School Press.
- Orwat A. (2007a): *Metody odporne SAW w estymacji ryzyka portfela aktywów długoterminowych na przykładzie polskiego rynku funduszy inwestycyjnych*. W: *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – Tendencje światowe a polski rynek*. Red. K. Jajuga, W. Ronka-Chmielowiec. AE Wrocław.
- Orwat A. (2007b): *Wielowymiarowe metody odporne w estymacji ryzyka portfela aktywów długoterminowych na polskim rynku kapitałowym*. W: *Modelowanie preferencji a ryzyko*. Red. T. Trzaskalik. AE Katowice.
- Orwat A. (2010): *Odporne metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji*. „Skuteczne inwestowanie”, nr 616.
- Orwat-Acedańska A. (2011): *Odporne bayesowskie metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji. Modelowanie preferencji a ryzyko '11*. Red. T. Trzaskalik UE Katowice.
- Pagoncelli B., Ahmed S., Shapiro A. (2009): *The Sample Average Approximation Method for Chance Constrained Programming: Theory and Applications*. „Journal of Optimization Theory and Applications”, Vol. 142.
- Scherer B. (2002): *Portfolio Resampling: Review and Critique*. „Financial Analysts Journal”, Vol. 58, No. 6.
- Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. (2009): *Lectures on Stochastic Programming: Modelling and theory*. SIAM, Philadelphia.
- Tütüncü R.H., Koenig M. (2004): *Robust Asset Allocation*. „Annals of Operations Research”, No. 132.
- Yu L., Ji X., Wang S. (2003): *Stochastic Programming Models in Financial Optimization: A Survey*. „AMO – Advanced Modeling and Optimization”, Vol. 5(1).

## AN APPLICATION OF THE STOCHASTIC PROGRAMMING TO BUILDING ROBUST INVESTMENT PORTFOLIOS

### Summary

The paper discusses application of stochastic programming approach to the portfolio selection problem involving estimation risk. It focuses on problems aiming at assuring that the portfolio risk does not exceed a given limit with high probability. For solving the problems the sample approximation approach is proposed for which the most important issues like a method used for generating subsamples, setting the correct number of subsamples and empirical confidence level parameter are discussed. As far as the first issue is concerned a bootstrap approach was superior to Monte Carlo method in a simulation study based on returns data of stocks listed on the Warsaw Stock Exchange. For the latter problems it is advised changing the empirical confidence level parameter instead of the number of subsamples to match expected confidence level of the stochastic program. It is also shown that the discussed approach is suitable for investors with high risk aversion.