

Ewa Dziwok

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Finansów i Ubezpieczeń
Katedra Matematyki Stosowanej
ewa.dziwok@ue.katowice.pl

MACIERZ KORELACJI STÓP FORWARD W PROCESIE KONSTRUKCJI KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI

Streszczenie: Zastosowanie różnych kryteriów konstrukcji krzywej dochodowości zmusza do poszukiwań takiej metodologii, która pozwoliłaby na ocenę pożądaných cech krzywej dochodowości na potrzeby polskiej polityki pieniężnej. Oparcie skonstruowanej miary na własnościach powierzchni korelacji implikowanej 7-dniowej stopy forward wymagało przyjęcia subiektywnych kryteriów oceny. Taki sposób oceny daje pewien obraz potencjału krzywej dochodowości w zależności od przyjętego modelu parametrycznego oraz funkcji celu.

Słowa kluczowe: krzywa dochodowości, modele parametryczne, stopy forward.

Wprowadzenie

Krzywa dochodowości, wyrażająca zmiany poziomu zerokuponowej stopy w zależności od czasu inwestycji, znajduje szerokie zastosowanie na rynkach finansowych. Warunkiem poprawności konstrukcji struktury terminowej jest wykorzystanie do jej tworzenia stóp aktywów o zbliżonym ryzyku kredytowym, co sprawia, że na dany moment możliwa jest budowa całej gamy krzywych dla różnego zbioru danych. Dodatkowym elementem różnicującym proces konstrukcji jest wybór metody aproksymacji oraz samego modelu. Obok licznej grupy modeli krzywej dochodowości, znajdującej zastosowanie w wycenie instrumentów pochodnych, odrębną część stanowią modele wykorzystywane w polityce pieniężnej banku centralnego. Większość banków centralnych stosuje jeden z dwóch rodzajów modeli: parametryczne (model Nelsona–Siegela lub Svenssona) bądź łączone wielomiany (spliny) [BIS, 2005]. Polski bank centralny

stosuje modele parametryczne [Marciniak, 2006], co przyczyniło się do wyboru tej metody konstrukcji krzywej dochodowości w niniejszym badaniu.

Celem artykułu jest ocena wiarygodności modeli parametrycznych, wykorzystywanych do konstrukcji krzywej dochodowości opartej na stawkach WIBOR, pochodzących z lat 2009-2012, ze względu na własności wyodrębnionych z nich implikowanych stóp forward przedstawionych w postaci macierzy korelacji.

Aby osiągnąć cel, zostanie skonstruowany subiektywny miernik pozwalający na hierarchizację analizowanych modeli (obejmujących sześć grup krzywych, po trzy dla modeli Nelsona–Siegela i Svenssona z uwzględnieniem trzech różnych kryteriów dopasowania do danych rzeczywistych: minimalizacji kwadratu różnic cen, kwadratu różnic rentowności oraz kwadratu różnic cen korygowanych duration).

1. Implikowana stopa forward jako element służący do budowy macierzy korelacji

Szacowanie struktury terminowej na podstawie modeli parametrycznych jest procesem statycznym i nie niesie żadnych informacji o dynamice wyznaczonych stóp procentowych. Samo kryterium jakości dopasowania krzywej do danych nie daje podstaw do wskazania najlepszej metody szacowania, dlatego alternatywą może stać się metoda analizy zmian implikowanych stóp forward, wykorzystywana powszechnie w badaniu oczekiwań oraz ryzyka [Meucci, 2005, s. 154-156].

Jedną z podstawowych stóp banku centralnego (zarówno Europejskiego Banku Centralnego, jak i NBP) jest rentowność 7-dniowych bonów pieniężnych, dlatego w badaniu konstruowano implikowaną stopę forward o terminie odpowiadającym zapadalności stopy referencyjnej. Dla dowolnego dnia τ , w którym były dostępne dane konstruowano krzywe dochodowości na podstawie modelu Nelsona–Siegela oraz Svenssona, przy zastosowaniu trzech różnych kryteriów przybliżania danych teoretycznych do danych rynkowych. W efekcie dla dowolnego momentu τ możliwe było oszacowanie sześciu wektorów parametrów, a w konsekwencji sześciu implikowanych struktur forward $f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$ o ustalonym z góry tenorze (długości) 7 dni oraz momencie realizacji transakcji s .

Do zbadania dynamiki implikowanej stopy forward konieczne jest zdefiniowanie jej zmian, które w przypadku wskaźnika dziennego można przedstawić w postaci logarytmicznej stopy zwrotu¹:

¹ Do rozkładów, które najlepiej opisują zachowania stóp procentowych można zaliczyć rozkład normalny oraz lognormalny, przy czym nie można w sposób jednoznaczny wskazać, który jest bliższy rzeczywistości. Według Bank of England (1999) na rynkach charakteryzujących się niskimi stopami (poniżej 4%) proces opisujący zachowanie stóp jest gaussowski, w pozostałych przypadkach – lognormalny i taki też został zastosowany w niniejszym artykule.

$$\Delta f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365}) = \ln \frac{f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})}{f_{\tau-1}(s, s + \frac{7}{365})} \quad (1)$$

gdzie:

$f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$ – 7-dniowa stopa forward ustalona w momencie τ ,

τ – moment wyznaczania implikowanej stopy forward,

s – moment rozpoczęcia transakcji forward.

Weryfikacja krzywej dochodowości dokonywana ze względu na własności otrzymanych za jej pomocą stóp forward opiera się na badaniu ich wzajemnych relacji, wyrażonych poprzez współczynnik korelacji obliczony ze wzoru:

$$\rho_{n,m} \equiv \rho_{n,m} \left(\Delta f_{\tau} \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right); \Delta f_{\tau} \left(\frac{7m}{365}, \frac{7(m+1)}{365} \right) \right) \quad (2)$$

przy czym $\Delta f_{\tau} \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right) = \ln \frac{f_{\tau} \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right)}{f_{\tau-1} \left(\frac{7n}{365}, \frac{7(n+1)}{365} \right)}$.

Macierz korelacji \mathbf{P} , której elementy stanowią współczynniki korelacji $\rho_{n,m}$ (gdzie $|n-m|$ wyraża dystans pomiędzy terminami rozliczenia transakcji), powinna charakteryzować się następującymi własnościami [Rebonato, 2002, s. 190-191]:

[1] $\rho_{m,m} = 1$, dla dowolnego m ,

[2] $-1 \leq \rho_{n,m} \leq 1$,

[3] $\rho_{m,n} = \rho_{n,m}$,

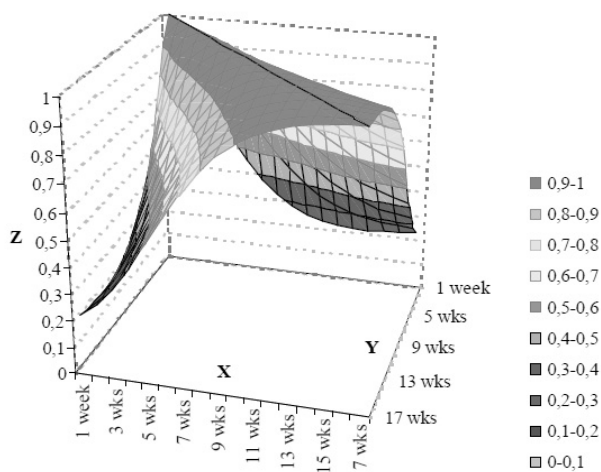
[4] dla ustalonego n , $\rho_{n,n+m}$ jest malejącą funkcją m , która to własność, określana jako efekt dekorelacji oznacza, że wraz ze wzrostem zróżnicowania się terminów realizacji implikowanych stóp forward $|n-m|$, ich wzajemny związek ulega osłabieniu [Brace, Gątarek, Musiela, 1997, s. 127-154],

[5] dla ustalonego n , $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{n,n+m} = a > 0$ dąży do dodatniej wartości,

[6] dla ustalonego m , $\rho_{n,n+m}$ jest rosnącą funkcją n , co oznacza, że w przypadku krótkiego horyzontu realizacji kontraktów rynek silnie różnicuje oczekiwania, natomiast w odleglejszej przyszłości różnice te zanikają.

Na podstawie współczynników korelacji (elementów macierzy \mathbf{P}) można zbudować trójwymiarową powierzchnię, na której osiach X i Y są odłożone terminy realizacji kontraktów implikowanych 7-dniowych stóp forward (n wks – termin

realizacji stopy $f_{\tau}\left(\frac{7 \cdot n}{365}, \frac{7 \cdot (n+1)}{365}\right)$, natomiast na osi Z wartości korelacji między nimi².



Rys. 1. Optymalna powierzchnia korelacji implikowanych stóp forward

Źródło: Opracowanie własne.

2. Badanie własności macierzy korelacji implikowanych stóp forward wyznaczonych z kwotowań stawek WIBOR

Choć parametry modelu pozwalają oszacować poziom implikowanej stopy forward w dowolnym momencie w przyszłości, dla dowolnego dnia τ , w którym były dostępne dane, w badaniu wyznaczono 17 tygodniowych stóp forward $f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$ dla $s = \frac{7}{365}; \frac{14}{365}; \dots; \frac{119}{365}$. W efekcie otrzymano wektor \mathbf{f}_{τ} postaci:

$$\mathbf{f}_{\tau}(s, s + \frac{7}{365}) = \left[f_{\tau}\left(\frac{7}{365}, \frac{14}{365}\right); f_{\tau}\left(\frac{14}{365}, \frac{21}{365}\right); \dots; f_{\tau}\left(\frac{119}{365}, \frac{126}{365}\right) \right] \quad (3)$$

Wektor ten przedstawia ciągi tygodniowych stóp forward oszacowanych w dniu τ o realizacjach za 1, 2, ..., 17 tygodni. Należy więc podkreślić, że są to stopy o tej samej długości (tenorze), ale których realizacja przebiega w różnych momentach w przyszłości.

² Poszczególne kolory na wykresie powierzchniowym oraz odpowiadającym im wykresach konturowych reprezentują odpowiedni przedział wartości współczynnika korelacji reprezentowany w legendzie wykresu.

Konstruowana macierz korelacji \mathbf{P} będzie się zatem składać z 17 kolumn oraz 17 wierszy, przy czym jej elementami będą wyrazy postaci $\rho_{n,m}$, obliczone dla $n, m = 1, 2, \dots, 17$ ze wzoru (2).

Aby zweryfikować krzywe dochodowości, do ich konstrukcji użyto dwóch metod parametrycznych (Nelsona–Siegeła oraz Svenssona) z wykorzystaniem trzech odmiennych kryteriów dopasowania, ponieważ dotychczasowe badania wskazują, że wybór kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych ma wpływ na kształt powierzchni korelacji³. W efekcie zastosowanych metod, dla każdego dnia możliwe było skonstruowanie 6 krzywych, a w konsekwencji wyznaczenie 6 wektorów \mathbf{f}_t . Dane wykorzystane w badaniu obejmowały kwotowania stóp WIBOR z okresu 2009-2012 z uwzględnieniem obu modeli parametrycznych oraz trzech kryteriów dopasowania.

W badaniu przyjęto następujące oznaczenia dotyczące wyznaczonego poziomu zmienności implikowanych stóp forward na podstawie modelu:

NS_P – Nelsona–Siegeła z kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen,

NS_P/D – Nelsona–Siegeła z kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen korygowanych o odwrotność duration,

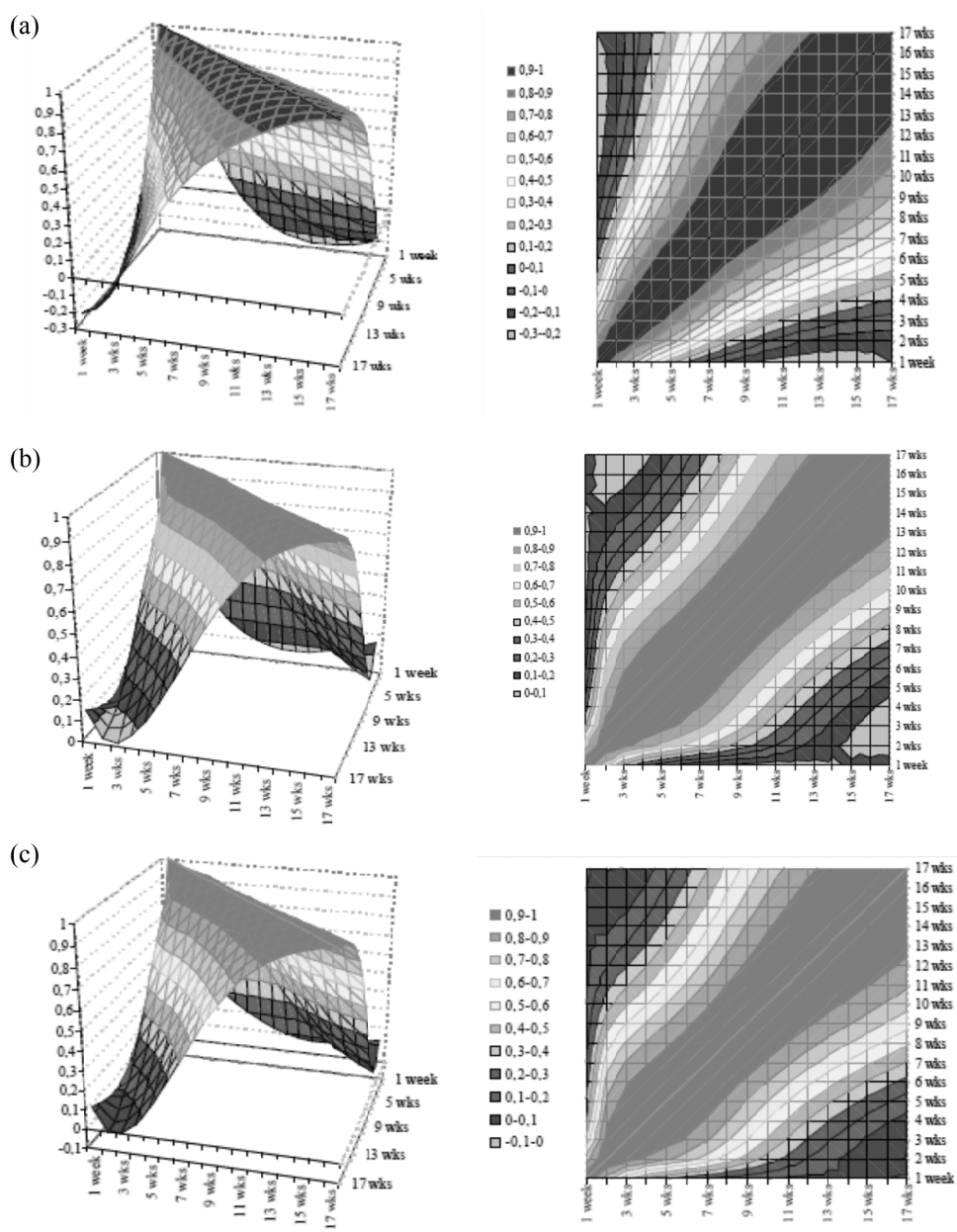
NS_Y – Nelsona–Siegeła z kryterium minimalizacji kwadratu różnic rentowności,

Sv_P – Svenssona z kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen,

Sv_P/D – Svenssona z kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen korygowanych o odwrotność duration,

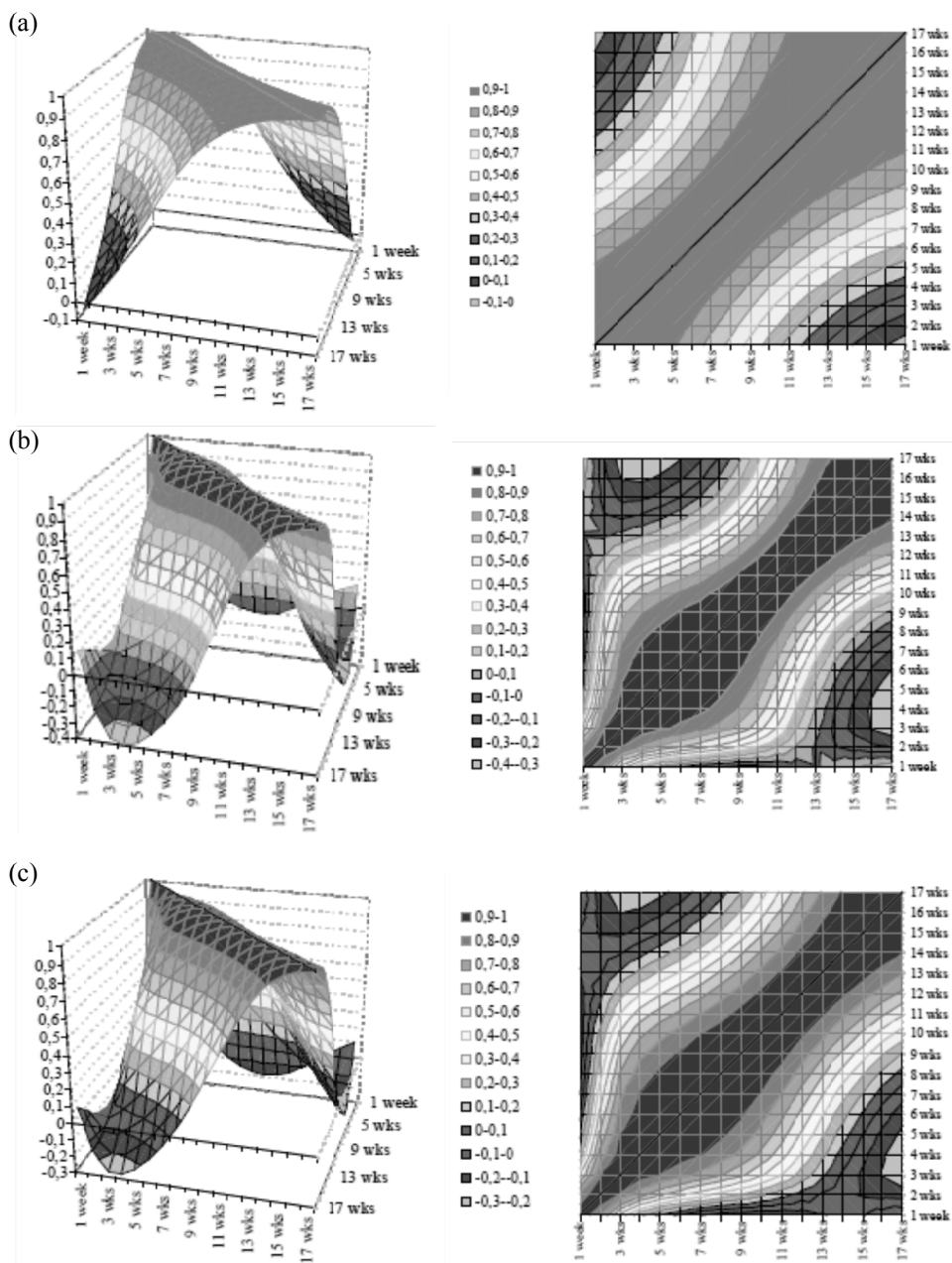
Sv_Y – Svenssona z kryterium minimalizacji kwadratu różnic rentowności.

³ Porównanie powierzchni korelacji wyznaczonych na podstawie różnych modeli można znaleźć w: [Alexander, 2008, s. 56-57; Alexander, Lvov, 2003; Dziwok, s. 93-105].



Rys. 2. Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych na podstawie stawek WIBOR i modelu Nelsona-Siegela według kryterium dopasowania krzywej – minimalizacja kwadratów różnic cen (a), rentowności (b), cen ważonych odwrótnością duration (c)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych WIBOR z lat 2009-2012.



Rys. 3. Powierzchnia korelacji dla implikowanych 7-dniowych stóp forward estymowanych na podstawie stawek WIBOR i modelu Svenssona według kryterium dopasowania krzywej – minimalizacja kwadratów różnic cen (a), rentowności (b), cen ważonych odwrotnością duration (c)

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych WIBOR z lat 2009-2012.

3. Analiza powierzchni korelacji

Analiza powierzchni polega na weryfikacji cech [1]-[6] za pomocą skonstruowanego w tym celu miernika. Sama budowa macierzy korelacji realizuje wykonanie warunków [1]-[3], dlatego konstrukcja miernika adekwatności $M(\rho)$ powierzchni korelacji w stosunku do powierzchni optymalnej może zostać przedstawiona jako zagregowana wartość ważona uwzględniająca własności [4], [5] oraz [6]:

$$M(\rho) = \frac{M_{[4]}(\rho) + M_{[5]}(\rho) + M_{[6a]}(\rho) + M_{[6b]}(\rho)}{4} \quad (4)$$

gdzie:

$M(\rho)$ – wskaźnik adekwatności powierzchni korelacji,

$M_{[4]}(\rho) = |\rho_{1,2}| - |\rho_{1,10}|$ – kryterium mierzące stopień spadku wskaźnika korelacji, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako stymulanta,

$M_{[5]}(\rho) = \begin{cases} \rho_{1,100} & \text{jeśli } \rho_{1,17} > 0 \\ 0 & \text{jeśli } \rho_{1,17} \leq 0 \end{cases}$ – kryterium mierzące granicę poziomu korelacji, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako stymulanta,

relacji, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako stymulanta,

$M_{[6a]}(\rho) = |\rho_{1,2} - \rho_{2,3}|$ – kryterium mierzące siłę zróżnicowania oczekiwań w krótkim terminie, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako stymulanta,

$M_{[6b]}(\rho) = |\rho_{15,16} - \rho_{16,17}|$ – kryterium mierzące stopień podobieństwa wskaźnika korelacji w dłuższym terminie, przed zagregowaniem podlega normalizacji jako destymulanta.

Miara jest unormowana, a wzrost jej wartości do jedynki oznacza wzrost adekwatności kształtu powierzchni implikowanej 7-dniowej stopy forward.

Tabela 1. Poziom wskaźnika adekwatności powierzchni korelacji implikowanej 7-dniowej stopy forward

	NS_P	NS_Y	NS_P/D	Sv_P	Sv_Y	Sv_P/D
WIBOR	0,612	0,922	0,834	0,390	0,966	0,851

Źródło: Opracowanie własne.

Analiza poziomu wskaźnika $M(\rho)$ pozwala stwierdzić, że najlepszymi metodami konstrukcji krzywej dochodowości jest model Nelsona–Siegeła oraz Svenssona z przyjętym kryterium minimalizacji kwadratu różnic rentowności. Nieznacznie gorszym okazały się modele z kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen korygowanych duration.

Podsumowanie

Zastosowanie różnych kryteriów konstrukcji krzywej dochodowości zmusza do poszukiwań takiej metodologii, która pozwoliłaby na ocenę pożądaných cech krzywej dochodowości na potrzeby polskiej polityki pieniężnej. Pomimo że stworzenie miary opartej na własnościach powierzchni korelacji implikowanej 7-dniowej stopy forward wymagało przyjęcia subiektywnych kryteriów oceny, podejście to pozwoliło na hierarchizację modeli konstrukcji krzywej. Jednocześnie warto podkreślić, że skonstruowany miernik uwzględnia pożądane cechy stóp forward wyznaczonych na podstawie danej krzywej.

Taki sposób oceny daje pewien obraz potencjału krzywej dochodowości w zależności od przyjętego modelu parametrycznego oraz funkcji celu, nawet pomimo faktu, że skonstruowany miernik jest obciążony subiektywizmem autora. Potrzeba analizy innych cech krzywej dochodowości wymusi konieczność przekonstruowania wskaźnika w celu osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.

Literatura

- Alexander C. (2008), *Market Risk Analysis*, Vol. III, John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- Alexander C., Lvov D. (2003), *Statistical Properties of Forward Libor Rates*, „ISMA Discussion Papers in Finance”, 2003-03.
- BIS (2005), *Zero-coupon Yield Curves: Technical Documentation*, Bank for International Settlements, Basel.
- Brace A., Gątarek D., Musiela M. (1997), *The Market Model of Interest rate Dynamics*. „Mathematical Finance”, No. 7, s. 127-154.
- Dziwok E. (2012), *Krzywa dochodowości a polityka pieniężna. Modelowanie i kryteria doboru krzywej na polskim rynku*, Wydawnictwo UE, Katowice.
- Marciniak M. (2006), *Yield Curve Estimation at the National Bank of Poland*, „Bank i Kredyt”, nr 3, s. 52-74.
- Meucci M. (2005), *Risk and Asset Allocation*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Rebonato R. (2002), *Modern Pricing of Interest-rate Derivatives*, Princeton University Press, Princeton, Oxford.
- [www 1] <http://www.money.pl> (dostęp: 30.12.2012).

THE CORRELATION MATRIX OF FORWARD RATES IN THE PROCESS OF YIELD CURVE CONSTRUCTION

Summary: The use of different criteria for the yield curve construction makes to search for such methodology which would allow to assess the desirable features of the yield curve. The adoption of subjective evaluation criteria let construct a measure which describes the required features of the correlation surface. This surface is composed of correlation coefficients between implied 7-day forward rates. Such a method of assessment let point out the best yield curves depending on the assumed parametric model and the objective function.

Keywords: term structure, parametric models, forward rates.